На правах рукописи

ПЕТРОВА ЕЛЕНА ГЕННАДЬЕВНА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ И ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Стрекаловский Александр Сергеевич.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Коннов Игорь Васильевич;** кандидат физико-математических наук **Хамисов Олег Валерьевич.**
Ведущая организация:	**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики.**

Защита состоится **14 апреля 2011 г.** в **14.00** ч. на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 при Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан **11 марта 2011 г.**

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов численного решения невыпуклых задач оптимизации с ограничениями типа равенства, а также задач, непосредственно с ними связанных (задач дополнительности, двухуровневого программирования, систем уравнений).

Актуальность темы. Среди невыпуклых задач оптимизации наиболее сложными для решения, по мнению многих специалистов, являются задачи с нелинейными ограничениями-равенствами, в которых, как правило, затруднительно нахождение даже допустимой точки. В постановках таких задач ограничения часто задаются функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций (*d.c. функциями*). Широкий спектр приложений невыпуклых задач в экономике и технике обуславливает необходимость разработки эффективных численных методов их решения.

Для большинства существующих методов решения задач с равенствами (методы приведенных градиентов, линеаризации, SQP-методы, различные двойственные методы) известны результаты о сходимости лишь к локальному экстремуму. Исключением является метод штрафов и различные его модификации, где сходимость носит глобальный характер (см. работы А. Фиакко и Г. Мак-Кормика, Р. Куранта, У. Мюррея, Р. Флетчера и др.). Здесь все трудности перенесены на этап решения вспомогательных задач безусловной минимизации, которые обычно являются невыпуклыми, что затрудняет поиск их решений. Недостаток метода связан с необходимостью бесконечного увеличения параметра штрафа, в результате чего штрафная функция приобретает “овражный” характер, а влияние исходной целевой функции практически исчезает.

Другое направление в методах штрафов, получившее свое развитие в работах И.И. Еремина, В.Ф. Демьянова, О.Л. Мангасарьяна, У.И. Зангвилла и др., связано с построением точных штрафных функций, когда однократная безусловная оптимизация сразу же дает решение исходной задачи. Однако точные штрафные функции, как правило, оказываются недифференцируемыми, что создает дополнительные сложности при их минимизации.

В целом можно констатировать, что проблема поиска глобального решения задач с ограничениями-равенствами очень сложна и удовлетворительных универсальных способов ее решения в настоящее время не существует. Поэтому на данном этапе развития численных методов решения невыпуклых задач приоритетным направлением является исследование и решение специальных классов задач с учетом их специфики и свойств.

Таким образом, актуальность исследований, представленных в диссертации, определяется необходимостью разработки эффективных численных алгоритмов решения невыпуклых задач с нелинейными ограничениями-равенствами с обоснованием их глобальной сходимости. Целесообразность решения таких задач также обусловлена наличием большого количества практических приложений, например, в теории рыночного равновесия, термодинамической устойчивости, при моделировании экономических и экологических систем.

Предмет и объект исследования. В работе исследованы линейная задача дополнительности, линейная двухуровневая задача, нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений.

Как известно, линейная задача дополнительности (ЛЗД) содержит в себе так называемое комплементарное нелинейное ограничение-равенство. Теория линейной дополнительности, впервые представленная в работах Р. Коттла, Дж. Данцига, К. Лемке, интенсивно развивается последние десятилетия, однако наибольшее количество работ традиционно посвящено методам решения ЛЗД с неотрицательно определенными матрицами и с матрицами, имеющими положительные главные миноры. В диссертации разработан алгоритм решения значительно более сложной ЛЗД: со знаконеопределенной матрицей.

Линейная двухуровневая задача (см. работы Ю.Б. Гермейера, С. Демпе, Дж. Барда, П. Хансена, М. Кампело) может быть интерпретирована как некоторое усложнение ЛЗД, поскольку результатом сведения двухуровневой задачи к оптимизационной является задача с линейной целевой функцией и комплементарным ограничением, сходным с ЛЗД. Кроме того, одним из возможных подходов к решению линейной двухуровневой задачи является ее сведение к последовательности вспомогательных задач линейной дополнительности. В то же время задача, включающая в себя помимо комплементарного ограничения целевую функцию, оказывается значительно сложнее ЛЗД и требует дальнейшего развития теории решения задач с равенствами.

В диссертации исследованы свойства задач с ограничениями-равенствами, заданными d.c. функциями, а также разработаны методы решения d.c. уравнений и систем d.c. уравнений, которые могут быть использованы для нахождения допустимых точек в нелинейных задачах с равенствами.

Целью работы является исследование свойств указанных задач, разработка эффективных алгоритмов их численного решения и апробация разработанных методов на известных из литературы тестовых примерах.

Методы исследования. В работе используется аппарат математического программирования, теория выпуклого анализа, а также элементы теории глобального экстремума, основанной на условиях глобальной оптимальности

А.С. Стрекаловского.

