На правах рукописи

ПОГОДАЕВ НИКОЛАЙ ИЛЬИЧ

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ГУРСА-ДАРБУ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ И ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЯМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН **Толстоногов Александр Александрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Тонков Евгений Леонидович**
	кандидат физико-математических наук, доцент **Терлецкий Виктор Анатольевич**
Ведущая организация:	**Институт математики и механики УрО РАН** (г. Екатеринбург)

Защита состоится 25 июня 2009 г. в 14.00 ч. на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 при Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 22 мая 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В связи с развитием современной науки и техники все чаще возникают задачи управления и оптимизации в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных. В теории управления такие системы называют системами с распределенными параметрами, а управления, зависящие от нескольких независимых переменных — распределенными управлениями. Помимо распределенных управлений представляется важным как с теоретической, так и с практической точки зрения рассматривать сосредоточенные управления, входящие в граничные условия дифференциальных уравнений (так называемые граничные управления).

Анализ работ, посвященных качественным свойствам систем с распределенными параметрами, показал, что к настоящему моменту хорошо изучены лишь системы с выпуклыми ограничениями на управления. При исследовании вопросов существования решений задач оптимального управления в литературе также рассматривались большей частью выпуклые задачи, т.е. задачи, в которых подынтегральные функции выпуклы по управлениям, а сами управления подчинены выпуклым ограничениям.

Поэтому в настоящее время в качественной теории управляемых систем с распределенными параметрами является актуальным

1) исследовать задачи как с распределенным, так и с граничными управлениями;

2) исследовать системы с невыпуклыми ограничениями на управления и невыпуклые задачи оптимального управления.

Общепризнанно, что изучение управляемых систем с распределенными параметрами является значительно более сложной задачей по сравнению с аналогичной проблемой для обыкновенных дифференциальных уравнений. Причинами этого являются, в частности, разнообразие классов уравнений с частными производными и типов начально-краевых условий, а также необходимость перехода к обобщенным решениям. В связи с этим бóльшая часть работ направлена на исследование конкретных управляемых систем.

Пусть $I_1 = [0, a]$, $I_2 = [0, b]$ $(a, b > 0)$; $\Omega = I_1 \times I_2$; $X = \mathbb{R}^n$; $Y = \mathbb{R}^m$. В диссертации изучается управляемая система Дарбу

$$z_{xy} = c_1(x, y, z)z_x + c_2(x, y, z)z_y + f(x, y, z, u) \qquad (1)$$

с граничными условиями на характеристиках (условиями Гурса)

$$z(x,0) = \varphi_1(x) + \int\limits_0^x u^1(t)\,dt, \quad z(0,y) = \varphi_2(y) + \int\limits_0^y u^2(s)\,ds, \tag{2}$$

где $(x,y) \in \Omega$, $z \in X$; $u \in Y$ — распределенное, $u^1, u^2 \in X$ — граничные управления. Предполагается, что управления подчинены невыпуклым смешанным ограничениям, т.е. ограничениям, зависящим от фазовой переменной z:

$$\begin{gathered} u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)), \\ u^1(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, — непрерывные операторы, действующие из пространства непрерывных функций двух переменных в пространство непрерывных функций одной переменной, а U, U_1, U_2 — многозначные отображения с невыпуклыми замкнутыми значениями.

Выбор в качестве объекта исследования именно этой задачи был продиктован двумя причинами. Во-первых, практической значимостью уравнения Гурса-Дарбу, которое описывает, например, процессы хроматографии, сорбции и десорбции газов, процессы сушки и др.[1,2] Во-вторых, новизной, связанной с одновременным рассмотрением распределенного и граничных управлений, подчиненных смешанным ограничениям.

Целью работы является изучение вопросов существования решений управляемой системы (1)–(3), анализ топологической структуры множества решений (компактность, плотность, граничность и др.), использование полученных результатов для исследования задачи минимизации интегрального функционала

$$\begin{gathered} J(z,u,u^1,u^2) = \int_\Omega g(x,y,z(x,y),u(x,y))\,dx\,dy + \\ + \int_{I_1} g_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x), u^1(x))\,dx + \int_{I_2} g_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y), u^2(y))\,dy. \end{gathered} \tag{4}$$

[1]Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 2004.

[2]Рачинский В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии / В.В. Рачинский. — М.: Наука, 1964.

на множестве решений системы (1)–(3). При этом предполагается, что подынтегральные функции невыпуклы по управлениям. Поскольку такая задача в рамках сделанных предположений, как правило, не имеет решения, возникает вопрос о построении такого расширения задачи оптимального управления, которое имеет решение.

Существует несколько подходов к понятию расширения задачи оптимального управления. В данной работе использовалось определение расширения, введенное А.Д. Иоффе и В.М. Тихомировым[3].

Пусть V, W — метрические пространства; $\mathcal{I}$ — функционал, определенный на V; $\mathcal{J}$ — функционал, определенный на W. Задачу $\inf\limits_{w\in W}\mathcal{J}(w)$ называют расширением задачи $\inf\limits_{v\in V}\mathcal{I}(v)$, если существует непрерывное отображение $i\colon V\to W$, при котором

(1) $i(V)$ плотно в W;

(2) $\mathcal{J}(i(v))\leqslant\mathcal{I}(v)$ для всех $v\in V$;

(3) для любого $w\in W$ существует последовательность $v_k\in V$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} i(v_k)=w$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{I}(v_k)=\mathcal{J}(w)$.

Вопросами существования решений, топологическими свойствами множеств решений, а также вопросами существования решений в задах оптимального управления системами Гурса-Дарбу занимались многие российские и зарубежные авторы, в том числе В.И. Плотников, В.И. Сумин, А.Н. Витюк, А.А. Толстоногов, С. Марано, А. Брессан, Дж. Теодору, Ф. Флорес, М.Б. Сурьянараяна, Д. Иджак, С. Валжак, М. Мажевский и др. В подавляющем большинстве работ рассматривалась система с распределенным управлением (при отсутствии граничных управлений) и с постоянным ограничением на управление, т.е. ограничением вида $u\in U$.

Методы исследования. Исследования проводились с использованием методов теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории дифференциальных включений, многозначного анализа, теории непрерывных селекторов многозначных отображений с невыпуклыми разложимыми значениями и теории неподвижных точек однозначных и многозначных отображений.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми, имеют теоретический характер и получены автором

[3]Иоффе, А.Д. Расширение вариационных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров // Труды Московского математического общества. — 1968. — Т. 18. — С. 187–246.

самостоятельно.

Новой является сама постановка задачи, поскольку управляемые системы Гурса-Дарбу с распределенным и граничными управлениями, подчиненными смешанным ограничениям, исследуются в данной работе впервые.

Для рассматриваемой управляемой системы при определенных предположениях доказаны теоремы существования решений, теорема плотности и бэнг-бэнг принцип. Доказана теорема существования решения в задаче оптимального управления системой Гурса-Дарбу с невыпуклым по распределенному управлению функционалом. Подобные результаты были получены ранее только для некоторых частных случаев задачи (1)–(3).

Теорема о граничности, необходимые и достаточные условия замкнутости множества решений системы с невыпуклыми ограничениями на управления, а также аналог теоремы Боголюбова (о расширении) для невыпуклой задачи оптимального управления системой Гурса-Дарбу ранее не рассматривались и получены впервые.

В целом в диссертационной работе была сделана попытка перенести основные результаты о структуре множеств решений управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, на систему Гурса-Дарбу. Отметим одну трудность, возникающую на этом пути. Важным условием, необходимым для доказательства таких топологических свойств множества решений, как плотность и граничность, является введенное нами условие единственности для систем со смешанными ограничениями. Для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, условие единственности имеет место, например, если правая часть системы липшицева по состоянию и управлению, а ограничение на управление липшицево по состоянию. В случае системы Гурса-Дарбу, как оказалось, липшицевости недостаточно, и удобного критерия единственности для задачи в общем виде, судя по всему, не существует. С этим связан тот факт, что наиболее тонкие результаты, такие, как теорема о граничности, получены лишь для тех частных случаев рассматриваемой системы, для которых подходящие критерии единственности были найдены.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации являются важным вкладом в качественную теорию управляемых систем с распределенными параметрами. Развитие подхода, использованного в диссертации для распространения ряда известных результатов о структуре множеств решений управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, на системы Гурса-Дарбу, позволит в дальнейшем доказать аналогичные результаты для других классов управляемых систем с распределенными параметрами.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании оптимизационных задач, возникающих при моделировании широкого класса реальных физических, химических и технологических процессов: хроматографии, сушки, сорбции и десорбции газов и др.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Конференция “Теория управления и математическое моделирование”, посвященная 75-летию Удмуртского государственного университета (3-8 июля 2006 г., Ижевск).

- Конференция ИДСТУ СО РАН “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий” (14-15 декабря 2006 г., Иркутск).

- Международная конференция “Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения”, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (28 мая - 2 июня 2007 г., Новосибирск).

- Конференция ИДСТУ СО РАН “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий” (ноябрь 2007 г., Иркутск).

- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и топология”, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (17-22 июня 2008 г., Москва).

- Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (23-30 июля, 2008 г., Иркутск).

- Конференция ИДСТУ СО РАН “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий” (декабрь 2008 г., Иркутск).

Результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН и использовались при выполнении проекта РФФИ (№ 06-01-00247).

Публикации и личный вклад автора. По материалам диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата. В число указанных работ входят статьи [1–3] из “Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК РФ 2008 г.”. Все результаты, вынесенные на защиту, получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Данная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 78 наименований. Общий объем диссертации составляет 135 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введем следующие обозначения: $C(\Omega; X)$ — пространство непрерывных функций $z\colon \Omega \to X$; $L^p(\Omega; X)$ $(1 < p < \infty)$ — пространство функций $u\colon \Omega \to X$, интегрируемых по Лебегу со степенью p; $\mathcal{L}(X; X)$ — пространство непрерывных линейных операторов (матриц) $A\colon X \to X$; $\operatorname{co} E$ — выпуклая оболочка компактного множества $E \subset X$; $\operatorname{ext}\operatorname{co} E$ — совокупность всех крайних (экстремальных) точек множества $\operatorname{co} E$.

Предположения. Всюду в работе предполагаем, что $c_i\colon \Omega \times X \to \mathcal{L}(X; X)$, $i = 1, 2$, — ограниченные функции Каратеодори; $f\colon (\Omega \times X) \times Y \to X$ — функция Каратеодори, удовлетворяющая линейному условию роста по z и u; $U\colon \Omega \times X \to Y$, $U_i\colon I_i \times X \to X$, $i = 1, 2$, — ограниченные многозначные отображения с компактными значениями; $\varphi_i\colon I_i \to X$, $i = 1, 2$, — абсолютно непрерывные функции; $\mathscr{V}_i\colon C(\Omega; X) \to C(I_i; X)$, $i = 1, 2$, — непрерывные операторы. В ряде случаев будем предполагать, что u входит в f линейно, т.е.

$$f(x, y, z, u) = c_3(x, y, z)u + c_4(x, y, z),$$

где $c_3\colon \Omega \times X \to \mathcal{L}(Y; X)$, $c_4\colon \Omega \times X \to X$ — функции Каратеодори, удовлетворяющие линейному условию роста.

Скажем, что многозначное отображение U удовлетворяет *верхним условиям Каратеодори*[4], если

(1) значения U — выпуклые компактные множества,

(2) U совместно измеримо,

(3) $U(x, y, \cdot)$ полунепрерывно сверху для п.в. $(x, y) \in \Omega$;

[4]Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: КомКнига, 2005.

нижним условиям Каратеодори, если

(1) значения U — компактные множества,

(2) U совместно измеримо,

(3) $U(x, y, \cdot)$ полунепрерывно снизу для п.в. $(x, y) \in \Omega$;

и *условиям Каратеодори*, если

(1) значения U — компактные множества,

(2) $U(\cdot, z)$ измеримо для всех $z \in X$,

(3) $U(x, y, \cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу для п.в. $(x, y) \in \Omega$.

Определение 1. *Обобщенным решением системы (1)–(3) назовем такую четверку (z, u, u^1, u^2), $z \in C(\Omega; X)$, $u \in L^p(\Omega; Y)$, $u^1 \in L^p(I_1; X)$, $u^2 \in L^p(I_2; X)$, что для всех (x, y) имеет место равенство*

$$z(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int\limits_0^x u^1(s)\,ds + \int\limits_0^y u^2(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(s,t)\,ds\,dt,$$

где

$$v(x,y) = c_1(x,y,z(x,y))z_x(x,y) + c_2(x,y,z(x,y))z_y(x,y) +$$
$$+ f(x,y,z(x,y),u(x,y))$$

и почти всюду выполняются включения (3).

Множество решений системы (1)–(3) обозначим через $\mathscr{R}$.

Первая глава посвящена вопросам существования решений включений и управляемых систем типа Гурса-Дарбу. Основным результатом первой главы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть U, U_1, U_2 удовлетворяют верхним либо нижним условиям Каратеодори, при этом, если для U выполняются верхние условия Каратеодори, будем дополнительно предполагать, что множество $f(x, y, z, U(x, y, z))$ выпукло для п.в. $(x, y) \in \Omega$ и всех $z \in X$. Тогда*

$$\mathscr{R} \neq \varnothing.$$

Если U, U_1, U_2 удовлетворяют условиям Каратеодори и

$$f(x,y,z,u) = c_3(x,y,z)u + c_4(x,y,z),$$

то существует такое решение $(z,u,u^1,u^2) \in \mathscr{R}$, что

$$\begin{gathered} u(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U(x,y,z(x,y)), \\ u^1(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)). \end{gathered}$$

Во **второй главе** рассматривается управляемая система

$$z_{xy} = c_1(x,y,z)z_x + c_2(x,y,z)z_y + c_3(x,y,z)u + c_4(x,y,z), \tag{5}$$

$$z(x,0) = \varphi_1(x) + \int\limits_0^x u^1(s)\,ds,\ z(0,y) = \varphi_2(y) + \int\limits_0^y u^2(t)\,dt \tag{6}$$

с ограничениями на управления трех типов: невыпуклые ограничения

$$\begin{gathered} u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)), \\ u^1(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)),\, u^2(y) \in U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)), \end{gathered} \tag{7}$$

овыпукленные ограничения

$$\begin{gathered} u(x,y) \in \operatorname{co} U(x,y,z(x,y)), \\ u^1(x) \in \operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)),\, u^2(y) \in \operatorname{co} U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)), \end{gathered} \tag{8}$$

экстремальные ограничения

$$\begin{gathered} u(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U(x,y,z(x,y)), \\ u^1(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)). \end{gathered} \tag{9}$$

Множества решений системы (5)–(6) с ограничениями на управления (7), (8) и (9) обозначим соответственно через $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_{\mathrm{co}}$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{ext}}$.

Всюду во второй главе предполагается, что многозначные отображения U, U_1, U_2 удовлетворяют условиям Каратеодори. Приведем основные результаты второй главы.

Теорема 2. *Множество $\mathcal{R}_{\mathrm{co}}$ компактно в пространстве*

$$C(\Omega;X) \times w\text{-}L^p(\Omega;Y) \times w\text{-}L^p(I_1;X) \times w\text{-}L^p(I_2;X), \tag{10}$$

где $w\text{-}L^p$ — пространство L^p со слабой топологией.

Определение 2. *Будем говорить, что управляемая система (5)–(7) обладает свойством единственности, если для любого решения* $(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*) \in \mathcal{R}_{\rm co}$ *существуют такие непрерывные отображения*

$$u\colon C(\Omega; X) \to L^p(\Omega; Y),\ u^i\colon C(I_i; X) \to L^p(I_i; X),\ i = 1, 2, \tag{11}$$

что

(1) $u(z)(x,y) \in \operatorname{co} U(x, y, z(x,y))$ *п.в. на* Ω,
$u^i(z)(x_i) \in \operatorname{co} U_i(x_i, \mathscr{V}_i(z)(x_i))$ *п.в. на* I_i, $i = 1, 2$;

(2) $u(z_*) = u_*$, $u^i(z_*) = u^i_*$, $i = 1, 2$;

(3) $(z, u(z), u^1(z), u^2(z)) \in \mathcal{R}_{\rm co} \quad \Rightarrow \quad z = z_*$.

Для систем с постоянными ограничениями на управления свойство единственности означает, что каждой тройке допустимых управлений (u_*, u^1_*, u^2_*) соответствует единственное решение z_* системы (5)–(6). Отметим также, что при сделанных предположениях непрерывные отображения вида (11), удовлетворяющие условиям (1) и (2) определения 2, всегда существуют.

Теорема 3. *Если система (5)–(7) обладает свойством единственности, то*

$$\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}_{\rm ext}} = \mathcal{R}_{\rm co},$$

где черта означает замыкание в пространстве (10).

В теории дифференциальных включений аналогичные теоремы обычно называют теоремами плотности. Для систем с постоянными ограничениями теорему 3 можно усилить и доказать так называемый бэнг-бэнг принцип.

Определение 3. *Функция* $\phi\colon \Omega \to X$ *называется кусочно-постоянной (или ступенчатой), если существуют конечные разбиения* $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = a$, $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_k = b$ *отрезков* $I_1 = [0, a]$ *и* $I_2 = [0, b]$ *такие, что на каждом из множеств* $E_{ij} = (a_{i-1}, a_i) \times (b_{i-1}, b_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$ *функция* ϕ *постоянна. В точках множества* $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{l} E_{ij}$ *функция* ϕ *может принимать произвольные значения.*

Теорема 4 (бэнг-бэнг принцип)**.** *Пусть каждой тройке управлений* (u, u^1, u^2), $u \in L^p(\Omega; Y)$, $u^1 \in L^p(I_1; X)$, $u^2 \in L^p(I_2; X)$, *такой, что*

$$u(x,y) \in \operatorname{co} U, \quad u^1(x) \in \operatorname{co} U_1, \quad u^2(y) \in \operatorname{co} U_2,$$

соответствует единственное решение z *системы (5)–(6). Тогда для любой точки* $(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*) \in \mathcal{R}_{\mathrm{co}}$ *существует последовательность* $(z_k, u_k, u^1_k, u^2_k) \in \mathcal{R}_{\mathrm{ext}}$, *сходящаяся к* (z_*, u_*, u^1_*, u^2_*) *в пространстве (10), и такая, что управления* u_k, u^1_k, u^2_k *кусочно-постоянны.*

Во второй главе также показано, что системы вида

$$\begin{gathered} z_{xy} = c_2(x) z_y + c_3(x,y,z) u + c_4(x,y,z), \\ u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in U_2(y); \end{gathered} \tag{I}$$

$$\begin{gathered} z_{xy} = c_1(y) z_x + c_3(x,y,z) u + c_4(x,y,z), \\ u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in U_1(x),\ u^2(y) \in U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)); \end{gathered} \tag{II}$$

$$\begin{gathered} z_{xy} = c_1(y) z_x + c_2(x) z_y + c_3(x,y,z) u + c_4(x,y,z), \\ u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)), u^1(x) \in U_1(x),\ u^2(y) \in U_2(y) \end{gathered} \tag{III}$$

с граничными условиями (6) обладают свойством единственности, если все функции и многозначные отображения, входящие в эти системы и зависящие от z, являются липшицевыми по z и, кроме того, существуют такие $q_1, q_2 > 0$, что для любых $z_1, z_2 \in C(\Omega; X)$

$$\begin{gathered} |\mathscr{V}_1(z_1)(x) - \mathscr{V}_1(z_2)(x)| \leqslant q_1 \sup_{y \in I_2} |z_1(x,y) - z_2(x,y)|, \quad x \in I_1, \\ |\mathscr{V}_2(z_1)(y) - \mathscr{V}_2(z_2)(y)| \leqslant q_2 \sup_{x \in I_1} |z_1(x,y) - z_2(x,y)|, \quad y \in I_2. \end{gathered}$$

Для системы (I) справедливы следующие теоремы.

Теорема 5 (о граничности)**.** *Если для каждого* $(z, u, u^1, u^2) \in \mathcal{R}$ *имеет место хотя бы одно из неравенств*

(i) $\mu_2\{(x,y) \in \Omega \mid U(x,y,z(x,y)) \neq \operatorname{co} U(x,y,z(x,y))\} > 0$,

(ii) $\mu_1\{x \in I_1 \mid U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \neq \operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x))\} > 0$,

(iii) $\mu_1\{y \in I_2 \mid U_2(y) \neq \operatorname{co} U_2(y)\} > 0$,

то

$$\overline{\mathcal{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathcal{R}_{\mathrm{ext}}} = \mathcal{R}_{\mathrm{co}}.$$

Здесь μ_1 *обозначает меру Лебега в* $\mathbb{R}$, μ_2 *— меру Лебега в* $\mathbb{R}^2$.

Теорема 6. *Множество $\mathcal{R}$ является замкнутым в пространстве (10) тогда и только тогда, когда для каждого $(z, u, u^1, u^2) \in \mathcal{R}$ имеют место равенства*

(i) $\mu_2\{(x,y) \in \Omega \mid U(x,y,z(x,y)) \neq \operatorname{co} U(x,y,z(x,y))\} = 0$,

(ii) $\mu_1\{x \in I_1 \mid U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \neq \operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x))\} = 0$,

(iii) $\mu_1\{y \in I_2 \mid U_2(y) \neq \operatorname{co} U_2(y)\} = 0$.

Теорема 6 дает необходимое и достаточное условие замкнутости множества $\mathcal{R}$ решений системы (I). Это условие обладает одним недостатком: равенства (i)–(iii) нужно проверять вдоль каждой "траектории" z системы. В следующей теореме мы избавляемся от этого недостатка. Для этого мы переходим от одной системы вида (I) к семейству систем вида (I), которое строится следующим образом.

Пусть $0 \leqslant a_0 < a$, $0 \leqslant b_0 < b$, $\omega_0 = (a_0, b_0)$, $I_1^0 = [a_0, a]$, $I_2^0 = [b_0, b]$, $\Omega_0 = I_1^0 \times I_2^0$; $\varphi_i^0 \colon I_i^0 \to X$, $i = 1, 2$, — абсолютно непрерывные функции, $\mathscr{V}_1^0 \colon C(\Omega_0; X) \to C(I_1^0; X)$ — непрерывный оператор. Обозначим через $\mathcal{R}(\omega_0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \mathscr{V}_1^0)$ множество решений системы (I) с граничными условиями

$$z(x, a_0) = \varphi_1^0(x) + \int\limits_{a_0}^{x} u^1(s)\, ds, \ z(b_0, y) = \varphi_2^0(y) + \int\limits_{b_0}^{y} u^2(t)\, dt$$

и с ограничениями на управления, в которых отображение $\mathscr{V}_1$ заменено на $\mathscr{V}_1^0$.

Теорема 7. *Множество $\mathcal{R}(\omega_0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \mathscr{V}_1^0)$ замкнуто в пространстве*

$$C(\Omega_0; X) \times w\text{-}L^p(\Omega_0; Y) \times w\text{-}L^p(I_1^0; X) \times w\text{-}L^p(I_2^0; X)$$

для любых ω_0, φ_1^0, φ_2^0, $\mathscr{V}_1^0$ тогда и только тогда, когда для каждого $z \in X$ имеют место равенства

(i) $\mu_2\{(x,y) \in \Omega \mid U(x,y,z) \neq \operatorname{co} U(x,y,z)\} = 0$,

(ii) $\mu_1\{x \in I_1 \mid U_1(x,z) \neq \operatorname{co} U_1(x,z)\} = 0$,

(iii) $\mu_1\{y \in I_2 \mid U_2(y) \neq \operatorname{co} U_2(y)\} = 0$.

Аналогичные теоремы справедливы и для систем (II), (III).

В первом параграфе **третьей главы** рассматривается задача минимизации функционала (4) на множестве $\mathscr{R}$ решений системы (1)–(3):

$$J(z,u,u^1,u^2)\to\min,\quad (z,u,u^1,u^2)\in\mathscr{R}. \tag{P_1}$$

Теорема 8. *Пусть U, U_1, U_2 удовлетворяют верхним условиям Каратеодори; $g\colon\Omega\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$, $g_i\colon I_i\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ являются функциями Каратеодори, удовлетворяющими линейному условию роста; $g_1(x,z,\cdot)$ выпукла для всех (x,z); $g_2(y,z,\cdot)$ выпукла для всех (y,z); множество*

$$\{(v,\eta)\mid f(x,y,z,u)=v,\ \eta\geqslant g(x,y,z,u)\ \text{для некоторого}\ u\in U(x,y,z)\}$$

выпукло для каждого (x,y,z). Тогда задача (P_1) имеет решение.

Во втором параграфе рассмотрена задача минимизации функционала (4) на множестве $\mathcal{R}$ решений системы (5)–(7):

$$J(z,u,u^1,u^2)\to\inf,\quad (z,u,u^1,u^2)\in\mathcal{R}. \tag{P_2}$$

При этом мы считаем, что U, U_1, U_2 удовлетворяют условиям Каратеодори; $g\colon\Omega\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$, $g_i\colon I_i\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ являются функциями Каратеодори, удовлетворяющими линейному условию роста.

Отметим, что сделанных предположений недостаточно для того, чтобы гарантировать существование решения в задаче (P_2). Поэтому было построено такое расширение этой задачи, которое имеет решение.

Положим

$$g_U(x,y,z,u)=\begin{cases} g(x,y,z,u), & u\in U(x,y,z),\\ +\infty, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$g_{U_1}(x,z,u)=\begin{cases} g_1(x,z,u), & u\in U_1(x,z),\\ +\infty, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$g_{U_2}(y,z,u)=\begin{cases} g_2(y,z,u), & u\in U_2(y,z),\\ +\infty, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть g^{**} — биполяра функции $u\mapsto g_U(x,y,z,u)$. Аналогично определим функции g_1^{**} и g_2^{**}. Далее рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J^{**}(z,u,u^1,u^2)=\int_\Omega g^{**}(x,y,z(x,y),u(x,y))\,dx\,dy+$$
$$+\int_{I_1} g_1^{**}(x,\mathscr{V}_1(z)(x),u^1(x))\,dx+\int_{I_2} g_2^{**}(y,\mathscr{V}_2(z)(y),u^2(y))\,dy$$

на множестве решений $\mathcal{R}_{\mathrm{co}}$ овыпукленной системы (5),(6),(8). В краткой форме эта задача записывается следующим образом:

$$J^{**}(z, u, u^1, u^2) \to \inf, \quad (z, u, u^1, u^2) \in \mathcal{R}_{\mathrm{co}}. \tag{P_3}$$

Определим многозначные отображения $G\colon \Omega \times X \to (Y \times \mathbb{R})$ и $G_i\colon I_i \times X \to (X \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, по формулам

$$G(x, y, z) = \{(u, \lambda) \in Y \times \mathbb{R} \mid u \in U(x, y, z), \lambda = g(x, y, z, u)\},$$
$$G_i(x_i, z) = \{(v, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid v \in U_i(x_i, z), \lambda = g_i(x_i, z, v)\}, \quad i = 1, 2.$$

Определение 4. *Будем говорить, что задача (P_2) обладает свойством единственности, если для любого решения $(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*) \in \mathcal{R}_{\mathrm{co}}$ существуют такие непрерывные отображения*

$$\begin{aligned} &u\colon C(\Omega; X) \to L^p(\Omega; Y),\ u^i\colon C(I_i; X) \to L^p(I_i; X), \\ &\lambda\colon C(\Omega; X) \to L^p(\Omega; \mathbb{R}),\ \lambda^i\colon C(I_i; X) \to L^p(I_i; \mathbb{R}),\ i = 1, 2, \end{aligned} \tag{12}$$

что

(1) $(u(z), \lambda(z))(x, y) \in \operatorname{co} G(x, y, z(x, y))$ *п.в. на* Ω,
$(u^i(z), \lambda^i(z))(x_i) \in \operatorname{co} G_i(x_i, \mathscr{V}_i(z)(x_i))$ *п.в. на* I_i,
$i = 1, 2$;

(2) $(u(z_*), \lambda(z_*))(x, y) = (u_*(x, y), g^{**}(x, y, z_*(x, y), u_*(x, y)))$ *п.в. на* Ω,
$(u^i(z_*), \lambda^i(z_*))(x_i) = (u^i_*(x_i), g^{**}_i(x_i, \mathscr{V}_i(z_*)(x_i), u^i_*(x_i)))$ *п.в. на* I_i,
$i = 1, 2$;

(3) $(z, u(z), u^1(z), u^2(z)) \in \mathcal{R}_{\mathrm{co}} \quad \Rightarrow \quad z = z_*$.

Необходимо отметить следующее:

- при сделанных предположениях непрерывные отображения вида (12), удовлетворяющие условиям (1) и (2) определения 3, всегда существуют;
- для задач оптимального управления системами с постоянными ограничениями свойство единственности выполняется, если любой тройке допустимых управлений (u_*, u^1_*, u^2_*) соответствует единственное решение z_* системы (5)–(6);
- если подынтегральные функции g, g^1, g^2 липшицевы по z и u, а системы (I), (II), (III) удовлетворяют тем же условиям, что и в главе 2, то для задач оптимального управления системами (I), (II), (III) выполняется свойство единственности.

Для задачи (P_2) доказана теорема о расширении, которая является аналогом классической теоремы Боголюбова в вариационном исчислении при ограничениях, заданных решениями управляемой системы Гурса-Дарбу.

Теорема 9. *Пусть задача (P_2) обладает свойством единственности. Тогда задача (P_3) является расширением задачи (P_2).*

Следствием теоремы о расширении является теорема о релаксации.

Теорема 10. *Пусть задача (P_2) обладает свойством единственности. Тогда*

$$\min(P_3) = \inf(P_2).$$

Более того, для любого решения (z_*, u_*, u_*^1, u_*^2) задачи (P_3) найдется минимизирующая последовательность $\{(z_k, u_k, u_k^1, u_k^2)\}$ задачи (P_2) такая, что

(i) $(z_k, u_k, u_k^1, u_k^2) \to (z_*, u_*, u_*^1, u_*^2)$ *в пространстве (10),*

(ii) $J(z_k, u_k, u_k^1, u_k^2) \to J^{**}(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2)$.

Обратно, если $\{(z_k, u_k, u_k^1, u_k^2)\}$ — минимизирующая последовательность задачи (P_2), то существует подпоследовательность $\{(z_{k_j}, u_{k_j}, u_{k_j}^1, u_{k_j}^2)\}$, сходящаяся к некоторому решению (z_*, u_*, u_*^1, u_*^2) задачи (P_3).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Доказаны теоремы о существовании решений управляемой системы Гурса-Дарбу с распределенным и граничными управлениями, подчиненными смешанным невыпуклым ограничениям.

2. Исследована топологическая структура множества решений системы Гурса-Дарбу, удовлетворяющей свойству единственности. Доказано, что множество решений системы с овыпукленными ограничениями компактно и содержит в качестве своих плотных подмножеств множества решений системы с невыпуклыми ограничениями.

Выделены классы систем, для которых множество решений невыпуклой задачи является не только плотным, но и граничным подмножеством овыпукленной задачи. Для этих классов найдены необходимые и достаточные условия замкнутости множеств решений. Для систем с постоянными ограничениями на управления доказан бэнг-бэнг принцип.

3. Доказан аналог теоремы Боголюбова для задачи минимизации интегрального функционала с невыпуклыми по управлению интегрантами на решениях системы Гурса-Дарбу с невыпуклыми ограничениями на управления.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

По материалам диссертации опубликованы следующие работы.

1. Погодаев Н.И. О решениях задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями / Н.И. Погодаев // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, №8. — С. 1116–1126.

2. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями / Н.И. Погодаев // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, №5. — С. 1116–1133.

3. Погодаев Н.И. О решениях включения типа Гурса-Дарбу со смешанными ограничениями на граничные и распределенные управления / Н.И. Погодаев // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. 11, №1. — С. 96–110.

4. Погодаев Н.И. О решениях задачи Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями / Н.И. Погодаев // Известия института математики и информатики, выпуск 3 (37), с. 125-126, Ижевск, 2006.

5. Погодаев Н.И. Об одном классе управляемых систем типа Гурса-Дарбу // Материалы конференции «Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий» (14-15 декабря 2006 г., Иркутск), с. 43.

6. Погодаев Н.И. Свойства экстремальных решений управляемой системы типа Гурса-Дарбу // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (28 мая – 2 июня 2007 г., Новосибирск), с. 250-251.

7. Погодаев Н.И. Релаксация в задаче оптимального управления для системы типа Гурса-Дарбу // Материалы конференции «Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий» (ноябрь 2007 г., Иркутск), с. 34.

8. Погодаев Н.И. Релаксация в управляемой системе типа Гурса-Дарбу // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология» (17-22 июня 2008 г., Москва), с. 387-388.

9. Погодаев Н.И. Расширение задачи оптимального управления для системы типа Гурса-Дарбу // Тезисы докладов школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (23-30 июня 2008 г., Иркутск), с. 51.

10. Погодаев Н.И. Существование решений в задаче оптимального управления для системы Гурса-Дарбу // Материалы конференции «Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий» (декабрь 2008 г., Иркутск), с. 32.

Редакционно-издательский отдел
Учреждения Российской академии наук
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
Подписано к печати 7.05.2008
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 1. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН