На правах рукописи

КОРОБОВА ОЛЬГА ВИКТОРОВНА

Матричные фундаментальные оператор-функции вырожденных операторно-дифференциальных систем

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2009

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики ГОУ ВПО "Иркутский государственный университет" (Федеральное агентство по образованию РФ).

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Фалалеев Михаил Валентинович**
Оффициальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Чистяков Виктор Филимонович**
	доктор физико-математических наук, профессор **Кадченко Сергей Иванович**
Ведущая организация:	**Южно-Уральский государственный университет** (г. Челябинск)

Защита диссертации состоится 17 сентября 2009 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в ИДСТУ СО РАН по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 14 августа 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие начально-краевые задачи, возникающие в приложениях, можно редуцировать к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной и соответствующим этим уравнениям задачам Коши. Такие уравнения принято называть сингулярными дифференциальными уравнениями (или, в иной терминологии, вырожденными дифференциальными уравнениями, уравнениями соболевского типа). Повышенный интерес к подобным уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной, объясняется возможностью их применения к решению различных прикладных проблем, таких, например, как задачи о фильтрации и влагопереносе, о колебаниях в молекулах ДНК, задачи термоконвекции и электротехники (модели Баренблатта–Желтова–Кочиной[1], Осколкова[2], Хоффа, Свешникова–Габова–Плетнера–Корпусова[3]).

Объектом исследований в работе является задача Коши вида

$$MB\dot{\overline{u}}(t) = \Lambda A\overline{u}(t) + \overline{f}(t), \tag{1}$$

$$\overline{u}(0) = \overline{u}_0, \tag{2}$$

где $B,\ A$ — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $E_1,\ E_2$ — банаховы пространства; $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1,\ \ D(B) \subset D(A)$; $\overline{u}(t)$ — вектор-функция размерности s, каждая компонента которой является функцией со значениями в E_1; $\overline{f}(t)$ — вектор-функция размерности s, каждая компонента которой является функцией со значениями в E_2; под записью $A\overline{u}(t)$ (или $B\dot{\overline{u}}(t)$) понимается вектор-функция с компонентами $Au_\nu(t)$ (или $B\dot{u}_\nu(t)$), $\nu = 1, \ldots, s$; M, Λ — квадратные матрицы порядка s.

Задачи вида (1), (2) для одного уравнения

$$B\dot{u}(t) = Au(t) + f(t), \tag{3}$$

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

[1]Баренблатт Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // ПММ. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 58–73.

[2]Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // АН СССР, Ин-т математики. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

[3]Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов и др. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

в разное время и в разных постановках исследовались В.А. Треногиным[4], Н.А. Сидоровым, Б.В. Логиновым[5], Г.А. Свиридюком[6], А.И. Прилепко[7], С.Г. Крейном[8], И.В. Мельниковой[9], Г.А. Куриной, А.И. Кожановым[10], Г.В. Демиденко, С.В. Успенским[11], А.И. Янушаускасом[12] и их учениками.

В конечномерном случае в качестве операторов A и B рассматриваются матрицы, $u(t)$, $f(t)$ — вектор-функции и задача (3), (4) оказывается задачей Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большой вклад в развитие теории и численных методов решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений внес Ю.Е. Бояринцев[13] и его ученики В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова[14], М.В. Булатов.

Если исследованию разрешимости задачи Коши (3), (4) посвящено большое количество работ, то про задачу (1), (2) такого сказать нельзя, хотя встречаются начально-краевые задачи прикладного характера, которые редуцируются именно к таким задачам (например, задача о колебаниях в молекулах ДНК[15]).

Работа посвящена построению матричных фундаментальных оператор-функций, с помощью которых строятся обобщенные в смысле Соболева–Шварца решения и определяются условия существования класси-

[4]Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[5]Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 548 p.

[6]Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[7]Прилепко А.И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I / А.И. Прилепко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560–1571.

[8]Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховых пространствах / С.Г. Крейн. — М.: Физматлит, 1971. — 104 с.

[9]Иванов В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. — М.: Физматлит, 1995. — 384 с.

[10]Kozhanov A.I. Composity Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. — Utrecht: VSP, 1999.

[11]Демиденко Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[12]Янушаускас А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений / А.И. Янушаускас. — Новосибирск: Наука, 1979. — 190 с.

[13]Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.

[14]Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

[15]Chen G. Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations / G. Chen, H. Zhang // Math. Meth. Appl. Sci. — 2004. — Vol. 27. — P. 497–518.

ческих решений. Под классическим решением понимается функция $\overline{u}(t)$ класса $C^1(E_1)$. Заметим, что вполне завершенная теория обобщенных решений вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, созданная С.Т. Завалищиным и А.Н. Сесекиным[16], не допускает прямого обобщения на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, поэтому и возникла необходимость применения соответствующей теории по построению обобщенных решений вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Построение обобщенных решений возможно двумя способами. Первый способ заключается в построении обобщенного решения в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих путем непосредственного восстановления обеих частей, однако вопрос о единственности построенного решения остается открытым. Эту проблему полностью решает способ построения обобщенных решений, разработанный на кафедре математического анализа ИМЭИ ИГУ М.В. Фалалеевым[17]. Основным инструментом этого подхода является фундаментальная оператор-функция, соответствующая сингулярному дифференциальному оператору. При таком подходе обобщенное решение получается в виде свертки фундаментальной оператор-функции с правой частью уравнения — свободной функцией. Учет свойств операторных и матричных пучков в системе (1) осуществляется с помощью матричной фундаментальной оператор-функции.

Целью работы является построение матричных фундаментальных оператор-функций для различных типов систем вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, получение на их основе обобщенных решений рассматриваемых задач и исследование связи между обобщенными и классическими решениями.

Достичь поставленной цели удалось комбинированием идей Треногина–Сидорова, Свиридюка с методами теории матриц.

Методы исследования. В работе использована теория фундаментальных оператор-функций вырожденных дифференциальных операторов в банаховых пространствах, теория жордановых наборов фредгольмовых и нетеровых операторов, теория полугрупп операторов с ядра-

[16] Завалищин С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

[17] Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 548 p.

ми, теория псевдообращения линейных операторов, а также сведения из функционального анализа и теории матриц.

Научная новизна. В диссертационной работе результаты, полученные ранее М.В. Фалалеевым и Е.Ю. Гражданцевой для одного уравнения, перенесены на системы вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах как в обыкновенных, так и в частных производных и проиллюстрированы примерами.

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертации получены результаты теоретического характера, они имеют существенное значение для теории дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно старшей производной, в банаховых пространствах.

Построенные в диссертации матричные фундаментальные оператор-функции для системы уравнений позволят записать в замкнутой форме ее обобщенное решение, принадлежащее классу распределений с ограниченным слева носителем, доказать единственность такого решения, а также определить условия существования классического решения исходной задачи, избегая непосредственного его построения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании задач прикладного характера.

Результаты диссертации могут быть включены в спецкурсы для студентов-математиков ИМЭИ ИГУ и использоваться студентами и аспирантами кафедры математического анализа ИГУ при написании курсовых, дипломных работ и кандидатских диссертаций.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках основных плановых тем ИГУ:

- Федеральная целевая программа (Минобразования) "Интеграция науки и высшего образования России". Развитие научных исследований "Учебно-научным центром фундаментального естествознания" (2002–2006 гг.);

- "Развитие исследований в области естественных наук в рамках основных научных направлений" (Иркутский государственный университет) (2006–2008 гг.);

- "Сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах специального вида" (Грант для поддержки НИР аспирантов и молодых сотрудников ИГУ, № темы 111-02-000/7-02) (2007 г.);
- "Алгоритмический анализ сингулярных моделей: идентификация, регуляризованные приближенные методы и приложения" (Федеральное агентство по образованию, №091-08-102) (с 2008 г.).

Апробация работы.

Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: ежегодные научно-теоретические конференции молодых учёных ИГУ (г. Иркутск, 2004, 2005, 2006, 2007), ежегодные конференции ИДСТУ СО РАН "Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий" (г. Иркутск, 2004, 2007), IV и V Всесибирские Конгрессы женщин-математиков (г. Красноярск, 2006, 2008), Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006), I и II Международные научно-технические конференции "Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем" (г. Пенза, 2006, 2007), Всероссийская научная конференция "Математика. Механика. Информатика" (г. Челябинск, 2006), III Межвузовская зональная конференция, посвященная памяти профессора Б.А. Бельтюкова "Математика и проблемы ее преподавания в вузе" (г. Иркутск, 2007), Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (г. Новосибирск, 2007), I Международная научно-техническая конференция молодых специалистов, аспирантов и студентов "Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем" (г. Пенза, 2007), IX Международная Четаевская конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", посвященная 105-летию Н.Г. Четаева (г. Иркутск, 2007), III-я Международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященная 85-летию Л.Д. Кудрявцева (г. Москва, 2008), Школа-семинар "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (г. Иркутск, 2008), а также на семинаре кафедры уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета (г. Челябинск) под руководством профессора Г.А. Свиридюка и систематически докладывались на семинаре кафедры математического анализа Института математики, экономики и информатики ИГУ под руководством профессора Н.А. Сидорова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 24 работы. Список основных публикаций приведен в конце автореферата, из которых [1] входит в список журналов, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов кандидатских и докторских диссертаций по математике.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав и списка литературы. Работа изложена на 154 страницах. Библиографический список содержит 103 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблеме.

Первая глава содержит вспомогательные результаты и определения.

В разделе 1.1 изложены необходимые сведения о жордановых наборах фредгольмовых и нетеровых операторов.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства; B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2; $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$; оператор B необратим.

Если оператор B фредгольмов, то дополнительно предполагается, что:

A) $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\{\varphi_i,\, i = 1, \dots, n\}$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i,\, i = 1, \dots, n\}$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i \in E_1^*,\, i = 1, \dots, n\}$, $\{z_i \in E_2,\, i = 1, \dots, n\}$ — соответствующие биортогональные системы элементов, т.е. $\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_j \rangle = \langle z_i, \psi_j^{(1)} \rangle = \delta_{ij}, \quad i,\, j = 1, \dots, n$;

B) оператор B имеет *полный A-жорданов набор*, состоящий из элементов $\varphi_i^{(k)}$, $(i = 1, \dots, n,\, k = 1, \dots, p_i)$ таких, что $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$, $\varphi_i^{(k)} \in E_1$, $i = 1, \dots, n$, $k = 2, \dots, p_i$, и имеют место соотношения

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k)} = A\varphi_i^{(k-1)}, \quad i = 1, \dots, n,\ k = 2, \dots, p_i,$$

$$\det \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j \rangle \neq 0, \quad i,\, j = 1, \dots, n.$$

Если оператор B нетеров, то накладываются следующие предположения:
C) $\dim\, N(B) = n$, $\dim\, N(B^*) = m$, $n \neq m$, $\{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i \in E_1^*,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\{z_j \in E_2,\ j = 1, \ldots, m\}$ — соответствующие биортогональные системы элементов, т.е. $\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$, $\langle z_k, \psi_j^{(1)} \rangle = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \ldots, m$;
D) существуют элементы $\varphi_i^{(k)}$, $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i)$, составляющие *полный A-жорданов набор* оператора B, т.е.

$$B\varphi_i^{(k)} = A\varphi_i^{(k-1)}, \quad i = 1, \ldots, n,\ k = 2, \ldots, p_i,$$

$$\mathrm{rank}\ \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle = \min\,(m, n) = l, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

В разделе 1.2 приведены сведения из теории матриц и матричных пучков.

Пусть Λ — числовая матрица, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ — ее характеристические числа. Тогда существует невырожденная матрица T порядка s такая, что

$$\Lambda = T \cdot J \cdot T^{-1}, \tag{5}$$

где

$$J = \mathrm{diag}\ \left\{\lambda_1 I_{q_1} + H_{q_1},\ \lambda_2 I_{q_2} + H_{q_2},\ \ldots,\ \lambda_\mu I_{q_\mu} + H_{q_\mu}\right\} -$$

квазидиагональная матрица, $\lambda_i I_{q_i} + H_{q_i}$ — жорданова клетка порядка q_i, $q_1 + q_2 + \ldots + q_\mu = s$. J называется нормальной жордановой формой матрицы Λ.

Если все элементарные делители Λ первой степени, то жорданова форма имеет диагональный вид и в этом случае

$$\Lambda = T \cdot \mathrm{diag}\ \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s\} \cdot T^{-1}.$$

В разделе 1.3 приведены основные определения и сведения из теории обобщенных функций в банаховых пространствах, введено определение матричной фундаментальной оператор-функции дифференциального оператора.

Рассмотрим матричный дифференциальный оператор вида

$$B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t),$$

где B, A — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$; Λ — квадратная матрица порядка s. Под записью $B\delta'(t)$ понимается $I_s B\delta'(t)$, где I_s — единичная матрица порядка s.

Определение 1. *Матричной фундаментальной оператор-функцией* $\mathcal{E}(t)$ *для дифференциального оператора* $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ *на классе* $K'_+(E_2)$ *назовем такую матричную оператор-функцию, для которой выполняются следующие два равенства:*

$$(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * \widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(t) \quad \forall\, \widetilde{u}(t) \in K'_+(E_2)$$

и

$$\mathcal{E}(t) * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \widetilde{v}(t) = \widetilde{v}(t) \quad \forall\, \widetilde{v}(t) \in K'_+(E_1).$$

Здесь под $\widetilde{u}(t) \in K'_+(E_2)$ (или $\widetilde{v}(t) \in K'_+(E_1)$) понимается вектор-столбец, каждая компонента которого является обобщенной функцией с ограниченным слева носителем со значениями в E_2 (или E_1).

Эффективность введения такого понятия объясняется следующей леммой.

Лемма 1. Если $\mathcal{E}(t)$ — матричная фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$, то сверточное уравнение

$$(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \widetilde{u}(t) = \widetilde{h}(t)$$

при любой правой части $\widetilde{h}(t) \in K'_+(E_2)$ имеет единственное решение в классе $K'_+(E_1)$ вида

$$\widetilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \widetilde{h}(t).$$

В этом же разделе построены матричные фундаментальные оператор-функции для дифференциального оператора $I\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ с ограниченным оператором A и для дифференциального оператора $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ с непрерывно обратимым оператором B.

Для дифференциального оператора $MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ определение 1 и лемма 1 формулируются и доказываются аналогично.

Во **второй главе** исследуются сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В разделе 2.1 при различных условиях на операторы A, B рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$B\dot{\overline{u}}(t) = \Lambda A\overline{u}(t) + \overline{f}(t), \tag{6}$$

$$\overline{u}(0) = \overline{u}_0, \tag{7}$$

где $\overline{u}(t)$, $\overline{f}(t)$ — вектор-функции размерности s, компоненты которых $u_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_1, а $f_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_2, $\nu = \overline{1,\ldots,s}$; B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2; $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$; оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$; под записью $A\overline{u}(t)$ (или $B\dot{\overline{u}}(t)$) понимается вектор-функция с компонентами $Au_\nu(t)$ (или $B\dot{u}_\nu(t)$), $\nu = 1,\ldots,s$; Λ — невырожденная квадратная матрица порядка s.

В разделе 2.1.1 построена матричная фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ в случае, когда оператор B фредгольмов. Приведем одну из теорем этого раздела.

Теорема 1. Пусть в системе (6) $\det \Lambda \neq 0$ и выполнены условия A), B), тогда дифференциальный оператор $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}(t) = T\delta(t) * \operatorname{diag}\left\{E_1(t),\, E_2(t),\, \ldots,\, E_\mu(t)\right\} * T^{-1}\delta(t),$$

где T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (5), $\operatorname{diag}\left\{E_1(t),\, E_2(t),\, \ldots,\, E_\mu(t)\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида

$$\begin{pmatrix} E_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E_\mu(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

диагональные блоки которой $E_\nu(t) = I_{q_\nu}\mathcal{E}_\nu(t) * \sigma(\mathcal{E}_\nu(t))$ являются верхнетреугольными квадратными матрицами порядка q_ν,

$$\sigma(\mathcal{E}_\nu(t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t) & (A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))^2 & \ldots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))^{q_\nu - 1} \\ 0 & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t) & \ldots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))^{q_\nu - 2} \\ 0 & 0 & I\delta(t) & \ldots & (A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))^{q_\nu - 3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I\delta(t) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$\nu = 1, \ldots, \mu$, и

$$\mathcal{E}_\nu(t) = \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle\lambda_\nu^{-k-1}\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right].$$

Здесь и далее $\left\{\psi_i^{(j)},\, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A^*-жорданов набор оператора B^*; Γ — оператор Треногина–Шмидта[18];

$$(A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))^l = \underbrace{(A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t)) * \cdots * (A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t))}_{l},\ l = 1, \ldots, q_\nu - 1.$$

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то матричная фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора $B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ вид

$$\mathcal{E}(t) = T\delta(t) * \mathrm{diag}\,\left\{\mathcal{E}_1(t),\, \mathcal{E}_2(t),\, \ldots,\, \mathcal{E}_s(t)\right\} * T^{-1}\delta(t).$$

Далее с помощью матричной фундаментальной оператор-функции находится обобщенное решение исследуемой системы и условия, при которых обобщенное решение окажется классическим.

Следствие 2. В условиях теоремы 1 задача Коши (6), (7) имеет единственное обобщенное решение класса $K'_+(E_1)$, которое находится по формуле

$$\widetilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \left(\overline{f}(t)\theta(t) + B\overline{u}_0\delta(t)\right). \tag{10}$$

В случае, когда элементарные делители матрицы Λ первой степени, формула (10) принимает вид

$$\widetilde{u}(t) = T\widetilde{w}(t),$$

где при $\nu = 1, \ldots, s$

$$\widetilde{w}_\nu(t) = -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^{\nu}\lambda_\nu^{k-j}\varphi_i^{(k+1-j)}\right\}\delta^{(p_i-1-k)}(t)\right] + \Big(w_\nu^0 +$$

[18]Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}^{\nu}\lambda_\nu^{p_i-j}\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}^{\nu}(t)\lambda_\nu^{j-1}\varphi_i^{(j)}+\int\limits_0^t \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma(t-\tau)}\times$$

$$\times\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\Big(\lambda_\nu A w_\nu^0+g_\nu(\tau)\Big)\,d\tau\Big)\theta(t);$$

$$\overline{w}^0=T^{-1}\overline{u}_0,\quad \overline{g}(t)=T^{-1}\overline{f}(t),$$

$$\xi_{ij}^{\nu}(t)=-\sum_{k=0}^{p_i-j}\frac{1}{\lambda_\nu^{k+j}}\left\langle g_\nu^{(k)}(t)-g_\nu^{(k)}(0),\psi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\rangle,$$

$$c_{ij}^{\nu}=-\frac{1}{\lambda_\nu^{p_i+1-j}}\left\langle\lambda_\nu A w_\nu^0+g_\nu(0),\psi_i^{(j)}\right\rangle-\frac{1}{\lambda_\nu^{p_i+2-j}}\left\langle g_\nu'(0),\psi_i^{(j-1)}\right\rangle-$$

$$-\cdots-\frac{1}{\lambda_\nu^{p_i}}\left\langle g_\nu^{(j-1)}(0),\psi_i^{(1)}\right\rangle,\quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,p_i.$$

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1, все элементарные делители матрицы Λ первой степени, входные данные задачи $\overline{u}_0$ и $\overline{f}(t)$ таковы, что $c_{ij}^{\nu}=0$ $(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,p_i,\ \nu=1,\ldots,s)$. Тогда обобщенное решение (10) задачи Коши (6), (7) окажется классическим и имеет вид

$$\overline{u}(t)=T\overline{w}(t),$$

где при $\nu=1,\ldots,s$

$$w_\nu(t)=w_\nu^0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}^{\nu}(t)\lambda_\nu^{j-1}\varphi_i^{(j)}+$$

$$+\int\limits_0^t \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma(t-\tau)}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\Big(\lambda_\nu A w_\nu^0+g_\nu(\tau)\Big)\,d\tau.$$

В разделе 2.1.2 исследуется случай, когда оператор B нетеров. Сформулированы и доказаны две теоремы о виде матричной фундаментальной оператор-функции, соответствующие положительному $(n>m)$ и отрицательному $(n<m)$ значениям индекса оператора B, построены обобщенные решения задачи Коши (6), (7) и получены условия существования классических решений в обоих случаях. Показано, что при положительном индексе обобщенное решение является многопараметрическим, содержащим произвольные функции и свободные параметры.

Доказано, что все свободные параметры входят в сингулярную составляющую решения, а произвольные функции — в регулярную составляющую. При отрицательном индексе обобщенное решение принадлежит подклассу обобщенных функций из $K'_+(E_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{diag}\ \left\{\sigma_1^r(t),\, \sigma_2^r(t),\, \ldots,\, \sigma_\mu^r(t)\right\} * \widetilde{u}(t) = 0, \quad r = n+1, \ldots, m,$$

где $\operatorname{diag}\ \left\{\sigma_1^r(t),\, \sigma_2^r(t),\, \ldots,\, \sigma_\mu^r(t)\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s с диагональными блоками верхнетреугольного типа

$$\sigma_\nu^r(t) = I_{q_\nu} \left\langle e^{\lambda_\nu AB^+ t} \cdot, \psi_r \right\rangle z_r \theta(t) * \sigma(\mathcal{F}_\nu(t)), \quad \nu = 1, \ldots, \mu.$$

Здесь B^+ — псевдообратный оператор[19], $\sigma(\mathcal{F}_\nu(t))$ определяется по формуле (9), в которой $\mathcal{E}_\nu(t)$ заменяются на $\mathcal{F}_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, \mu$. Оператор-функции $\mathcal{F}_\nu(t)$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{F}_\nu(t) = B^+ e^{\lambda_\nu AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \lambda_\nu^{-k-1} \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right].$$

В разделах 2.1.3–2.1.5 понятие матричной фундаментальной оператор-функции переносится на случаи, когда размерность ядра оператора B или длины A-жордановых цепочек бесконечны. В этих пунктах соответственно рассмотрены случаи (в терминологии профессора Г.А. Свиридюка[20]) спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка $B - \mu A$. В каждом из трех случаев построены обобщенные решения задачи Коши (6), (7) с помощью соответствующей матричной фундаментальной оператор-функции и определены условия существования классических решений.

В разделе 2.2 результаты, полученные для систем дифференциальных уравнений первого порядка, обобщаются на системы дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$B\overline{u}^{(N)}(t) = \Lambda A \overline{u}(t) + \overline{f}(t). \tag{11}$$

[19] Nashed M.Z. Generalized Inverses and Applications / M.Z. Nashed. — New York: Academy Press. — 1976.

[20] Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003.

Как и в разделе 2.1 здесь рассматриваются случаи, когда оператор B фредгольмов, нетеров, а также случаи спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка $B - \mu A$. В каждом из них построена матричная фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора $B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)$.

Приведем результат для случая спектральной ограниченности операторного пучка $\mu B - A$.

Оператор A называется *спектрально ограниченным относительно* оператора B, если $\exists\ a > 0$ такое, что при любом $|\mu| > a$ оператор $\mu B - A$ непрерывно обратим. Пусть $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}(\mu B - A)^{-1}B\,d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}B(\mu B - A)^{-1}\,d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \mathrm{im}\ P$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \mathrm{im}\ Q$. Действия операторов B и A расщепляются, обозначим через $B_k(A_k)$ сужение оператора $B(A)$ на E_1^k $(k = 0, 1)$. Тогда $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$.

Теорема 3. Пусть в системе (11) $\det \Lambda \neq 0$, оператор A спектрально ограничен относительно оператора B. Тогда дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{G}_N(t) = T\delta(t) * \mathrm{diag}\left\{G_{N_1}(t),\, G_{N_2}(t),\, \ldots,\, G_{N_\mu}(t)\right\} * T^{-1}\delta(t).$$

Здесь T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (5), $\mathrm{diag}\left\{G_{N_1}(t),\, G_{N_2}(t),\, \ldots,\, G_{N_\mu}(t)\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида (8), диагональные блоки $G_{N_\nu}(t)$ имеют вид $G_{N_\nu}(t) = I_{q_\nu}\mathcal{G}_{N_\nu}(t) * \sigma(\mathcal{G}_{N_\nu}(t))$, где $\sigma(\mathcal{G}_{N_\nu}(t))$ определяется по формуле (9), в которой $\mathcal{E}_\nu(t)$ заменяются на $\mathcal{G}_{N_\nu}(t)$ $(\nu = 1, \ldots, \mu)$. При этом

$$\mathcal{G}_{N_\nu}(t) = \mathcal{U}_{N_\nu}(t)B_1^{-1}Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}}A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(Nk)}(t),$$

где

$$\mathcal{U}_{N_\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \left(\mu^N B - \lambda_\nu A\right)^{-1} Be^{\mu t}\,d\mu.$$

Если дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$ (т.е. $\exists\ p \in \{0\} \cup N$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq 0$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv 0$), то очевидно

$$\mathcal{G}_{N_\nu}(t) = \mathcal{U}_{N_\nu}(t)B_1^{-1}Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{p}\frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}}A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(Nk)}(t).$$

Третья глава посвящена сингулярным системам дифференциальных уравнений в частных производных в банаховых пространствах.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 с плотными областями определения, оператор B необратим, Λ — невырожденная квадратная матрица порядка s.

В разделе 3.1 рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$B\mathcal{D}^\alpha\overline{u}(\overline{x}) = \Lambda A\overline{u}(\overline{x}) + \overline{f}(\overline{x}).$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)$ — мультииндекс, т.е. целочисленный M-мерный вектор с неотрицательными координатами α_i, $\overline{x} \in R^M$, под записью $A\overline{u}(\overline{x})$ (или $B\mathcal{D}^\alpha\overline{u}(\overline{x})$) понимается вектор-функция с компонентами $Au_\nu(\overline{x})$ (или $B\mathcal{D}^\alpha u_\nu(\overline{x})$), $\nu = 1, \ldots, s$,

$$\mathcal{D}^\alpha u_\nu(\overline{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}u_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_M)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_M^{\alpha_M}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_M.$$

В разделе 3.2 исследуется система дифференциально-разностных уравнений вида

$$B\frac{\partial^N\overline{u}}{\partial t^N} = \Lambda A\left(\overline{u}(t, \overline{x} - \overline{\mu}) - \overline{u}(t, \overline{x})\right) + \overline{f}(t, \overline{x}). \tag{12}$$

В каждом разделе этой главы рассмотрены случаи, когда оператор B фредгольмов, нетеров или обладает спектральной, секториальной или радиальной ограниченностью.

Приведем один из результатов раздела 3.2.

Системе уравнений (12) соответствует дифференциально-разностный оператор

$$\mathcal{L}_N(\delta(t), \delta(\overline{x})) = B\delta^{(N)}(t) \cdot \delta(\overline{x}) - \Lambda A\delta(t) \cdot (\delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))\,.$$

Если оператор B нетеров, то справедливы следующие две теоремы:

Теорема 4. Пусть в системе (12) $\det \Lambda \neq 0$, выполнены условия C), D) и $n > m$. Тогда дифференциально-разностный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t), \delta(\overline{x}))$ имеет на классе $K'(R^1_+ \otimes R^M; E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{F}_N(t, \overline{x}) = T\delta(t) \cdot \delta(\overline{x}) *$$
$$*\mathrm{diag}\left\{F_{N_1}(t, \overline{x}),\, F_{N_2}(t, \overline{x}),\, \ldots,\, F_{N_r}(t, \overline{x})\right\} * T^{-1}\delta(t) \cdot \delta(\overline{x}).$$

Здесь T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (5), $\mathrm{diag}\left\{F_{N_1}(t, \overline{x}),\, F_{N_2}(t, \overline{x}),\, \ldots,\, F_{N_r}(t, \overline{x})\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида (8), диагональные блоки $F_{N_\nu}(t, \overline{x})$ являются верхнетреугольными квадратными матрицами порядка q_ν вида $F_{N_\nu}(t, \overline{x}) = I_{q_\nu}\mathcal{F}_{N_\nu}(t, \overline{x}) * \sigma(\mathcal{F}_{N_\nu}(t, \overline{x}))$, где $\sigma(\mathcal{F}_{N_\nu}(t, \overline{x}))$ определяется формулой (9), в которой свертка $A\delta(t) * \mathcal{E}_\nu(t)$ заменяется на $A\delta(t)\Delta_\mu\delta(\overline{x}) * \mathcal{F}_{N_\nu}(t, \overline{x})$, $\nu = 1, \ldots, r$. Здесь

$$\mathcal{F}_{N_\nu}(t, \overline{x}) = B^+ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_\nu A B^+)^{k-1} \frac{t^{Nk-1}}{(Nk-1)!} \times$$
$$\times \left[I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i - j + 1)} \right] \theta(t) \cdot (\Delta_\mu \delta(\overline{x}))^{k-1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i - 1} (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \lambda_\nu^{-k-1} \varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \right\} \delta^{(kN)}(t) \cdot \mathcal{B}_{k+1}(\overline{x}) \right]$$

и введены обозначения

$$\Delta_\mu \delta(\overline{x}) = \delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x}),$$
$$(\Delta_\mu \delta(\overline{x}))^k = \underbrace{(\delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x})) * \cdots * (\delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))}_{k} =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l \delta(\overline{x} - l\overline{\mu}),$$

$$\mathcal{B}_{k+1}(\overline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l}^{k}\delta(\overline{x} - l\overline{\mu}), \quad (\delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^0 = \mathcal{B}_0(\overline{x}) = \delta(\overline{x}).$$

Теорема 5. Пусть в системе (12) $\det \Lambda \neq 0$, выполнены условия C), D) и $n < m$. Тогда матричная оператор-функция $\mathcal{F}_N(t, \overline{x})$ из теоремы 4 является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t), \delta(\overline{x}))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R_+^1 \otimes R^M; E_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{diag}\ \left\{\sigma_{N_1}^r(t,\overline{x}),\, \sigma_{N_2}^r(t,\overline{x}),\, \ldots,\, \sigma_{N_\mu}^r(t,\overline{x})\right\} * \widetilde{\overline{u}}(t,\overline{x}) = 0, \quad r = n+1, \ldots, m,$$

где $\mathrm{diag}\ \left\{\sigma_{N_1}^r(t,\overline{x}),\, \sigma_{N_2}^r(t,\overline{x}),\, \ldots,\, \sigma_{N_\mu}^r(t,\overline{x})\right\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s с диагональными блоками

$$\sigma_{N_\nu}^r(t,\overline{x}) = I_{q_\nu}\Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_\nu A B^+)^{k-1} \frac{t^{Nk-1}}{(Nk-1)!} \cdot, \psi_l \Big\rangle z_l \theta(t) \cdot$$
$$\cdot\, (\delta(\overline{x} - \overline{\mu}) - \delta(\overline{x}))^k * \sigma(\mathcal{F}_{N_\nu}(t,\overline{x})), \quad \nu = 1, \ldots, \mu,$$

представление для $\sigma(\mathcal{F}_{N_\nu}(t,\overline{x}))$ см. в теореме 4.

В **четвертой главе** исследуется задача Коши для системы дифференциальных уравнений специального вида

$$MB\overline{u}^{(N)}(t) = \Lambda A\overline{u}(t) + \overline{f}(t),$$
$$\overline{u}(0) = \overline{u}_0,\ \overline{u}'(0) = \overline{u}_1,\ \ldots,\ \overline{u}^{(N-1)}(0) = \overline{u}_{N-1},$$

где $\overline{u}(t)$, $\overline{f}(t)$ — вектор-функции размерности s, компоненты которых $u_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_1, а $f_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_2, $\nu = 1, \ldots, s$; B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$; оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор A непрерывно обратим. Под записью $A\overline{u}(t)$ понимается вектор-функция с компонентами $Au_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, s$; M, Λ — квадратные матрицы порядка s, $\det M = 0$, $\det \Lambda \neq 0$.

Пусть матричный пучок $\mu M - \Lambda$ регулярен.

Определение 2[21]**.** Пучок матриц $\mu M - \Lambda$ называется *регулярным*, если 1) M и Λ — квадратные матрицы одного и того же порядка и 2) $\det\,(\mu M - \Lambda) \not\equiv 0$.

[21] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

Утверждение 1 [там же]. Если пучок матриц регулярен, то существуют невырожденные матрицы P и Q порядка s такие, что

$$P(\mu M - \Lambda)Q = \mu \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & I_{s-q} \end{pmatrix},$$

где I_q и I_{s-q} — единичные матрицы соответствующих порядков, L — матрица жордановой структуры порядка q, $H = \mathrm{diag}\ \{H_1, H_2, \ldots, H_i\}$, H_j — жордановы нильпотентные блоки порядка m_j, у которых элементы первой "наддиагонали" равны единице, а все остальные элементы равны нулю: $H_j^{m_j} = 0$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_j = s - q$, $j = 1, \ldots, i$.

В диссертации полностью исследован случай $H = 0$. Это означает, что матрица M не имеет Λ-присоединенных векторов.

При некоторых дополнительных предположениях, опираясь на результаты второй главы, построены матричные фундаментальные оператор-функции для дифференциального оператора $MB\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)$ в случаях вырождения операторного пучка $B - \mu A$, которые были перечислены выше.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построены матричные фундаментальные оператор-функции для вырожденных систем дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах в случаях фредгольмова или нетерова оператора при производной, а также в условиях спектральной, секториальной или радиальной ограниченности операторного пучка. В каждом из них получены обобщенные решения в классе распределений с ограниченным слева носителем и условия существования классических решений.

2. Для регулярного матричного пучка в тех же случаях вырождения операторного пучка, что и в п. 1, построены матричные фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов N-порядка, дифференциальных операторов в частных производных и дифференциально-разностных операторов.

3. На основе полученных результатов исследована разрешимость в классе распределений задачи Коши–Дирихле для системы дифференциальных уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной и для линеаризованной системы дифференциальных уравнений, описывающей колебательные процессы в молекуле ДНК.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Фалалеев М.В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, О.В. Коробова // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 916–927.

2. Коробова О.В. Задача Коши для вырожденного дифференциально-разностного уравнения первого порядка в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири: сб. науч. тр. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2005. — С. 218–226.

3. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений с матрицей и фредгольмовым оператором при производной в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. статей I Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов. — Пенза, 2006. — С. 34–37.

4. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Математика. Механика. Информатика. Тез. докл. Всерос. науч. конф. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. — С. 72.

5. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений специального вида с фредгольмовым оператором при производной в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Вестник Иркутского ун-та: материалы ежегод. науч.-теорет. конф. молодых ученых. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. — С. 105–107.

6. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений специального вида в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рожд. И.Н. Векуа: Тез. докл. — Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. — С. 206–207.

7. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах / О.В. Коробова

// Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Тр. IX Междунар. Четаевской конф., посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. — Иркутск, 2007. — Том 5. — С. 138–144.

8. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений с нетеровым оператором при производной в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Известия Иркутского ун-та, серия «Математика». — Иркутск: Изд-во Ирк. гос. ун-та, 2007. — Том 1. — С. 132–140.

9. Коробова О.В. Матричная фундаментальная оператор-функция дифференциально-разностного оператора в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий. — Иркутск, 2007. — С. 15.

10. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциально-разностных уравнений с фредгольмовым оператором при производной в банаховых пространствах / О.В. Коробова // V Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конф. — Красноярск: РИО СФУ, 2008. — С. 227–231.

11. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений высокого порядка в банаховых пространствах / О.В. Коробова // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: Тез. докл. 3-й Междунар. конф., посвященной 85-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева. — М.: МФТИ, 2008. — С. 281–282.

12. Фалалеев М.В. Обобщенное решение системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, О.В. Коробова // Вестник Иркутского регионального отд-ния Академии наук Высшей школы России. Научный и общественно-информационный журнал. — Иркутск: Ирк. региональное отд-ние Академии наук высш. школы, 2008. — С. 180–186.