Научная новизна. Для решения известных задач с равенствами разработаны новые методы, позволяющие находить решение в ситуациях, когда стандартные методы оказываются неэффективными: для решения линейной задачи дополнительности — в случае знаконеопределенных матриц; для линейных двухуровневых задач — в случае большого количества переменных; для решения d.c. уравнений — в случае, когда требуется найти корень, ближайший к одной из границ рассматриваемого интервала.

В результате исследований для линейной задачи дополнительности получены следующие результаты: предложены и обоснованы новые алгоритмы локального и глобального поисков с изменяющимися, но согласованными параметрами точностей решения вспомогательных задач на основе условий глобальной оптимальности в задачах d.c. минимизации; создана и протестирована программа, которая позволяет решать ЛЗД до размерности 400 со знаконеопределенными матрицами.

Исследована взаимосвязь линейной двухуровневой задачи с возмущенной одноуровневой задачей математического программирования с d.c. ограничением-равенством в условиях приближенного решения задачи нижнего уровня. Обоснована взаимосвязь задачи с d.c. ограничением-равенством и задачи с d.c. ограничением-неравенством. Разработаны новые алгоритмы локального и глобального поисков решений в линейной двухуровневой задаче на основе условий глобальной оптимальности для задач с d.c. ограничением-равенством. Программно реализован метод решения двухуровневых задач высокой размерности.

Предложен и обоснован метод нахождения корня d.c. уравнения со многими неизвестными, который может быть использован для нахождения допустимой точки в задаче с равенством, наилучшей с точки зрения целевой функции. Разработан алгоритм решения систем d.c. уравнений, основанный на теории глобального поиска в задачах d.c. минимизации.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств, использованием апробированных научных методов и средств, полнотой и корректностью исходных посылок и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретические результаты диссертации, в частности алгоритмы глобального поиска, могут быть использованы при исследовании более сложных задач дополнительности и задач с двухуровневой структурой.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных алгоритмов для решения и исследования задач, возникающих в приложениях: задачи экономического равновесия, планирования производства, контактных задач в технике и т.д.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов по программам СО РАН: “Поиск глобальных решений в невыпуклых задачах исследования операций и оптимального управления” (№ гос. регистрации 01.2.007 08581) с 2007 по 2009 гг., программа “Математическая теория управления при возмущениях и неопределенности”; “Нелокальные методы в теории управления динамическими системами” (№ гос. регистрации 01201001345) в 2010 г., программа “Теория управления динамическими системами и методы их исследования”; а также в рамках комплексного интеграционного проекта СО РАН 1.3 “Исследование задач двухуровневого и равновесного программирования” (2006–2008 гг.) и проекта РФФИ № 05-01-00110-а “Невыпуклые задачи оптимизации, исследования операций и оптимального управления” (2005–2007 гг.).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике) в диссертации проведено исследование сложных оптимизационных задач и разработано специальное математическое и программное обеспечение для их решения (пп. 1, 4, 5 области исследований).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на ежегодных школах-семинарах молодых ученых “Математическое моделирование и информационные технологии” (Иркутск–Ангасолка, 2005–2007, 2010); XIII, XIV Байкальских международных школах-семинарах “Методы оптимизации и их приложения” (Иркутск–Северобайкальск, 2005, 2008); Всероссийской конференции “Математика, информатика, управление” (Иркутск, 2005); ежегодных конференциях “Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий” в ИДСТУ СО РАН (Иркутск, 2006, 2008–2010); II Всероссийской конференции с международным участием “Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы” (Улан-Удэ–Байкал, 2006); III, IV Всероссийских конференциях “Проблемы оптимизации и экономические приложения” (Омск, 2006, 2009); II Международной конференции по оптимизации и оптимальному управлению (Монголия, Улан-Батор, 2007); Российской конференции “Дискретная оптимизация и исследование операций” (Владивосток, 2007).

Результаты диссертации обсуждались на научных семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН, Кафедры исследования операций факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель проф. А.Ф. Измаилов).

Публикации и личный вклад автора. По материалам диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата. В число указанных работ входят статьи [1–3], опубликованные в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены Е.Г. Петровой самостоятельно и не затрагивают интересы иных лиц. Из совместных публикаций с А.С. Стрекаловским, Е.С. Мазуркевич, Т.В. Груздевой на защиту выносятся только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 143 наименования. Общий объем диссертации составляет 129 страниц, из которых 116 страниц основного текста, включающего 8 рисунков и 17 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведены постановки исследуемых задач, примеры соответствующих прикладных моделей из экономики, обзор современного состояния научных исследований по теме диссертации, обоснована актуальность исследований, сформулированы основные результаты, выносимые на защиту, показана научная новизна работы и приведена информация об апробации результатов.

В **первой главе** диссертации рассматривается линейная задача дополнительности

$$\begin{gathered} Mx + q = w, \\ \langle x, w \rangle = 0, \\ x \geq 0, \quad w \geq 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x, w \in I\!R^n$, а вектор $q \in I\!R^n$ и вещественная знаконеопределенная матрица M размера $(n \times n)$ заданы.

В § 1.1 приводятся различные формулировки ЛЗД, отражается связь задач дополнительности с задачами линейного и квадратичного программирования, с биматричными играми и вариационными неравенствами.

В § 1.2 задача (1) сводится к невыпуклой задаче оптимизации:

$$\begin{gathered} F(x) = \langle x, Mx + q \rangle \downarrow \min_x, \\ x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Показано, что целевая функция $F(\cdot)$ является d.c. функцией, т.е. $F(x) = G(x) - H(x)$, где $G(x) = \langle M_1 x, x \rangle + \langle q, x \rangle$ и $H(x) = \langle M_2 x, x \rangle$ — сильно выпуклые функции, $M_i = M_i^T > 0,\ i = 1, 2$.

В § 1.3 описан специальный метод локального поиска (СМЛП) для задачи (2) с учетом d.c. структуры целевой функции, заключающийся в решении последовательности линеаризованных задач:

$$J_s(x) = \langle M_1 x, x\rangle + \langle q - 2M_2 x^s, x\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \tag{3}$$

где $S = \{x \in I\!R^n : \ x \geq 0, \ q + Mx \geq 0\}$.

Следующий § 1.4 посвящен построению тестовых невыпуклых задач линейной дополнительности и тестированию СМЛП.

В § 1.5 описана схема алгоритма глобального поиска (АГП) в терминах задачи d.c. минимизации (2). Согласно стратегии глобального поиска[1] (СГП) решение задачи разбивается на несколько более простых этапов, включающих локальный поиск и процедуры выхода из текущих критических точек, полученных на этапе локального поиска. Однако при применении общей СГП к конкретной задаче необходимо обосновать и детализировать отдельные ее этапы. В § 1.6 определяются параметры АГП, строится аппроксимация поверхности уровня выпуклой функции $H(\cdot)$, производится выбор точностей решения вспомогательных задач и осуществляется тестирование АГП.

В разделе 1.6.1 с помощью вычислительного эксперимента строится аппроксимация поверхности уровня функции $H(\cdot)$, задающей базовую невыпуклость, т.е. набор таких точек y^i, что

$$H(y^i) = \beta - \zeta_k,$$

где параметр β выбирается из интервала $]\inf(G, S), \sup(G, S)[$, $\zeta_k = F(z_k)$ — значение целевой функции в текущей критической точке. Наиболее эффективно показала себя аппроксимация, состоящая из точек

$$y^i = \mu_i d^i, \ \ i = 1, \ldots, n+1,$$

где в качестве d^i для $i = 1, \ldots, n$ использовались решения следующих задач линейного программирования:

$$\langle e^i, x\rangle \downarrow \min, \ x \geq 0, \ \ Mx + q \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

а d^{n+1} находилось как решение аналогичной задачи

$$\langle e_n, x\rangle \downarrow \min, \ x \geq 0, \ \ Mx + q \geq 0, \tag{5}$$

где $e_n = (1, 1, \ldots, 1, 1)$.

После выбора способа согласования точностей локального и глобального поисков, осуществленного в разделе 1.6.2, АГП был протестирован на задачах размерности до 400. На том же поле тестовых невыпуклых ЛЗД было

[1]Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.

проведено сравнение результатов работы АГП, решателя PATH[2], предназначенного для решения линейных задач дополнительности и процедуры quadprog (Matlab 6.5), реализующей метод активных множеств для задач квадратичного программирования, применительно к задаче (2). Результаты эксперимента показали, что, начиная с размерности 30, АГП значительно выигрывает по числу решенных задач у обеих программ, причем с повышением размерности этот разрыв увеличивается. Таким образом, результаты сравнительного эксперимента свидетельствуют об успешности применения АГП для решения ЛЗД со знаконеопределенными матрицами.

Результаты главы 1 опубликованы в работах [2, 7, 8].

Во **второй главе** диссертационной работы рассматривается линейная задача двухуровневого программирования в оптимистической постановке, когда предполагается, что из всех возможных решений на нижнем уровне выбирается благоприятствующее достижению цели верхнего уровня.

В § 2.1 рассматривается следующая постановка линейно-линейной двухуровневой задачи:

$$\begin{gathered} f(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle \downarrow \min_{x,y}, \\ x \in X \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I\!R^m \mid Ax \le b\}, \\ y \in Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{Arg}\min_y \left\{ \left\langle d^1, y \right\rangle \mid y \in Y(x) \right\}, \end{gathered} \tag{6}$$

где множество $Y(x)$ определено системой неравенств

$$Y(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in I\!R^n \mid A_1x + B_1y \le b^1\}, \tag{7}$$

$c \in I\!R^m$, $d, d^1 \in I\!R^n$, $b \in I\!R^p$, $b^1 \in I\!R^q$ — заданные векторы, A, A_1, B_1 — матрицы размера $(p \times m)$, $(q \times m)$, $(q \times n)$ соответственно. Пусть, кроме того, выполнены следующие общепринятые предположения относительно задачи (6):

1) функция $f(x,y)$ ограничена снизу на непустом множестве

$$Z \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I\!R^m,\ y \in I\!R^n \mid Ax \le b,\ A_1x + B_1y \le b^1\};$$

2) функция $\langle d^1, y\rangle$ ограничена снизу на множестве $Y(x)$ для всех $x \in X$, так что $\inf\limits_x \inf\limits_y \{\langle d^1, y\rangle \mid y \in Y(x),\ x \in X\} > -\infty$.

В § 2.1 обсуждается скрытая невыпуклость, порождаемая двухуровневой структурой задачи, а также трудности, которые могут возникать при ее решении.

[2] http://pages.cs.wisc.edu/~ferris/path.html

В § 2.2 с помощью известного приема, использующего теорию двойственности в линейном программировании, задача (6) сводится к оптимизационной задаче

$$
(\mathcal{P}) \qquad \begin{gathered} \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \downarrow \min_{x,y,v}, \\ (x,y,v) \in S \stackrel{\triangle}{=} \{Ax \le b, \;\; A_1x + B_1y \le b^1, \;\; vB_1 = -d^1, \;\; v \ge 0\}, \\ \langle d^1, y\rangle = \langle A_1x - b^1, v\rangle. \end{gathered} \tag{8}
$$

Далее показано, что билинейная функция, задающая невыпуклое ограничение-равенство $F(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \langle d^1, y\rangle - \langle A_1x - b^1, v\rangle$ может быть представлена в виде разности двух выпуклых функций:

$$
F(x,y,v) = g(x,y,v) - h(x,v), \tag{9}
$$

где $g(x,y,v) = \dfrac{1}{4}\|A_1x - v\|^2 + \langle d^1, y\rangle + \langle b^1, v\rangle,\; h(x,v) = \dfrac{1}{4}\|A_1x + v\|^2.$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче минимизации с d.c. ограничением-равенством. В связи с этим далее изучаются свойства общей задачи с d.c. ограничением-равенством вида

$$
(\mathcal{P}_0) \qquad \begin{gathered} f(x) \downarrow \min, \; x \in S, \\ F(x) \stackrel{\triangle}{=} g(x) - h(x) = 0 \end{gathered} \tag{10}
$$

и разрабатывается метод ее решения с целью отыскания решения в (8).

Так в § 2.3 получены условия глобальной оптимальности (УГО) для задачи с d.c. равенством вида (10). Далее исследуется связь задачи (10) с задачей с d.c. ограничением-неравенством:

$$
\begin{gathered} f(x) \downarrow \min, \; x \in S, \\ F(x) \stackrel{\triangle}{=} g(x) - h(x) \le 0. \end{gathered} \tag{11}
$$

Показано, что из УГО для задачи (11) вытекают достаточные условия глобальной оптимальности в задаче (10).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия регулярности*

$$
\exists v \in S: \; F(v) > 0, \tag{12}
$$

$$
\begin{gathered} \forall y \in S: \; F(y) = 0 \; (g(y) = h(y)) \\ \exists p = p(y) \in S: \; g(p) - g(y) < \langle \nabla h(y), p - y\rangle. \end{gathered} \tag{13}
$$

Если $z \in S, \;\; F(z) = 0$ *и, кроме того, справедливо условие*

$$
\begin{gathered} \forall (y, \beta): \; h(y) = \beta, \; y \in S, \\ g(y) \le \beta \le \sup(g, S), \\ g(x) - \beta \ge \langle \nabla h(y), x - y\rangle \\ \forall x \in S: \; f(x) \le f(z), \end{gathered} \tag{14}
$$

то z является решением задачи (10).

Доказаны теорема о необходимых условиях глобальной оптимальности и теорема о связи задач (10) и (11).

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение*

$$\begin{gathered}\exists v \in S:\ F(v) > 0,\\ f(v) < \mathcal{V}(\mathcal{P}_0) \overset{\triangle}{=} \inf_x \{f(x) \mid x \in S,\ F(x) = 0\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Тогда если z — решение задачи (10), *то*

$$\begin{gathered}\forall (y, \beta):\ h(y) = \beta,\ y \in S,\\ g(x) - \beta \geq \langle \nabla h(y), x - y \rangle\ \ \forall x \in S:\ f(x) \leq f(z).\end{gathered}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* (15). *Тогда задача* (10) *эквивалентна задаче* (11).

Следующий § 2.4 посвящен обобщению УГО на минимизирующие последовательности в задаче (10).

В § 2.5 для решения задачи с d.c. ограничением-равенством предложена стратегия глобального поиска, аналогичная известной СГП для задачи (11) [3]. Основными этапами СГП являются локальный поиск, построение аппроксимации поверхности уровня выпуклой функции $h(\cdot)$ и решение линеаризованных задач.

В § 2.6 выполняется проверка условий регулярности из теорем 1, 2 для поставленной ранее задачи (8), к которой была сведена исходная двухуровневая задача. В силу свойств задачи (8) условие (13) оказывается невыполненным. С другой стороны, условия (15), принимающие в данном случае вид

$$\exists (\check{x}, \check{y}, \check{v}) \in S:\ F(\check{x}, \check{y}, \check{v}) > 0,\ f(\check{x}, \check{y}) < \mathcal{V}(\mathcal{P}), \tag{16}$$

выполнены. В результате предлагается рассмотреть вместо (8) возмущенную задачу

$$\begin{gathered}f(x, y) = \langle c, x \rangle + \langle d, y \rangle \downarrow \min_{x,y,v},\\ (x, y, v) \in S,\\ F(x, y, v) - \rho = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

где $0 < \rho < F(\check{x}, \check{y}, \check{v})$.

Поскольку конечной целью является решение двухуровневой задачи, необходимо выяснить, как данное возмущение влияет на исходную двухуровневую задачу (6). Оказывается, что решение возмущенной задачи доставляет

[3] Стрекаловский А.С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 3. С. 435–447.

решение двухуровневой задачи, где задача нижнего уровня решается приближенно с точностью ρ:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\stackrel{\triangle}{=} \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \downarrow \min_{x,y}, \\
x \in X &\stackrel{\triangle}{=} \{x \in I\!R^m \mid Ax \le b\}, \\
y \in Y_*(x,\rho) &\stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y(x) \mid \langle d^1, y\rangle \le \inf_z[\langle d^1, z\rangle | z \in Y(x)] + \rho\}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Связь между задачами (17) и (18) устанавливает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть тройка* (x^*, y^*, v^*) *— решение задачи* (17). *Тогда пара* (x^*, y^*) *является решением двухуровневой задачи* (18).

Таким образом, для отыскания решения двухуровневой задачи (6) предлагается вместо задачи (8) решать возмущенную задачу (17), в которой выполнены условия регулярности. При этом параметр ρ должен выбираться достаточно малым, чтобы точность решения задачи нижнего уровня была приемлемой для рассматриваемой задачи (6). Для решения задачи (17) предлагается применять СГП, одним из основных моментов которой является локальный поиск (поиск критических точек).

В § 2.7 предлагается и обосновывается следующая конечная процедура поиска критической точки в задаче (17).

Процедура поиска критической точки

0. Найти вспомогательную точку

$$\bar{x} \in Pr_X(Z) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X \mid \exists y \in Y(x) : (x,y) \in Z\}.$$

1. При фиксированном $x := \bar{x} \in Pr_X(Z)$ найти решение $(\widetilde{y}, v^*)$ задачи

$$
\left.
\begin{array}{l}
\langle d, y\rangle \downarrow \min\limits_{y,v}, \\
A_1\bar{x} + B_1 y \le b^1, \\
vB_1 = -d^1, \;\; v \ge 0, \\
\langle d_1, y\rangle = \langle A_1\bar{x} - b_1, v\rangle + \rho.
\end{array}
\right\} \tag{19}
$$

2. При фиксированном $v := v^*$ решить задачу

$$
\left.
\begin{array}{l}
\langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y}, \\
Ax \le b, \;\; A_1 x + B_1 y \le b^1, \\
\langle d_1, y\rangle = \langle A_1 x - b_1, v^*\rangle + \rho.
\end{array}
\right\} \tag{20}
$$

Пусть (x^*, y^*) — решение задачи (20), тогда, очевидно, (x^*, y^*, v^*) — допустимая в задаче $(\mathcal{P}_\rho)$–(17) точка, кроме того

$$f(x^*, y^*) \le f(x,y) \quad \forall (x,y) \in Z : F(x,y,v^*) = 0, \tag{21}$$

так что точка (x^*, y^*, v^*) является частичным минимумом функции $f(\cdot)$ по паре (x, y) при фиксированном v^*.

В разделе 2.7.1 описывается известная методика генерации тестовых линейно-линейных двухуровневых задач[4], а в разделе 2.7.2 производится тестирование процедуры поиска критических точек, в результате которого выявляются наиболее сложные для этой процедуры классы сгенерированных задач.

В § 2.8 на основе СГП, представленной в § 2.5, разработан алгоритм глобального поиска для задачи (17) с учетом ее особенностей.

Пусть заданы числа $\beta_- \stackrel{\triangle}{=} \inf(g, S)$, $\beta_+ \stackrel{\triangle}{=} \sup(g, S)$, $M, N_A \in Z_+$.

Алгоритм глобального поиска

Шаг 0. Положить $k := 0$. Выбрать $x^0 \in Pr_X(Z)$.
Шаг 1. Начиная с точки x^0, используя процедуру поиска критической точки, найти (x^k, y^k, v^k). Положить $\Delta\beta := (\beta_+ - \beta_-)/M$.
Шаг 2. Положить $\beta_k := g(x^k, y^k, v^k) - \rho, \;\; \gamma_k := \langle c, x^k\rangle + \langle d, y^k\rangle, \;\; i := 1$.
Шаг 3. Построить i-ю точку аппроксимации поверхности уровня функции $h(\cdot)$: $\mathcal{A}_k = \{(u^i, w^i) \mid h(u^i, w^i) = \beta_k, \; i = 1, \ldots, N_k\}$.
Шаг 4. Найти (x^{ik}, y^{ik}, v^{ik}) — решение линеаризованной задачи

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{4}\|A_1 x - v\|^2 + \langle d^1, y\rangle + \langle b^1, v\rangle - \langle \nabla g(u^i, w^i), (x, v)\rangle \downarrow \min\limits_{x,y,v}, \\ Ax \le b, \;\; A_1 x + B_1 y \le b^1, \;\; vB_1 = -d^1, \;\; v \ge 0, \\ \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \le \gamma_k. \end{array}\right\} (\mathcal{PL}(u^i, w^i, \gamma_k))$$

Шаг 5. Начиная с точки x^{ik}, используя процедуру поиска критической точки, найти $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{v}^i)$.
Шаг 6. Если $f(\bar{x}^i, \bar{y}^i) < \gamma_k$, то положить $x^{k+1} := \bar{x}^i, y^{k+1} := \bar{y}^i, v^{k+1} := \bar{v}^i$, $k := k + 1$ и идти на Шаг 2.
Шаг 7. Если $f(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \ge \gamma_k$ и $i < N_A$, то $i := i + 1$ и идти на Шаг 3.
Шаг 8. Если $f(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \ge \gamma_k$, $\beta < \beta_+$ и $i = N_A$, то положить $\beta_k := \beta_k + \Delta\beta$, $\;i := 1$ и идти на Шаг 3.
Шаг 9. Если $f(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \ge \gamma_k$, $i = N_A$ и $\beta \ge \beta_+$, то **Stop:** (x^k, y^k, v^k) — решение задачи $(\mathcal{P}_\rho)$–(17), найденное алгоритмом. #

В § 2.9 представлены результаты тестирования АГП. Вначале экспериментально выбиралась наиболее подходящая аппроксимация поверхности уровня выпуклой функции $h(u_i, w_i) = \beta - \xi_k$, задающей базовую невыпуклость в задаче (17). Наибольшую эффективность АГП показал в случае, когда в

[4] Calamai P., Vicente L. Generating Linear and Linear-Quadratic Bilevel Programming Problems // SIAM Journal on Scientific Computing archive. 1993. V. 14, № 4. P. 770–782.

качестве точек аппроксимации выбирались векторы, коллинеарные векторам из набора $Dir_3 = \{(x^k + e^i, v^k),\ i = 1, \dots, m\}$, где x^k, v^k — компоненты текущей критической точки. Одновременно при тестировании аппроксимаций были выявлены наиболее сложные классы задач. С учетом полученной информации далее было проведено тестирование АГП на задачах высокой размерности. В § 2.10 приводятся результаты работы алгоритма глобального поиска для решения практической задачи планирования производства в условиях неизвестного спроса[5].

Решение вспомогательных задач линейного программирования при поиске критических точек, а также линеаризованных квадратичных задач на шаге 4 осуществлялось посредством известного коммерческого пакета Xpress[6]. В ходе вычислительного эксперимента с помощью АГП удалось решить с заданной точностью 79 из 80 сгенерированных задач до размерности $m + n = 1000$. Известная из литературы[7] максимальная размерность линейно-линейных двухуровневых задач, в которых удалось найти оптимистическое решение, составляет $m + n = 200$.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент подтверждает эффективность применения к решению линейной двухуровневой задачи высокой размерности подхода, базирующегося на теории глобального поиска для задач с d.c. ограничением.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [3, 9, 10, 12].

Третья глава диссертационной работы посвящена решению одного уравнения со многими неизвестными, а также систем уравнений, задаваемых d.c. функциями.

В § 3.1 ставится задача поиска корня уравнения

$$F(x) = 0, \quad x \in I\!R^n, \tag{22}$$

где $F(\cdot)$ является d.c. функцией: $F(x) = g(x) - h(x)$.

Пусть существуют точки $u,\ v \in I\!R^n$, удовлетворяющие соотношениям

$$F(u) \stackrel{\triangle}{=} g(u) - h(u) < 0 < F(v) \stackrel{\triangle}{=} g(v) - h(v). \tag{23}$$

Отметим, что поставленная задача является вспомогательной в общей задаче (10) с d.c. ограничением-равенством для поиска допустимой точки, лучшей, чем текущая критическая.

В силу (23) существует число $\lambda \in]0; 1[$, удовлетворяющее условию

$$x_\lambda = \lambda u + (1 - \lambda)v = v + \lambda(u - v) \ : \ F(x_\lambda) = 0. \tag{24}$$

[5]Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[6]Fair Isaac Corporation: Xpress Optimization Suite. URL: www.fico.com

[7]Saboia C.H., Campelo M., Scheimberg S. A computational study of global algorithms for linear bilevel programming // Numerical Algorithms. 2004. V. 35, № 2–4. P.155–173.

В диссертации показано, что чем ближе λ к нулю, тем лучше верхняя оценка для значения $f(x(\lambda))$ в задаче (10), а в случае линейной функции $f(\cdot)$ минимальному λ соответствует наименьшее значение $f(x(\lambda))$. Предлагается следующая процедура выпуклой комбинации (ПВК) для отыскания корня уравнения (22).

Процедура выпуклой комбинации

Шаг 0. Положить $s := 0,\ \ x^s := v$.

Шаг 1. Вычислить

$$\mu_s := \frac{F(x^s)}{h(u) - h(x^s) - \langle \nabla g(x^s), u - x^s \rangle}. \tag{25}$$

Шаг 2. Построить выпуклую комбинацию $x := x^s + \mu_s(u - x^s)$.

Шаг 3. Если $F(x) \le \varepsilon$, то **Stop,** x — ε-решение уравнения $F(x) = 0$.

Шаг 4. Положить $s := s + 1,\ \ x^s := x$, перейти на **Шаг 1**. #

Установлено, что в случае $g(x) \equiv 0$ или $h(x) \equiv 0$ в одномерном случае ($n = 1$) ПВК превращается в известные метод хорд или метод Ньютона соответственно.

В § 3.2 в случае $\varepsilon = 0$ (когда итеративный процесс бесконечен) доказаны следующие свойства алгоритма.

Теорема 5. *Числовая последовательность* $\{\mu_s\}$, *строящаяся по правилу* (25), *сходится к нулю:* $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_s = 0$.

Следствие 1. *Последовательность выпуклых комбинаций* $\{x^s\}$, *генерируемая ПВК, сходится:* $\lim\limits_{s\to\infty} x^s = x_*$.

Введем множество чисел λ, доставляющих корни уравнения (24),

$$\Lambda^* = \{\lambda \in [0, 1] \mid F(\lambda u + (1 - \lambda)v) = 0\}$$

и множество соответствующих им векторов $x(\lambda)$

$$X_* = \{x \in I\!R^n \mid \exists \lambda \in \Lambda^* :\ x = \lambda u + (1 - \lambda)v\}.$$

Теорема 6. *Последовательность* $\{x^s\}$ *сходится к точке* x_* *такой, что* $F(x_*) = 0$. *Кроме того,*

$$\|x_* - v\| = \min_x \{\|x - v\| \mid x \in X_*\}. \tag{26}$$

В § 3.3 проведено численное сравнение ПВК с известным методом, представляющим собой компиляцию методов хорд и вилки, и методом половинного деления на задачах высокой размерности. Сравнение осуществлялось в среде MatLab r2009a. Результаты вычислительного эксперимента показали эффективность разработанной ПВК.

Вторая половина главы 3 посвящена решению систем d.c. уравнений. Рассматривается задача поиска корня системы уравнений

$$f_i(x) \stackrel{\triangle}{=} g_i(x) - h_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

где $x \in I\!R^n$, а $g_i(x), h_i(x)$ — выпуклые на $I\!R^n$ функции, $i = 1, \ldots, m$. Данная система сводится к задаче d.c. минимизации

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| \downarrow \min, \; x \in I\!R^n. \tag{28}$$

При этом показано, что функция $F(x)$ является d.c. функцией, поскольку представима в виде разности двух выпуклых функций $G(x)$ и $H(x)$, где

$$G(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), h_i(x)\}, \quad H(x) = \sum_{i=1}^{m} (g_i(x) + h_i(x)).$$

В частности, для систем квадратичных уравнений

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\langle C_i x, x\rangle + \langle b_i, x\rangle + d_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

где C_i — симметричные, необязательно положительно определенные матрицы размера $(n \times n)$, которые, как известно, можно разложить на разность двух положительно определенных матриц $(C_i = A_i - B_i, \;\; A_i > 0, \; B_i > 0)$, получено следующее d.c. представление:

$$\begin{gathered} G(x) = \sum_{i=1}^{n} \max\{\langle A_i x, x\rangle + \langle b_i, x\rangle + d_i \,;\, \langle B_i x, x\rangle - \langle b_i, x\rangle - d_i\}, \\ H(x) = \frac{1}{2}\langle Sx, x\rangle, \quad S = \sum_{i=1}^{n} (A_i + B_i), \end{gathered} \tag{30}$$

где S — симметричная, положительно определенная матрица.

Для задачи (28) на основе СГП, представленной в первой главе, разработан алгоритм глобального поиска, включающий в себя алгоритм локального поиска и процедуры выхода из критической точки. При этом, ввиду негладкости функции $G(\cdot)$, использовался недифференцируемый вариант специального метода локального поиска, в котором вспомогательные негладкие выпуклые задачи решались известным методом недифференцируемой оптимизации, называемым r-алгоритмом Н.З. Шора.

Далее был проведен численный эксперимент по сравнению АГП для решения нелинейных систем с Matlab-солвером STRSCNE[8]. Сравнение осу-

[8]Bellavia S., Macconi M., Morini B. STRSCNE: A Scaled Trust Region Solver for Constrained Nonlinear Equations // COAP. 2004. V. 28, № 1. P. 31–50.

ществлялось на тестовом поле нелинейных систем уравнений[9] с использованием различных стартовых точек. Время на решение каждой системы ограничивалось 10 минутами. Отметим, что в двух из девяти систем солверу STRSCNE не удалось получить решение из предложенной стартовой точки, в то время как АГП во всех случаях получил глобальное решение.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [1, 4–6, 11].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Для решения линейных задач дополнительности со знаконеопределенными матрицами предложен и обоснован алгоритм, основанный на теории глобального поиска для задач минимизации d.c. функций (функций, представимых в виде разности двух выпуклых функций). Проведен вычислительный эксперимент по сравнению разработанного алгоритма с существующими подходами, показавший эффективность нового алгоритма на широком спектре тестовых примеров различной размерности.

2. Для линейных двухуровневых задач разработаны алгоритмы локального и глобального поисков оптимистических решений, позволяющие решать задачи высокой размерности (до 500 переменных на каждом уровне). Предложенные алгоритмы базируются на взаимосвязях линейных двухуровневых задач и невыпуклых задач математического программирования с нелинейными ограничениями-равенствами, а также теории глобального поиска в задачах с d.c. ограничениями.

3. Разработан и обоснован специальный метод решения d.c. уравнений со многими переменными. Доказана теорема сходимости предложенного метода, проведен численный эксперимент, который показал возможность применения данного метода для поиска допустимых по ограничению-равенству точек. Разработан алгоритм решения систем d.c. уравнений, основанный на теории глобального поиска для негладких задач d.c. минимизации, подтвердивший свою эффективность на серии тестовых примеров.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Петрова Е.Г., Стрекаловский А.С. О решении систем нелинейных алгебраических уравнений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 24(4). С. 30–36.

[9] Роозе А., Кулла В., Ломп М., Мерессоо Т. Набор тестовых систем нелинейных уравнений. Таллин: Валгус, 1989.

2. Мазуркевич Е.О., Петрова Е.Г., Стрекаловский А.С. О численном решении линейной задачи дополнительности // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 8. С. 1385–1398.

3. Груздева Т.В., Петрова Е.Г. Численное решение линейной двухуровневой задачи // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 10. С. 1715–1726.

4. Петрова Е.Г., Стрекаловский А.С. О вариационных методах решения систем нелинейных уравнений // Тр. XIII Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2005. Т. 1. С. 319–324.

5. Петрова Е.Г. Вариационный подход для решения систем нелинейных уравнений // Материалы III Всерос. конф. "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск, 2006. С. 151.

6. Стрекаловский А.С., Петрова Е.Г. О вариационном подходе при решении систем нелинейных уравнений // Материалы II Всерос. конф. "Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы" (Улан-Удэ, Байкал, 1–4 июля, 2006 г.). Иркутск, 2006. С. 139–145.

7. Стрекаловский А.С., Петрова Е.Г. Вариационный подход к линейной задаче о дополнительности // Материалы Рос. конф. "Дискретная оптимизация и исследование операций" (Владивосток, 7–14 сентября 2007 г.). Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. С. 112.

8. Strekalovsky A.S., Petrova E.G. On an approach to linear complementarity problem // The Second Intern. Conf. on Optimization and Optimal Control. Ulaanbaatar (Mongolia), 2007. P. 40–41.

9. Петрова Е.Г., Груздева Т.В. Линейные двухуровневые задачи как задачи оптимизации с невыпуклым ограничением // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2008. Т. 1. С. 596–601.

10. Петрова Е.Г. Численное решение линейных двухуровневых задач высокой размерности // Материалы IV Всерос. конф. "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск, 2008. С. 189.

11. Петрова Е.Г., Стрекаловский А.С. Процедура выпуклой комбинации для решения d.c. уравнений // Тез. докл. XI Байкальской школы-семинара молодых ученых "Математическое моделирование и информационные технологии" (Иркутск, 15–21 марта 2010 г.). Иркутск, 2010. С. 63.

12. Petrova E.G., Gruzdeva T.V. The linear bilevel problems via nonconvex constraint problems // Proc. of the Toulouse global optimization workshop. 2010. P. 123–126.

Редакционно-издательский отдел
Учреждения Российской академии наук
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
Подписано к печати 2.03.2011
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 4. Тираж 120 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН