Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
Министерство образования и науки Российской Федерации

На правах рукописи

Орлов Сергей Сергеевич

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор М. В. Фалалеев

ИРКУТСК — 2013

Оглавление

Введение

Представляемая работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности решений начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах. Специфика подобных объектов проявляется в их двойственной природе. Неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последействием, наследственностью или динамической памятью. Математическое описание законов функционирования таких объектов было предложено В. Вольтерра (в серии статей 1909 года) на основе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, которые впоследствии были названы его именем, и остается актуальным в настоящее время.

Отличительной особенностью изучаемых в работе интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах является их нерегулярность (сингулярность, вырождение), которая состоит в наличии необратимого оператора при старшей производной. Для таких объектов неприменимы теоремы, которые справедливы в регулярных случаях. Не допускают прямого распространения и методы исследования вырожденных линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Это порождает необходимость разработки аппарата, который, во-первых, позволил бы работать именно с интегро-дифференциальными уравнениями, во-вторых, был согласован с уже известными идеями, развитыми для вырожденных дифференциальных уравнений. С другой стороны, уравнение в абстрактных пространствах зачастую является краткой операторной записью какой-либо содержательной задачи математической физики или даже целого ряда задач. Неразрешенные относительно старшей производной по времени линейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (в иной терминологии уравнения *соболевского* типа) возникают в математической теории термовязкоупругости [101,104,129,137], гидродинамике [35,56], физике плазмы [42] и многих других областях. Системы линейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей коэффициентов при производной широко используются, например, в электротехнике [72,109]. Тем самым, помимо исключительно теоретического интереса, рассматриваемые задачи актуальны с точки зрения приложений.

Тематике интегро-дифференциальных уравнений посвящена обширная библиография. Подробный обзор достижений в этой области до 1962 года представлен М. М. Вайнбергом в статье [11]. Не ставя перед собой задачи охватить целый отдел современной математической науки, приведем некоторые работы, касающиеся интегро-дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах.

На необходимость рассмотрения операторных уравнений Вольтерра впервые указал академик М. М. Лаврентьев в своем докладе [39] на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году. Эти уравнения нашли широкое применение в теории обратных и некорректных задач математической физики и интегральной геометрии. Некоторые результаты исследований в этих областях изложены в монографии [40], в которой также рассмотрена задача Коши

$$\frac{d}{dt}u(t) = Bu(t) + \int\limits_0^t A(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t),\ u(0) = 0,$$

где $u(t) \in C([0, T], U)$ — неизвестная функция, U — гильбертово пространство, $A(t, \tau)$ — непрерывное по совокупности переменных ограниченное семейство линейных непрерывных операторов с областями определения и значений в U, B — замкнутый (необязательно ограниченный) оператор, удовлетворяющий условию $B^*B - BB^* \geq 0$. При этих предположениях доказана единственность решения рассматриваемой задачи и его непрерывная зависимость от правой части $f(t)$. Аналогичные задачи в банаховых и гильбертовых пространствах с начальным условием $u(0) = u_0$ и ядром $A(t, \tau) \equiv A(t-\tau)$ при различных предположениях изучались в работах K. B. Hannsgen [120], R. K. Miller и R. L. Wheeler [128], G. Chen и R. C. Grimmer [105], G. Da Prato и M. Iannelli [107], W. Arendt и H. Kellermann [97].

В статье R. C. Grimmer [117] исследована начальная задача

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t, s)x(s)ds + f(t),\ t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0 \in X,$$

где X — банахово пространство, $A(t),\ B(t, s)$ — замкнутые линейные операторы с областями определения, не зависящими от переменных t и s, причем $\overline{D(A)} = X$ и $D(B) \subseteq D(A)$, функция $f : \mathbb{R}_+ \to X$ сильно непрерывна. Исходная задача сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, решение которого строится с помощью операторной резольвенты. В качестве приложения полученных результатов проведено исследование системы интегро-дифференциальных уравнений сверточного типа в частных производных, которые в современной литературе [18, 133] носят названия уравнений Гуртина–Пипкина по фамилиям авторов статьи [119]. Аналогичная задача изучалась в гильбертовом пространстве G. Da Prato и M. Iannelli [108], когда $A(t)$ при каждом значении $t \geq 0$ является инфинитиземальным генератором сильно непрерывной полугруппы операторов, а интегральная часть имеет специальный сверточный вид. На основе "энергетического равенства" доказаны существование и единственность сильного и классического решений соответствующей начальной задачи.

В работах M. G. Crandall, S.-O. Londen и J. A. Nohel [106], а также V. Barbu и M. A. Malik [100] исследован специальный класс интегро-дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) + Bu(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + \int_0^t b(t-s)u(s)ds = f(t),\ t \geq 0,$$

где A — линейный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, B — нелинейный монотонный оператор, $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции. Получены условия существования и единственности решения начальной задачи, изучено его поведение при $t \to +\infty$. Используется идея редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Абстрактные результаты иллюстрируются примерами начально-краевых задач о тепловых потоках наследственного типа.

Задача Коши вида

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t) \ \text{ для } \ t \in [0, T], \\ u(0) = x \ \text{ и } \ u'(0) = y, \end{cases}$$

с замкнутым линейным оператором A, область определения которого не обязательно плотна в банаховом пространстве X, и сильно измеримым семейством ограниченных операторов $B(t)$, действующих из $D(A)$ в X, изучена в работах H. Oka [131,132]. Получены достаточные условия существования и единственности слабого и классического решений задачи на основе ее редукции к сверточному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С помощью доказанных теорем решены две содержательные начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

В серии работ Н. Д. Копачевского [1, 33–35] объектами исследований выступают интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра

$$\frac{du}{dt} = A_0 u(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds + f(t),\ u(0) = u^0,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t),\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1,$$

в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$, где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, действующие в $\mathcal{E}$, $G_k(t,s)$ — оператор-функции со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Также в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается начальная задача

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t),$$

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1,$$

с самосопряженными операторами B, F и G. Оператор A, называемый оператором кинетической энергии, предполагается тождественным, т. е. соответствующее интегро-дифференциальное уравнение является разрешенным относительно старшей производной. Средствами теории полугрупп операторов, операторных косинус- и синус-функций и теории операторных $(M-N)$-функций, примененных к соответствующим "укороченным" уравнениям (все $G_k(t,s) \equiv \mathbb{O}$), исходные начальные задачи сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, а затем при определенных условиях доказывается существование и единственность их решений. Абстрактные результаты иллюстрируются на многочисленных примерах задач гидродинамики.

В работах В. В. Власова, Н. А. Раутиан и А. С. Шамаева [17, 18] доказана корректная разрешимость начальных задач

$$\frac{dv}{dt} + \int_0^t K(t-s) A^2 v(s) ds = q(t),\ t > 0,$$

$$v(+0) = \psi_0,$$

и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + K(0)A^2\frac{du}{dt} + \int\limits_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t),\ t > 0,$$

$$u(+0) = \varphi_0,\ u^{(1)}(+0) = \varphi_1.$$

в пространстве типа Соболева $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ с весом. Здесь A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H и имеющий компактный обратный, скалярная функция $K(t)$ представляет собой ряд из экспонент, сходящийся при $t = 0$. Исследован спектр соответствующих интегро-дифференциальных операторов Вольтерра сверточного типа. На этой основе изучен вопрос существования, единственности и гладкости решений начально-краевых задач для уравнений Гуртина–Пипкина [119], которые отражают релаксационный закон распространения волн и являются реализациями рассматриваемых начальных задач.

Обратные задачи для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки исследовались в совместных работах профессоров А. И. Прилепко и A. Lorenzi [125, 126]. В работе [126] доказана однозначная разрешимость задачи идентификации функции $u : [0, T] \to X$ и элемента $z \in Z$, удовлетворяющих абстрактному интегро-дифференциальному уравнению

$$u'(t) = Au(t) + \int\limits_0^t H(t-s)Au(s)ds + \\ + \int\limits_0^t H_0(t-s)u(s)ds + E(t)z + f(t),\ 0 \le t \le T,$$

начальному

$$u(0) = \psi_0,$$

и дополнительному

$$\Phi(u) = \psi_1$$

условиям, где X и Z — банаховы пространства, A — замкнутый линейный оператор, H, H_0, E и Φ — ограниченные линейные операторы. В современной литературе такие задачи называтся задачами "прогноз-управление", а дополнительные условия — данными переопределения или наблюдения [58, 81, 135].

Другим обратным задачам — задачам восстановления памяти (функциональной части ядра сверточного линейного интегро-дифференциального уравнения) посвящены работы А. Л. Бухгейма, Н. И. Калиткиной, В. Б. Кардакова [8–10]. В частности, в [9] рассматриваются задачи

$$u_t - Au = \int\limits_0^t h(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + f(t),\ t \in [0,\, T]\,,$$

$$u(0) = u_0,\ \Phi\,[u(t)] = \varphi(t),$$

и

$$u_{tt} - Au = \int\limits_0^t h(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + f(t),\ t \in [0,\, T]\,,$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \Phi\,[u(t)] = \varphi(t),$$

где u_0, u_1 — заданные элементы банахова пространства X, $f : [0,\, T] \to X$ — известная функция, B — замкнутый линейный оператор с плотной в X областью определения, $\varphi : [0,\, T] \to \mathbb{R}$ — заданная функция, $\Phi \in X^*$ — известный функционал. Оператор A таков, что $\overline{D(A)} = X$, и является непрерывно обратимым, кроме того, предполагается инфинитиземальным генератором сильно непрерывной полугруппы (в первой задаче), порождающим оператором семейства косинус-функций (во второй задаче). Требуется определить пару функций $u : [0,\, T] \to X$, $h : [0,\, T] \to \mathbb{R}$. Эти обратные задачи решаются на основе редукции к системам нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, к которым затем применяются методы Ньютона и последовательных приближений (с доказательством их глобальной сходимости).

Исследованию уравнения

$$(Bu(t))' = Au(t) + f\big(t, u(t), \int\limits_0^t k(t, s, u(s))ds\big),\ t \in (0, a]\,,$$

с нелокальными условиями

$$u(0) + g\big(t_1, t_2, \ldots, t_p, u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_p)\big) = u_0,$$

посвящены работы международного коллектива авторов, возглавляемого профессором K. Balachandran [99]. Здесь $f : I \times X \times X \to Y$, $k : I \times I \times X \to X$ и $g : I^p \times X^p \to X$ — заданные отображения, X, Y — банаховы пространства, $I = [0, a]$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_p \leq a$, A и B — замкнутые линейные операторы из X в Y, причем $D(B) \subset D(A)$. В предположении непрерывной обратимости оператора B на основе классической теории полугрупп операторов и принципа Шаудера доказывается существование решения рассматриваемой задачи. В статье [98] изучен вопрос управляемости. Последние достижения коллектива в исследовании абстрактных интегро-дифференциальных уравнений см. в [138].

Почти во всех приведенных работах полученные результаты иллюстрируются примерами содержательных начально-краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, которые являются реализациями исходных абстрактных объектов. Однако, в ряде случаев исследование таких начально-краевые задач осуществляется методами, не использующими редукцию к абстрактным операторным аналогам. Сюда следует отнести работы M. E. Gurtin и A. C. Pipkin [119], M. E. Lord [124], А. С. Калашников [31], F. Bloom [102], Н. И. Шкиль, А. Н. Вороной и В. Н. Лейфура [95], А. А. Ильюшин и Б. Е. Победря [30], в том числе, по численным методам [57], D. Guidetti [118]; по обратным задачам M. Grasselli, С. И. Кабанихин и A. Lorenzi [116, 122], А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина и В. Б. Кардаков [10], J. Janno [121]; по вопросам управляемости H. Gao, P. Lei и B. Zhang [115], L. Pandolfi [133] и многие другие.

В упоминаемых до сих пор работах отечественных и зарубежных авторов рассматривались абстрактные интегро-дифференциальные, когда операторный коэффициент при старшей производной дифференциальной части является тождественным либо непрерывно обратимым оператором. Для исследования таких случаев доступны методы теории полугрупп операторов, теории интегральных уравнений, спектрального анализа линейных операторов, энергетических оценок (для уравнений в частных производных) и многие другие. При этом существование и единственность решений начальных задач в разных классах функций имеет место при очень естественных ограничениях ее *входных данных*: начальных условий Коши, свободной функции, операторных коэффициентов и ядра интегральной части. Ситуация существенно усложняется, когда в главной части абстрактного уравнения или уравнения в частных производных появляется необратимый оператор, и оно становится не разрешенным относительно старшей производной. Тогда для однозначной разрешимости начальных задач требуются более жесткие ограничения.

Интерес к вырожденным (в иной терминологии сингулярным или соболевского типа) дифференциально-операторным уравнениям проявляется с середины прошлого века, им посвящена обширная библиография. Наиболее известными в этой области являются работы Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, А. В. Синицына и М. В. Фалалеева [127], Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова [143], Ю. Е. Бояринцева [3, 4], В. Ф. Чистякова и А. А. Щегловой [91], В. К. Иванова, И. В. Мельниковой и А. И. Филинкова [29], A. Favini и A. Yagi [112], И. С. Егорова, С. Т. Пяткова и С. В. Попова [25, 136], Х. Гаевского, К. Грегера и К. Захариаса [20], H. O. Fattorini [111], R. Showalter [141, 142], А. И. Кожанова [32, 123], Г. В. Демиденко и С. В. Успенского [24], С. Г. Крейна и Н. И. Чернышева [37], Ю. М. Далецкого и М. Г. Крейна [23] и др. Последними по времени и наиболее важными для приложений основ общей теории вырожденных интегро-дифференциальных уравнений являются, на взгляд автора, результаты, изложенные в монографиях А. Г. Свешникова, С. А. Габова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [19, 42, 60]. Во всех приведенных работах большое внимание уделяется сингулярным дифференциальным уравнениям и существенно меньшее интегро-дифференциальным. Далее более подробно рассмотрим те работы, в которых изучаются именно интегро-дифференциальные уравнения с вырождениями в абстрактных пространствах.

Класс уравнений вида

$$MD_tu(t) + Lu(t) = \int_0^t k(t-s)L_1u(s)ds + f(t),\ 0 \leq t \leq \tau,$$

где L, L_1, M — замкнутые линейные операторы в комплексном банаховом пространстве X, причем $D(L) \subseteq D(L_1) \cap D(M)$, L — непрерывно обратимый оператор, M — вообще говоря, необратимый оператор, $k(t)$ — скалярная суммируемая функция, является объектом исследований в статьях A. Favini, A. Lorenzi и H. Tanabe [113, 114]. В работе [113] рассмотрена задача с начальным условием $Mu(0) = Mu_0$. Доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи путем ее сведения к регулярному интегро-дифференциальному включению с нелинейными многозначными операторными коэффициентами. Обратная задача восстановления ядра $k(t)$ изучена в [114].

Авторами C. Lizama и R. Ponce (см. [134] и библиографию к ней) исследован вопрос существования и единственности периодического решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}(Mu(t)) = Au(t) + \int_{-\infty}^t a(t-s)Au(s)ds + f(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

без предположения непрерывной обратимости или коммутативности суперпозиции операторных коэффициентов M и A — замкнутых линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X. В условиях непрерывной обратимости операторного пучка $\lambda M - (1 + \tilde{a}(\lambda))A$ на специальном счетном множестве комплексных значений λ, где $\tilde{a}(\lambda)$ —

изображение преобразования Лапласа скалярной суммируемой по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функции $a(t)$, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (с условием $Mu(0) = Mu(2\pi)$) в классах типа Лебега–Бохнера, Гельдера, Бесова и Трибеля–Лизоркина абстрактных периодических функций. Используется техника интегральных преобразований функций со значениями в банаховых пространствах.

В статье S. Q. Bu и G. Cai [103] аналогичными методами решена задача

$$(Mu)''(t) + \alpha(Mu)'(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} a(t-s)Au(s)ds + f(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$Mu(0) = Mu(2\pi),\ (Mu)'(0) = (Mu)'(2\pi),$$

здесь α — отличная от нуля постоянная величина, остальные обозначения заимствованы из предыдущего абзаца.

В работах В. Е. Федорова и О. А. Стахеевой [69,90] изучена локальная разрешимость задачи Коши вида

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + (Ju)(t) + f(t),\ u(0) = u_0,$$

где $(Ju)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds$, L — непрерывный, а M — замкнутый линейные операторы, действующие из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, $\overline{D(L)} = \mathfrak{U}$, $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, $t \geq 0$ — семейство линейных непрерывных операторов. На основе идеи разложения пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы в условиях сильной (L,p)-секториальности оператора M исходное уравнение редуцируется к паре интегро-дифференциальных уравнений, в которых при дополнительных предположениях на ядро $\mathcal{K}(t)$ нивелируются интегральные слагаемые. В статье [90] рассмотрен регулярный случай $L = \mathbb{I}$ с интегральным слагаемым $(Ju)(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(s)u(t-s)ds$.

В иркутской математической школе исследованиям в области интегро-дифференциальных уравнений положил начало профессор В. В. Васильев [13–15]. Им и его учениками Н. А. Сидоровым [68], Г. А. Шишкиным [94], В. Г. Трубиным [71], В. С. Шароглазовым [93], И. И. Беловым [2] и др. изучались общие и специальные вопросы теории обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма, систем таких уравнений с различными особенностями. Интегро-дифференциальные уравнения с частными производными рассматривал в своих работах профессор А. И. Янушаускас [96]. Исследование вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах началось с пионерской работы [65] профессора Н. А. Сидорова, в которой изучается разрешимость в классе непрерывных функций абстрактного интегрального уравнения Вольтерра

$$Bu(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),$$

где B и $k(t)$ — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, область определения $D(k)$ оператор-функции $k(t)$ не зависит от t, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(k)} = E_1$ и $D(B) \subseteq D(k)$, а оператор B фредгольмов. Используется регуляризация уравнения на основе разложения банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы в соответствии с обобщенной жордановой структурой оператора B. В работе [66] к этому уравнению применен аппарат распределений со значениями в банаховых пространствах — аналог классической теории обобщенных функций Соболева–Шварца [16, 21], разработанный Н. А. Сидоровым и М. В. Фалалеевым в [67]. Впервые доказаны теоремы об однозначной разрешимости вырожденного интегрального уравнения в классе функций с ограниченным слева носителем и предложен метод покомпонентного восстановления регулярной и сингулярной составляющих обобщенного решения, изучена связь между обобщенным и классическим решениями. Отметим, что вполне завершенная теория обобщенных решений вырожденных систем дифференциальных уравнений была создана к тому времени усилиями научной школы профессора С. Т. Завалищина (см. монографию [26] и библиографию к ней). Однако, разработанные ими методы не допускали прямого обобщения на случай бесконечномерных пространств, что отчасти и послужило дополнительным стимулом к созданию теории распределений в банаховых пространствах. С конструктивной точки зрения методика работ [65] и [66] представляет собой сведение рассматриваемых задач к системам линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Эти идеи распространены М. В. Фалалеевым на более сложные объекты — вырожденные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра высокого порядка с переменными операторными коэффициентами [89, 127]. При исследовании нестационарных уравнений в банаховых пространствах удалось существенно обобщить результаты Н. А. Магницкого [44], С. Г. Крейна и И. В. Сапронова [38] по аналитической теории систем интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода (см. [110, 127]), а также корректно сформулировать и решить задачу о построении решений этих уравнений в классе распределений с ограниченным слева носителем [139]. В настоящее время аналитическая теория систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода, численные методы их решения и приложения получили дальнейшее развитие в работах Д. Н. Сидорова [62, 63].

В случае конечномерных пространств наиболее завершенные результаты в области сингулярных интегро-дифференциальных уравнений получены М. В. Булатовым и Е. В. Чистяковой [5–7, 92]. Ими, в частности, разработаны аналитические и численные методы решения систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + f(t), t \in [0,1]\,,$$

с тождественно вырожденной матрицей $A(t)$, т. е. $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0,1]$.

Отметим тот факт, что во всех упоминаемых до сих пор работах авторы указывали на неразрешимость в общем случае начальных задач для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений, т. е. для существования гладкого решения требуется согласование входных данных задачи. Тем самым, первичной проблемой в таких исследованиях является описание множества входных данных, при которых имеет место однозначная разрешимость. Как стало известно из работ [66, 67], для существования обобщенного решения дополнительных ограничений уже не требуется, и в результате был сформирован следующий подход: построить решение рассматриваемой задачи в классе распределений, а затем выявить условия, при которых оно окажется классическим. Построение обобщенного решения возможно двумя способами. Одним из них является упомянутый выше метод покомпонентного восстановления регулярной и сингулярной составляющих. Но при таком подходе единственность фактически имеет место лишь в "зауженном" классе распределений, определяемом видом самого решения. Этого недостатка лишен другой способ, разработанный профессором М. В. Фалалеевым. Основным инструментом предложенного метода является фундаментальная оператор-функция, соответствующая вырожденному дифференциальному оператору в банаховых пространствах — аналог классического понятия фундаментального решения (функции влияния) [16, 21]. Обобщенное решение начальной задачи восстанавливается как свертка фундаментальной оператор-функции с правой частью уравнения, причем доказательство существования и единственности не требует громоздких выкладок. Знание фундаментальной оператор-функции позволяет записать в замкнутой форме единственное обобщенное решение, принадлежащее классу распределений с ограниченным слева носителем, а уже затем легко определить условия существования и явный вид классического решения, не прибегая к его непосредственному построению. Таким образом, вопрос однозначной разрешимости начальных задач в классах распределений и функций конечной гладкости удается изучать комплексно.

Конструкция фундаментальной оператор-функции показала свою эффективность при исследовании дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, в том числе и высоких порядков, систем операторно-дифференциальных уравнений, некоторых классов абстрактных уравнений с частными производными [22, 36, 82]. Также с ее помощью в работах [84, 88, 127] исследованы сверточное интегральное уравнение

$$Bu(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t)$$

и задача Коши

$$Bu'(t) - Au(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t), u(0) = u_0$$

с фредгольмовым оператором B. Однако за пределами этих исследований оказались интегро-дифференциальные уравнения высоких порядков. Этот пробел призвана восполнить настоящая работа.

Следует отметить, что в упоминаемых до сих пор работах объектами исследования являются линейные интегро-дифференциальные уравнения с дифференциальными частями первого, реже второго, порядков (параболические и гиперболические абстрактные интегро-дифференциальные уравнения). Однако, для приложений зачастую требуются более высокие порядки дифференциальных частей по времени: второй, третий и даже четвертый. Тем самым, исследование вырожденных интегро-дифференциальных уравнений именно высоких порядков актуально как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Краткое содержание диссертации

Первая глава носит преимущественно вспомогательный характер. Здесь последовательно изложены сведения о жордановых наборах фредгольмовых и нетеровых операторов, псевдообращении линейных операторов, а также введены некоторые понятия теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

Первый пункт этой главы (п. 1.1) посвящен обобщенной жордановой структуре фредгольмовых операторов. Пусть E_1, E_2 — вещественные банаховы пространства, B — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = E_1$. Будем предполагать, что B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) < +\infty$. Обозначим $n = \dim N(B)$ — размерность ядра (нуль-пространства) $N(B)$ оператора B, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — соответствующие им биортогональные системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i,\ \gamma_j \rangle = \langle z_i,\ \psi_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Введем проекторы $P : E_1 \to N(B),\ Q : E_2 \to \operatorname{span}\{z_i\}_{i=1}^n$, действующие по формулам

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle \varphi_i,\ Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \psi_i \rangle z_i,$$

и ограниченный оператор $\Gamma : E_2 \to D(B)$,

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

называемый *оператором Треногина–Шмидта.*

Справедливы следующие равенства

$$\Gamma z_i = \varphi_i,\ \Gamma^* \gamma_i = \psi_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.1}$$

$$\Gamma B = \mathbb{I}_1 - P,\ B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q. \tag{1.1.2}$$

Здесь и далее в работе $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в пространствах E_1 и E_2.

Определение 1.1.1. *Обобщенной жордановой цепочкой* базисного элемента $\varphi_i \in N(B)$ относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ (или короче $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочкой) называется конечный набор элементов

$$\left\{ \varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(2)}, \ldots,\ \varphi_i^{(p_i)} \right\} \subset E_1,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k+1)} = l_k(\varphi_i),\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

которые, в соответствии с альтернативой Фредгольма [70], разрешимы, если выполнены условия

$$\langle l_k(\varphi_i),\ \psi_j \rangle = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

(речь идет о второй группе уравнений, первое разрешимо и $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$). Здесь введено обозначение

$$l_k(\varphi_i) = \sum_{q=1}^{k} \mathcal{F}^{(k-q)}(0)\varphi_i^{(q)}.$$

Число $p_i \in \mathbb{N}$ принято называть *длиной* $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочки, а вектор $\varphi_i^{(k+1)}$ — $\mathcal{F}(t)$-*присоединенным элементом* k-*го порядка* к элементу φ_i, причем справедлива формула

$$\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma l_k(\varphi_i),\ k = 1, \ldots, p_i - 1.$$

Условие обрыва цепочки присоединенных элементов на p_i-м шаге состоит в том, что не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle,\ j = 1, \ldots, n$ равны нулю, т. е. в неразрешимости относительно $\varphi_i^{(p_i+1)}$ уравнения

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} = l_{p_i}(\varphi_i).$$

Определение 1.1.2. Построив по описанному правилу для каждого $\varphi_i \in N(B)$ свою $\mathcal{F}(t)$-жорданову цепочку, получим систему элементов

$$\left\{\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i\right\} \subset E_1,$$

называемую *обобщенным жордановым набором* фредгольмова оператора B относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ (или короче $\mathcal{F}(t)$-*жордановым набором* фредгольмова оператора B).

Определение 1.1.3. Жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ принято называть *полным*, если выполняется условие

$$\det \|\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle\|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0.$$

Также здесь обсуждается двойственная жорданова структура: $\mathcal{F}^*(t)$-жорданов набор оператора B^*. Сведения о классическом A-жордановом наборе фредгольмова оператора B [12] приведены в п. 1.1 в качестве заключительного замечания 1.1.6 (случай $\mathcal{F}(t) \equiv A$).

В п. 1.2 оператор B предполагается нетеровым, т. е. таким, что $\overline{R(B)} = R(B)$, а $\dim N(B)$ и $\dim N(B^*)$ конечны, но не совпадают. Пусть $n =$

$\dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$. Число $\chi = n - m$ называется *индексом* нетерова оператора B [12]. Далее обозначены $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — базис в $N(B^*)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_j\}_{j=1}^m \subset E_2$ — соответствующие им биортогональные системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i, \gamma_\alpha \rangle = \delta_{i\alpha},\ i, \alpha = 1, \ldots, n \ \text{ и } \ \langle z_\beta, \psi_j \rangle = \delta_{\beta j},\ \beta, j = 1, \ldots, m.$$

Изложение начинается с обсуждения понятия псевдообратного оператора B^+ (B^{*+}) [130] для нетерова оператора B (B^*). Затем вводятся в рассмотрение система элементов

$$\varphi_i^{(k)} = \left(B^+ A\right)^{k-1} \varphi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, n,\ k \geq 2,\ \varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \tag{1.2.1}$$

а также одно из основных в этом пункте определений

Определение 1.2.1. Пусть элементы $\varphi_i^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$B\varphi_i^{(k+1)} = A\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

и неравенствам

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)},\ i = 1, \ldots, n,$$

соответственно, причем

$$\operatorname{rang} \left\| \left\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k \right\rangle \right\|_{i=1,\ldots,n,\, k=1,\ldots,m} = \min(n, m) = l.$$

В этом случае говорят, что вектора $\varphi_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p_i$, образуют *полный A-жорданов набор* нетерова оператора B.

Далее аналогичным образом определяется A^*-жорданов набор оператора B^*. В заключении приведены преобразования базисов в $N(B)$ и $N(B^*)$, использование которых существенно упрощает дальнейшую работу с жордановой структурой нетерова оператора.

Элементы теории обобщенных функций в банаховых пространствах изложены в п. 1.3. Пусть E — вещественное банахово пространство, E^* — сопряженное к нему банахово пространство.

Определение 1.3.3. *Обобщенной функцией (распределением)* $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E называется всякий линейный непрерывный функционал $(f, s(t))$, заданный на $K(E^*)$. Здесь под $K(E^*)$ понимается так называемое *пространство основных функций*, к которому относятся все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*.

Множество $K'(E)$ всех обобщенных функций со значением в E, заданных таким образом, является линейным пространством, полным в смысле сходимости

Определение 1.3.4. Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если

$$(f_n, s(t)) \xrightarrow{n \to +\infty} (f, s(t)), \ \forall\ s(t) \in K(E^*).$$

Отметим, что $K'(E)$ имеет идейное сходство с множеством $\mathscr{D}'$ классических обобщенных функций Соболева–Шварца [16], поэтому в работе пропущены некоторые известные определения и утверждения, которые приводятся традиционно (см., например [82,88,127]). Более подробно описан класс $K'_+(E)$ *распределений с ограниченным слева носителем*, т. е. носители которых сосредоточены на луче $[\ 0,\ +\infty\,)$.

Определение 1.3.5. Пусть $\mathcal{K}(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, причем $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует почти при всех $t \in \mathbb{R}$. *Действием оператор-функции* $\mathcal{K}(t)$ на распределение $f(t) \in K'_+(E_1)$ называется обобщенная функция $\mathcal{K}(t)f(t) \in K'_+(E_2)$, определяемая следующим образом:

$$(\mathcal{K}(t)f(t),\ s(t)) = (f(t),\ \mathcal{K}^*(t)s(t))\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*).$$

Определение 1.3.6. Пусть $\mathcal{K}(t)$ — оператор-функция из определения 1.3.5, $h(t) \in \mathscr{D}'$, тогда произведение $\mathcal{K}(t)h(t)$ (формальное выражение) назовем *обобщенной оператор-функцией.* Действие обобщенной оператор-функции на элемент $f \in E_1$ осуществляется по правилу

$$(\mathcal{K}(t)fh(t),\ s(t)) = \big(h(t),\ \big\langle f,\ \mathcal{K}^*(t)s(t)\big\rangle\big)\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*),$$

т. е. $\mathcal{K}(t)fh(t) \in K'(E_2)$.

Определение 1.3.7. *Сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)h(t)$, $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и обобщенной функции $f(t) \in K'_+(E_1)$ называется распределение $\mathcal{K}(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$, определяемое равенством

$$(\mathcal{K}(t)h(t) * f(t),\ s(t)) = \\ = (h(t),\ (f(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau))),\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*). \quad (1.3.1)$$

Замечание 1.3.2. Корректность этого определения гарантируется ограниченностью слева носителей функций $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$ и доказывается по схеме, аналогичной применяемой в [16] при доказательстве существования свертки в алгебре $\mathscr{D}'_+$.

В этом же пункте приведены формулы для вычисления наиболее часто встречающихся далее в работе сверток (см. примеры 1.3.2 и 1.3.3).

Отдельный пункт 1.4 посвящен понятию фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора, которое занимает центральное место в работе.

Линейному интегро-дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - \ldots - \\ - A_1u'(t) - A_0u(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds$$

поставим в соответствие следующую обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A_{N-1}\delta^{(N-1)}(t) - \ldots - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t).$$

Здесь $B,\ A_{N-1}, \ldots, A_1,\ A_0,\ k(t)$ — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, свойства которых будем уточнять отдельно в каждом конкретном случае.

Определение 1.4.1. *Фундаментальной оператор-функцией* интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ назовем обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}_N(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t),\ \forall\ v(t) \in K'_+(E_1),$$

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Замечание 1.4.1. Смысл этой конструкции состоит в следующем: если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, то, в силу второго равенства, сверточное уравнение вида

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * u(t) = f(t),$$

где $f(t) \in K'_+(E_2)$, имеет своим решением обобщенную функцию

$$u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) \in K'_+(E_1),$$

причем это решение единственно. Действительно, если существует $v(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $v(t) \neq u(t)$ и $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = f(t)$, то, с учетом первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции, получим

$$v(t) = \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) = u(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения $u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t)$ исходного сверточного уравнения в классе $K'_+(E_1)$.

Далее приведены классические примеры фундаментальных оператор-функций для дифференциального оператора

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t),$$

где A — некоторый ограниченный, а $\mathbb{I}$ — тождественный операторы в банаховом пространстве E, и интегрального оператора

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta(t) - k(t)\theta(t),$$

с ядром $k(t)$, которое является однопараметрическим семейством класса $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ограниченных в E операторов (см. примеры 1.4.1 и 1.4.2). В последнем обсуждается важное понятие *резольвенты* сверточного интегрального оператора типа Вольтерра с ядром $k(t)$ (или *резольвенты ядра* $k(t)$). Далее описана техника исследования с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции задачи Коши

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots, u^{(N-1)} = u_{N-1}. \qquad (1.4.1)$$

в условиях непрерывной обратимости оператора B. Эта задача в обобщенных функциях принимает вид сверточного уравнения

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \qquad (1.4.2)$$

где $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1u_0)\delta(t) + \\ + (Bu_{N-2} - A_{N-1}u_{N-3} - \ldots - A_2u_0)\delta'(t) + \ldots + \\ + (Bu_1 - A_{N-1}u_0)\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)$$

(см. подробности в замечании 1.4.3). Здесь сформулированы и доказаны следующие теоремы

Теорема 1.4.1. *Пусть $B,\ A_{N-1}, \ldots, A_1,\ A_0$ — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$D(B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{N} D(A_{i-1}) \cap D(k),$$

оператор-функция сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B непрерывно обратим, тогда регулярный интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)),$$

где $R_N(t)$ — резольвента ядра $\mathcal{F}_N(t)B^{-1}$, оператор-функция $\mathcal{F}_N(t)$ задается следующим образом:

$$\mathcal{F}_N(t) = A_{N-1} + A_{N-2}t + \cdots + A_1\frac{t^{N-2}}{(N-2)!}+$$

$$+ A_0 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} k(s) ds.$$

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1, тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное обобщенное решение вида*

$$\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h(s) ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds \Bigg] \theta(t),$$

где $p(t) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$, *функция* $h(t) : \mathbb{R}_+ \to E_2$ *задается следующим образом:*

$$h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),$$

а оператор-функция $R_N(t)$ *из теоремы 1.4.1.*

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1 и* $f(t) \in C(t \geq 0; E_2)$, *тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное классическое решение вида*

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h(s) ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds,$$

где введены обозначения теоремы 1.4.2.

Под *обобщенным* решением начальной задачи (1.4.1) понимается распределение $\tilde{u}(t) \in K'_+(E_1)$, которое обращает в тождество уравнение (1.4.2). *Классическим* решением этой задачи называется функция класса $C([0, +\infty), E_1) \cap C^N((0, +\infty), E_1)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению и начальному условию (1.4.1).

Во **второй главе** изложены результаты исследования начальной задачи для специального класса интегро-дифференциальных уравнений вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds + f(t), \tag{2.0.1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2.0.2}$$

где $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — числовая функция, B, A — линейные операторы. В обобщенных функциях задача Коши (2.0.1), (2.0.2) принимает вид сверточного уравнения

$$\begin{aligned}\big(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)\big) * \tilde{u}(t) =&\\ = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots +&\\ + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),&\end{aligned}$$

единственным решением которого является распределение

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \big(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots +&\\ + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)\big),&\end{aligned}$$

если известен вид $\mathcal{E}_N(t)$ — фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t))$. В пп. 2.1–2.5 такой вид получен в условиях фредгольмовости (п. 2.1) и нетеровости (п. 2.2) оператора B, а также спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка (пп. 2.3–2.5 соответственно). В замечании 2.1.4 введены используемые всюду в **главе 2** обозначения для функций

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-1)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$
$$p(t) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\ ,$$

и функциональной последовательности

$$h_{k-1}(t) + \int\limits_0^t r(t-s)h_{k-1}(s)ds = h_k(t),\ k \in \mathbb{N},$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$, с первым членом

$$h_0(t) = f(t) + Ap(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds.$$

В п. 2.1 доказана теорема

Теорема 2.1.1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k \right],$$

где Γ — оператор Треногина–Шмидта, $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $\left\{ \varphi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i \right\}$ — полный A-жорданов набор оператора B, $\left\{ \psi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i \right\}$ — полный A^*-жорданов набор оператора B^*, $r(t)$ — резольвента ядра $-g(t)$, под k-ой степенью обобщенной функции $(\delta(t) + g(t)\theta(t)) \in \mathscr{D}'_+$ понимается ее повторная k-кратная свертка, т. е.

$$(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k = \underbrace{(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * \dots * (\delta(t) + g(t)\theta(t))}_{k \text{ раз}},$$

причем $(\delta(t) + g(t)\theta(t))^0 = \delta(t)$.

Сходимость соответствующего операторно-функционального ряда (первого слагаемого фундаментальной оператор-функции) обсуждается в замечании 2.1.3, там же приведен эквивалентный вид фундаментальной оператор-функции

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + M_N(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right],$$

где $M_N(t)$ — резольвента ядра $A\Gamma\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0),\ f(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0;\ E_2),\ p=\max_{i=1,\ldots,n}p_i,$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\Bigg[p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\Bigg]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\left\langle h_k^{((k-1)N-q)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t). \quad (2.1.9)$$

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1 и*

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\ f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2),\ p=\max_{i=1,\ldots,n}p_i,$$

тогда, если

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle=0,$$

$$q=1,\ldots,kN,\ k=1,\ldots,p_i,\ j=1,\ldots,p_i-k+1,\ i=1,\ldots,n,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$u(t)=p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}. \quad (2.1.11)$$

Условия сильной гладкости функции $f(t)$ в последних теоремах можно ослабить, заменив на

$$\left\langle f(t),\, \psi_i^{(j)}\right\rangle \in C^{(p_i-j)N}(t\geq 0),\, j=1,\ldots,p_i,\ i=1,\ldots,n,$$

и

$$\left\langle f(t),\, \psi_i^{(j)}\right\rangle \in C^{(p_i-j+1)N}(t\geq 0),\, j=1,\ldots,p_i,\ i=1,\ldots,n,$$

соответственно. Доказательству этих теорем предшествует ряд вспомогательных утверждений, относящихся преимущественно к жордановой структуре фредгольмова оператора B. Все эти утверждения, как и приведенные теоремы, имеют подробные доказательства. Абстрактные результаты этого пункта иллюстрируются примером в конечномерных пространствах $E_2=E_2=\mathbb{R}^2$ — начальной задачей для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. В заключении п. 2.1 сформулированы теоремы для случая обратимого оператора B. Эти утверждения легко получаются из приведенных выше, для этого достаточно заменить Γ на B^{-1} и положить $\varphi_i^{(j)}=0,\, i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,p_i$.

В п. 2.2. рассмотрен случай, когда B нетеров, который, в свою очередь, подразделяется еще на два: отрицательного (т. е. $n<m$) и положительного (т. е. $n>m$) индекса оператора B. При $\chi<0$ оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ того же вида, что и в теореме 2.1.1 является фундаментальной для $B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t)$, но не на всем классе $K'_+(E_2)$, а на его специальном подклассе. Этот факт естественным образом отражается на существовании как обобщенного, так и классического решений задачи Коши, которое теперь имеет при выполнении дополнительных условий на правую часть и начальные данные, причем эти ограничения имеют нелокальный характер:

$$\left\langle h_0(t)+\int_0^t U_N(t-s)h_0(s)ds,\, \psi_\nu\right\rangle=0,\ \nu=n+1,\ldots,m, \qquad (2.2.9)$$

Здесь $U_N(t)$ — резольвента ядра $AB^+\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$, а $h_0(t)$ из замечания 2.1.4. При $\chi > 0$ обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$, но уже с $\psi_i^{(1)} = 0,\ i = m+1,\dots,n$ и произвольными функционалами $\psi_i^{(j)},\ i = m+1,\dots,n,\ j = 1,\dots,p_i$ удовлетворяет только условию

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2),$$

т. е. второму равенству из определения 1.4.1 фундаментальной оператор-функции, "ответственному" за существование обобщенного решения $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t)$. Первое равенство из этого определения не выполняется. Свойством единственности построенные таким образом ни обобщенное, ни классическое решения не обладают, потому как содержат свободные параметры и произвольные функции. Случай нетерова оператора B иллюстрируется примерами начальных задач для переопределенной ($\chi < 0$) и недоопределенной ($\chi > 0$) систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.

В пп. 2.3–2.5 начальная задача (2.0.1), (2.0.2) изучается с точки зрения теории полугрупп операторов с ядрами профессора Г. А. Свиридюка [61, 143]. Рассмотрены случаи относительной спектральной, секториальной и радиальной ограниченности оператора A относительно B (в этих случаях размерность ядра оператора B или длины A-жордановых цепочек могут быть бесконечными). Ограничимся здесь кратким изложением результатов п. 2.3. В начале в удобных для нас обозначениях приводится оригинальная терминология из [61, 143].

Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2),\ A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$. Здесь $\mathcal{C}l(E_1, E_2)$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в банаховом пространстве E_1 и действующих в банахово пространство E_2.

Определение 2.3.1. *Резольвентным множеством* оператора A относительно оператора B (или B-резольвентным множеством оператора A) называется множество

$$\rho^B(A) = \left\{\mu \in \mathbb{C}:\ (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\right\},$$

а оператор-функция $(\mu B - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A относительно оператора B (или B-*резольвентой* оператора A).

Определение 2.3.2. Оператор-функции $R_\mu^B(A) = (\mu B - A)^{-1}B$ и $L_\mu^B(A) = B(\mu B - A)^{-1}$ называются соответственно *правой резольвентой* и *левой резольвентой* оператора A относительно оператора B (или *правой B-резольвентой* и *левой B-резольвентой* оператора A).

Определение 2.3.3. Оператор A называется *спектрально ограниченным* относительно оператора B (или (B, σ)-ограниченным), если $\exists\ a > 0$ такое, что $\{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$.

Замечание 2.3.1. Пусть $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| = r > a\}$, тогда, как показано в [61, 143], пара операторов

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma R_\mu^B(A) d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma L_\mu^B(A) d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P),\ E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q).$$

Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 :\ E_1^0 \to E_2^0,\ B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 :\ E_1^1 \to E_2^1$ ограничен,

$$QB = BP,\ QA = AP.$$

Замечание 2.3.2. Если $\exists\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq \mathbb{O}_1$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} = \mathbb{O}_1$, то бесконечно удаленная точка является *несущественно особой* точкой (либо *устранимой особой* точкой при $p = 0$, либо *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$) B-резольвенты оператора A. В этом случае, согласно [61, 143], (B, σ)-ограниченный оператор A называется *(B, p)-ограниченным.*

Далее доказана следующая теорема

Теорема 2.3.1. *Пусть $B,\ A$ — линейные операторы, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B необратим и A спектрально ограничен относительно B, тогда интег-*

ро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) - \\ - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

здесь и далее $r(t)$ — *резольвента ядра* $(-g(t))$, *степени обобщенных функций понимаются в смысле операции свертки (см. теорему 2.1.1).*

Замечание 2.3.3. Если в теореме 2.3.1 дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка точка B-резольвенты оператора A, то

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) - \\ - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ из замечания 2.3.2.

Замечание 2.3.4. Эквивалентным видом фундаментальной оператор-функции является следующий:

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} * (\mathbb{I}_2\delta(t) + P_N(t)\theta(t))Q - \\ - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}, \quad (2.3.1)$$

где $P_N(t)$ — резольвента ядра $A_1B_1^{-1}\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$, которая является операторно-функциональным рядом, равномерно сходящимся по норме пространства $\mathcal{L}(E_2)$ на любом компакте $[0,\, T]$, причем имеет место оценка

$$\|M_N(t)\|_{\mathcal{L}(E_2)} \le C\exp CT,$$

здесь $C = \left\|A_1B_1^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E_2)} \cdot \max\limits_{t\in[0,\,T]}\left|\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right|$.

Также основными результатами этого пункта являются следующие утверждения

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и* ∞ *является несущественно особой точкой* B*-резольвенты оператора* A*, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{pN}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{pN}(t \geq 0;\ E_2),$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds - \\ - \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t)\Bigg] \theta(t) - \\ - \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^{q+1} \omega_{j-1[q+1]} \delta^{(qN+N-j)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0), \\ j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p.$$

Теорема 2.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1,* ∞ *является несущественно особой точкой* B*-резольвенты оператора* A *и*

$$g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\omega_{j-1[q]} = 0,\ j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$\tilde{u}(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds -$$
$$- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^k A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j = 1, \ldots, N, \ q = 0, \ldots, p.$$

Третья глава посвящена исследованию однозначной разрешимости начальной задачи

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t), \ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1, \ldots, \ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \quad (1.4.1)$$

при условии фредгольмовости оператора B.

Теорема 3.1.1. *Пусть B, $A_{N-1}, \ldots, A_1, A_0$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(t \geq 0)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$\overline{D(B)} = \overline{\bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k)} = E_1, \ D(B) \subseteq \bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k),$$

$k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов и имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции

$$\mathcal{F}_N(t) = A_{N-1} + A_{N-2} t + \cdots + A_1 \frac{t^{N-2}}{(N-2)!} +$$
$$+ A_0 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} k(s) ds,$$

тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K_+^{'}(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \theta(t) * (\mathbb{I}_2 \delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2 \delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t),$$

здесь Γ — оператор Треногина–Шмидта, $R_N(t)$ и $N_N(t)$ — резольвенты ядер $\mathcal{F}_N(t)\Gamma$ и $(-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t))$ соответственно, функция $G(t)$ задается следующим образом:

$$G(t) = ((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)),$$

$\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ *— полный обобщенный $\mathcal{F}_N^*(t)$-жорданов набор оператора B^*.*

Для доказательства основной теоремы применен подход, который существенно снижает громоздкость выкладок.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1, тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное обобщенное решение вида*

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t).$$

Простой анализ формулы $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$ в условиях теоремы 3.1.1 указывает на то, что это распределение представляет собой сумму регулярной и сингулярной составляющих. С помощью метода их покомпонентного восстановления показано, что обобщенное решение задачи Коши (1.4.1) имеет следующую структуру:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = v(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]}\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-1)}(t),$$

где функция $v(t)$ в случае $\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i-j+1}(\mathbb{R}_+)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, принадлежит классу $C(t \geq 0;\ E_1) \cap C^N(t > 0;\ E_1)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}_N(v(t)) = f(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]}k^{(j-1)}(t)\varphi_i^{(k)},$$

и начальным условиям

$$v^{(j-1)}(0) = u_{j-1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-N+j} c_{i\ [k+N-j]}\varphi_i^{(k)},\ j = 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $c_{i\ [j]} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$, определяются единственным образом по формулам

$$c_{i\ [j]} = -\sum_{k=1}^{p_i - j + 1} \left\langle h^{(p_i - j - k + 1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

здесь $h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),\ p(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$.

Обнаружена связь между построенным обобщенным и классическим решениями, которая позволила сформулировать следующий результат.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1 и*

$$\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i - j + 1}(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

тогда, если

$$\sum_{k=1}^{p_i - j + 1} \left\langle h^{(p_i - j - k + 1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

то задача Коши (1.4.1) *имеет единственное классическое решение.*

В конце главы приведены некоторые замечания, касающиеся области применимости доказанных теорем.

Приложениям полученных абстрактных результатов посвящена заключительная **четвертая глава**. Здесь рассмотрены задачи, возникающие в математической теории термовязкоупругости. Всего приведено семь начально-краевых задач: о движении вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта, поперечных колебаниях пластины с памятью, вязкоупруго-динамическом состоянии среды, поперечных колебаниях диссипативной пластины, продольных колебаниях упругого стержня с учетом инерции, колебаниях термоупругой пластины, колебаниях термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле, — для каждой из которых сформулированы четыре утверждения об условиях существования и единственности обобщенного и классического решений в регулярном и сингулярном случаях. Получены также формулы для построения этих решений.

На защиту выносятся следующие результаты

1. Доказаны теоремы о виде фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора специального вида в банаховых пространствах в условиях фредгольмовости и нетеровости главной части, а также спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка. В этих предположениях получены условия существования и единственности обобщенного и классического решений начальной задачи для соответствующего вырожденного интегро-дифференциального уравнения в банаховых пространствах;
2. Построена фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора высокого порядка с фредгольмовым операторным коэффициентом при старшей производной. На этой основе доказана однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши в классах распределений и функций конечной гладкости;
3. Получены условия однозначной разрешимости и формулы решений начально-краевых задач о движении вязкоупругой жидкости, колебаниях пластины с памятью, упругого стержня с учетом инерции, термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле.

Апробация результатов диссертационного исследования

Изложенные в настоящей работе результаты были представлены на следующих научных мероприятиях:

– IV Всесибирский конгресс женщин-математиков памяти С. В. Ковалевской, 15–19 января 2006, Красноярск, СибГТУ;

– Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, 27 апреля 2006, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, 5–11 сентября 2006, Ростов-на-Дону, РГУ;

– Всероссийская научная конференция «Математика. Механика. Информатика», 19–22 сентября 2006, Челябинск, ЧелГУ;

– III межвузовская зональная конференция «Математика и проблемы ее преподавания в вузе», посвященная памяти профессора Б. А. Бельтюкова, 14–17 марта 2007, Иркутск, ИГПУ;

– Научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, посвященная 100-летию профессора В. В. Васильева, 23 апреля 2007, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 12–16 июня 2007, Иркутск, ИДСТУ СО РАН и ИСЭМ им. Л. А. Мелентьева СО РАН;

– Конференция «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий», 29–30 ноября 2007, Иркутск, ИДСТУ СО РАН;

– V Всесибирский конгресс женщин-математиков памяти С. В. Ковалевской, 15–18 января 2008, Красноярск, СФУ;

– Научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, посвященная 90-летию ИГУ, 23 апреля 2008, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– 3-я международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 85-летию Л. Д. Кудрявцева, 25–28 марта 2008, Москва, РУДН;

– Конференция-семинар «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий», 19–23 декабря 2008, Иркутск, ИДСТУ СО РАН;

– Ежегодная Всероссийская научная конференция учащихся, студентов и молодых ученых «Научное творчество XXI века», 15–28 февраля 2009, Красноярск;

– Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего, 30 марта – 2 апреля 2009, Москва, Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова;

– Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, 22 апреля 2009, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– Международный Российско-Абхазский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», 17–22 мая 2009, Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;

– VI Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 26–29 мая, 2009, Томск, ТПУ;

– Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях», 6–7 июня 2009, Иркутск, ИДСТУ СО РАН;

– Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А. А. Самарского, 16–18 июня 2009, Москва, факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова;

– Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 10–20 августа 2009, Новосибирск, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН;

– Конференция-семинар «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий», 21–23 декабря 2009, Иркутск, ИДСТУ СО РАН;

– Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, 21 апреля 2010, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– Всероссийская молодежная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», 13–15 октября 2010, Томск, НИ ТГУ;

– XI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике, 16–23 октября 2010, Сочи;

– Конференция-семинар «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий», 20–21 декабря 2010, Иркутск, ИДСТУ СО РАН;

– Ежегодная научно-теоретическая конференция аспирантов и студентов, 27 апреля 2011, Иркутск, ИМЭИ ИГУ;

– III Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 10–15 октября 2011, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;

– II Всероссийская молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», посвященная 50-летию физико-технического факультета Томского государственного университета, 11–13 апреля 2012, Томск, НИ ТГУ;

– Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», 29 июня – 3 июля 2013, Самара, СамГУ;

– 3-я Сибирская школа молодых ученых по применению математических методов и информационных технологий в рамках в XXVI Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», 9–13 сентября, 2013, Иркутск, Ангарск, ИГУ, АГТА.

Результаты диссертационных исследований докладывались на исследовательском семинаре отделения нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН под руководством д. ф.-м. н. А. А. Щегловой и регулярно на исследовательском семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИМЭИ ИГУ под руководством профессора Н. А. Сидорова.

Финансовая поддержка диссертационного исследования

Диссертационное исследование выполнялось в рамках следующих плановых тем НИР ИГУ

– «Алгоритмический анализ сингулярных моделей: идентификация, регуляризованные приближенные методы и приложения» (АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», тема № 1.1706.2011 тематического плана НИР ИГУ), руководитель д.ф.-м.н., профессор Н. А. Сидоров;

– «Операторно-дифференциальные системы: начально-краевые задачи, методы оптимального управления и их приложения», (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № П696 от 20.05.2010), руководитель д.ф.-м.н., профессор Н. А. Сидоров;

– «Сингулярные интегральные модели и преобразования: теория и приложения» (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 14.В37.21.0365 от 28.08.2012) руководитель к.ф.-м.н., доцент Д. Н. Сидоров;

– грантами для поддержки НИР аспирантов и молодых сотрудников ИГУ в 2010 (тема № 091-08-104) и в 2011 (тема № 113-11-000) годах.

В 2011 году автор был удостоен именной стипендии губернатора Иркутской области (распоряжение Губернатора Иркутской области № 111-р от 22.12.2011).

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Михаилу Валентиновичу Фалалееву за постановку задач и внимательное руководство, профессору Николаю Александровичу Сидорову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний, коллективу кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИМЭИ ИГУ за моральную поддержку.

Глава 1

Основные понятия

В настоящей главе изложены необходимые далее сведения о жордановых наборах фредгольмовых и нетеровых операторов, приведены основные факты из теории обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах. Кроме того, введено понятие фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора, которое является ключевым в работе. Здесь же мы продемонстрируем технологию исследования с помощью этой конструкции начальных задач для абстрактных линейных интегро-дифференциальных уравнений.

1.1 Обобщенная жорданова структура фредгольмовых операторов

Пусть $E_1,\ E_2$ — вещественные банаховы пространства, B — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = E_1$. Будем предполагать, что B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) < +\infty$. Обозначим $n = \dim N(B)$ — размерность ядра (нуль-пространства) $N(B)$ оператора B, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — соответствующие им биортогональные системы элементов (существование которых является прямым следствием из теоремы Хана–Банаха [70, с. 163, 167]), т. е.

$$\langle \varphi_i,\ \gamma_j \rangle = \langle z_i,\ \psi_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Введем проекторы $P : E_1 \to N(B),\ Q : E_2 \to \operatorname{span}\{z_i\}_{i=1}^{n}$, действующие по формулам

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle \varphi_i,\ Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \psi_i \rangle z_i,$$

и ограниченный оператор $\Gamma : E_2 \to D(B)$,

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

называемый *оператором Треногина–Шмидта* [1]. Справедливы следующие равенства

$$\Gamma z_i = \varphi_i,\ \Gamma^* \gamma_i = \psi_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.1}$$

$$\Gamma B = \mathbb{I}_1 - P,\ B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q. \tag{1.1.2}$$

Здесь и далее в работе $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в пространствах E_1 и E_2.

Замечание 1.1.1. Если замкнутый линейный оператор A, действующий из E_1 в E_2, плотно определен и таков, что $D(A) \supseteq D(B)$, то суперпозиция $A\Gamma$ по теореме о замкнутом графике [70, с. 157] является ограниченным оператором.

Пусть $\mathcal{F}(t)$ — сильно непрерывное однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ замкнутых линейных операторов из E_1 в E_2.

Определение 1.1.1. *Обобщенной жордановой цепочкой* базисного элемента $\varphi_i \in N(B)$ относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ (или короче $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочкой) называется конечный набор элементов

$$\left\{ \varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(2)}, \ldots,\ \varphi_i^{(p_i)} \right\} \subset E_1,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k+1)} = l_k(\varphi_i),\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

[1] В монографии [12, с. 340] В. А. Треногиным доказана лемма о непрерывной обратимости оператора $\tilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle z_i$, обобщающая известный результат Э. Шмидта из теории интегральных уравнений.

которые, в соответствии с альтернативой Фредгольма [70], разрешимы, если выполнены условия

$$\langle l_k(\varphi_i),\ \psi_j\rangle = 0,\ j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i - 1,$$

(речь идет о второй группе уравнений, первое разрешимо и $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i$). Здесь введено обозначение

$$l_k(\varphi_i) = \sum_{q=1}^{k} \mathcal{F}^{(k-q)}(0)\varphi_i^{(q)}.$$

Число $p_i \in \mathbb{N}$ принято называть *длиной* $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочки, а вектор $\varphi_i^{(k+1)}$ — $\mathcal{F}(t)$-*присоединенным элементом* k-*го порядка* к элементу φ_i, причем справедлива формула

$$\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma l_k(\varphi_i),\ k = 1,\ldots,p_i - 1.$$

Условие обрыва цепочки присоединенных элементов на p_i-м шаге состоит в том, что не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle$, $j = 1,\ldots,n$ равны нулю, т. е. в неразрешимости относительно $\varphi_i^{(p_i+1)}$ уравнения

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} = l_{p_i}(\varphi_i).$$

Определение 1.1.2. Построив по описанному правилу для каждого $\varphi_i \in N(B)$ свою $\mathcal{F}(t)$-жорданову цепочку, получим систему элементов

$$\left\{\varphi_i^{(k)},\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p_i\right\} \subset E_1,$$

называемую *обобщенным жордановым набором* фредгольмова оператора B относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ (или короче $\mathcal{F}(t)$-*жордановым набором* фредгольмова оператора B).

Определение 1.1.3. Жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ принято называть *полным*, если выполняется условие

$$\det \|\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle\|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0.$$

Замечание 1.1.2. Базис в $N(B^*)$ можно выбрать таким, что условие полноты $\mathcal{F}(t)$-жорданова набора эквивалентно соотношению

$$\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n,$$

в этом случае $z_i = l_{p_i}(\varphi_i)$, т. е. биортогональной к базису $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ является система элементов $\{l_{p_i}(\varphi_i)\}_{i=1}^n$.

Замечание 1.1.3. В цикле работ Б. В. Логинова (см., например, статью [43] и библиографию к ней, а также [59]) показано, что, если оператор B имеет полный обобщенный $\mathcal{F}(t)$-жорданов набор, то существует *полный обобщенный* $\mathcal{F}^*(t)$*-жорданов набор* оператора B^*, который строится по аналогичным правилам, причем базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ можно выбрать так, что элементы φ_i и ψ_i с одинаковыми номерами имеют обобщенные жордановы цепочки одинаковой длины. В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что все указанные перестройки базисов уже выполнены.

Определение 1.1.4. Полным $\mathcal{F}^*(t)$-жордановым набором оператора B^* называется система элементов $\psi_i^{(k)} \in E_2^*,\ i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,p_i$, которые удовлетворяют уравнениям

$$B^*\psi_i^{(1)} = 0,\ B^*\psi_i^{(k+1)} = l_k^*(\psi_i),\ i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,p_i - 1,$$

а также условиям разрешимости

$$\langle\varphi_i,\ l_k^*(\psi_j)\rangle = 0,\ i,j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,p_j - 1,$$

и полноты

$$\left\langle\varphi_i,\ l_{p_j}^*(\psi_j)\right\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,\dots,n,$$

где $l_k^*(\psi_i) = \sum\limits_{q=1}^{k}\left(\mathcal{F}^{(k-q)}(0)\right)^*\psi_i^{(q)}$.

Замечание 1.1.4. Для восстановления $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных элементов к векторам $\psi_i,\ i = 1,\dots,n$ справедливы формулы

$$\psi_i^{(k+1)} = \Gamma^* l_k^*(\psi_i),\ i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,p_i - 1, \tag{1.1.3}$$

а из последнего соотношения следует, что $\gamma_i = l_{p_i}^*(\psi_i),\ i = 1,\dots,n$.

Замечание 1.1.5. Следует отметить, что условия разрешимости уравнений для определения $\mathcal{F}(t)$- и $\mathcal{F}^*(t)$-присоединенных элементов могут быть записаны в следующем эквивалентном виде:

$$\left\langle \varphi_i^{(k+1)},\ \gamma_j \right\rangle = 0,\ \left\langle z_j,\ \psi_i^{(k+1)} \right\rangle = 0,$$

$$i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1.$$

Замечание 1.1.6. В случае $\mathcal{F}(t) \equiv A$, получим

$$l_k(\varphi_i) = A\varphi_i^{(k)},\ l_k^*(\psi_i) = A^*\psi_i^{(k)},$$

причем A- и A^*-присоединенные элементы определяются соответственно через базисные φ_i и ψ_i следующим образом:

$$\varphi_i^{(k+1)} = (\Gamma A)^k \varphi_i^{(1)},\ \psi_i^{(k+1)} = (\Gamma^* A^*)^k \psi_i^{(1)},\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

а биортогональными к $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ являются системы

$$\{z_i\}_{i=1}^n = \left\{ A\varphi_i^{(p_i)} \right\}_{i=1}^n,\ \{\gamma_i\}_{i=1}^n = \left\{ A^*\psi_i^{(p_i)} \right\}_{i=1}^n,$$

элементы которых, с учетом последних формул имеют вид

$$z_i = A(\Gamma A)^{p_i-1}\varphi_i^{(1)},\ \gamma_i = A^*(\Gamma^* A^*)^{p_i-1}\varphi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда, в силу (1.1.1),

$$\varphi_i^{(1)} = (\Gamma A)^{p_i}\varphi_i^{(1)},\ \psi_i^{(1)} = (\Gamma^* A^*)^{p_i}\psi_i^{(1)},$$

и справедливо свойство *цикличности* A- и A^*-жордановых наборов, выражаемое следующими равенствами

$$\varphi_i^{(k+1)} = (\Gamma A)^{qp_i+k}\varphi_i^{(1)},\ \psi_i^{(k+1)} = (\Gamma^* A^*)^{qp_i+k}\psi_i^{(1)},$$

$$\forall\ q \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, p_i - 1.$$

1.2 Псевдообращение и жордановы наборы нетеровых операторов

В этом пункте будем предполагать, что оператор B, действующий из E_1 в E_2, обладает теми же свойствами, что и предыдущем, только теперь

$\dim N(B)$ и $\dim N(B^*)$ конечны, но не совпадают, т. е. B нетеров. Введем обозначения $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$. Напомним, что число $\chi = n - m$ называется *индексом* нетерова оператора B [12]. Пусть теперь $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — базис в $N(B^*)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_j\}_{j=1}^m \subset E_2$ — соответствующие им биортогональные системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i, \gamma_\alpha \rangle = \delta_{i\alpha}, \ i, \alpha = 1, \ldots, n \ \text{ и } \ \langle z_\beta, \psi_j \rangle = \delta_{\beta j}, \ \beta, j = 1, \ldots, m$$

Введем проекторы

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \ \mathcal{Q} = \sum_{j=1}^m \mathcal{Q}_j = \sum_{j=1}^m \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j$$

пространств E_1 и E_2 соответственно. Базисам $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{z_j\}_{j=1}^m$ соответствует единственный *псевдообратный оператор* [130], обозначаемый B^+, который однозначно определяется следующим набором своих свойств:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \operatorname{span} \{z_j\}_{j=1}^m, \ R(B^+) = N(\mathcal{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = \mathbb{I}_2 - \mathcal{Q} \ \text{ на } \ D(B^+), \ B^+B = \mathbb{I}_1 - \mathcal{P} \ \text{ на } \ D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_j\}_{j=1}^m$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$.

Псевдообратный сопряженного оператора B^{*+} удовлетворяет условиям

$$D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus \operatorname{span} \{\gamma_i\}_{i=1}^n, \ R(B^{*+}) = N(\mathcal{Q}^*) \cap D(B^*),$$

$$B^*B^{*+} = \mathbb{I}_1^* - \mathcal{P}^* \ \text{ на } \ D(B^{*+}), \ B^{*+}B^* = \mathbb{I}_2^* - \mathcal{Q}^* \ \text{ на } \ D(B^*),$$

где сопряженные проекторы задаются формулами

$$\mathcal{P}^* = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i^* = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \cdot \rangle \gamma_i, \ \mathcal{Q}^* = \sum_{j=1}^m \mathcal{Q}_j^* = \sum_{j=1}^m \langle z_j, \cdot \rangle \psi_j,$$

кроме того,

$$N(B^{*+}) = \{\gamma_i\}_{i=1}^n, \ B^*B^{*+}B^* = B^*, \ B^{*+}B^*B^{*+} = B^{*+},$$

и операторы B^{*+} и B^{+*} совпадают.

Замечание 1.2.1. В силу нормальной разрешимости оператора B (т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$, согласно критерию Хаусдорфа [70, с. 218]), области определения псевдообратных операторов совпадают с соответствующими пространствами, а именно: $D(B^+) = E_2$, $D(B^{*+}) = E_1^*$. Это по теореме о замкнутом графике [70, с. 157] влечет ограниченность операторов B^+ и B^{*+}. И, кроме того, если замкнутый линейный оператор A, определенный плотно в E_1, таков, что $D(A) \supseteq D(B)$, то суперпозиция AB^+ также является ограниченным оператором.

Далее введем в рассмотрение системы элементов

$$\varphi_i^{(k)} = \left(B^+A\right)^{k-1} \varphi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, n,\ k \geq 2,\ \varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \tag{1.2.1}$$

и функционалов

$$\psi_j^{(k)} = \left(B^{*+}A^*\right)^{k-1} \psi_j^{(1)},\ j = 1, \ldots, m,\ k \geq 2,\ \psi_j^{(1)} = \psi_j. \tag{1.2.2}$$

В силу свойств псевдообратных операторов B^+ и B^{*+} при $k \geq 2$ выполняется $\varphi_i^{(k)} \in N(\mathcal{P})$ и $\psi_i^{(k)} \in N(\mathcal{Q}^*)$ соответственно, т. е.

$$\left\langle \varphi_i^{(k)},\ \gamma_\alpha \right\rangle = 0,\ i,\ \alpha = 1, \ldots, n,$$

и

$$\left\langle z_\beta,\ \psi_j^{(k)} \right\rangle = 0,\ \beta,\ j = 1, \ldots, m.$$

Определение 1.2.1. Пусть элементы $\varphi_i^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям и неравенствам

$$B\varphi_i^{(k+1)} = A\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)},\ i = 1, \ldots, n,$$

соответственно, причем

$$\operatorname{rang} \left\| \left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_k \right\rangle \right\|_{i=1,\ldots,n,\, k=1,\ldots,m} = \min(n, m) = l.$$

в этом случае говорят, что вектора $\varphi_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p_i$, образуют *полный A-жорданов набор* неторова оператора B.

Замечание 1.2.2. Как показано в работе [59], множества $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $\{z_j\}_{j=1}^m$ можно преобразовать так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\left\langle A\varphi_i^{(k)},\, \psi_j \right\rangle = \begin{cases} 0, & k = 1,\dots,p_i-1,\, i = 1,\dots,n,\, j = 1,\dots,m, \\ \delta_{ij}, & k = p_i,\, i,\, j = 1,\dots,l; \end{cases} \tag{1.2.3}$$

$$\left\langle \varphi_i,\, A^*\psi_j^{(k)} \right\rangle = \begin{cases} 0, & k = 1,\dots,p_j-1,\, i = 1,\dots,n,\, j = 1,\dots,m, \\ \delta_{ij}, & k = p_j,\, i,\, j = 1,\dots,l. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$z_i = A\varphi_i^{(p_i)},\, \gamma_k = A^*\psi_k^{(p_k)},\, i,\, k = 1,\dots,l.$$

Замечание 1.2.3. Выполнение условия существования полного A-жорданова набора оператора B влечет существование *полного A^*-жорданова набора оператора B^**, который образует система функционалов

$$\left\{\psi_j^{(k)},\, j = 1,\dots,m,\, k = 1,\dots,p_j\right\},$$

удовлетворяющих следующим уравнениям и неравенствам:

$$B^*\psi_j^{(k+1)} = A^*\psi_j^{(k)},\, j = 1,\dots,m,\, k = 1,\dots,p_j-1,$$

$$B^*\psi_j^{(p_j+1)} \neq A^*\varphi_j^{(p_j)},\, j = 1,\dots,m,$$

а также условию полноты

$$\operatorname{rang}\left\|\left\langle \varphi_i,\, A^*\psi_j^{(p_j)}\right\rangle\right\|_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,m} = \min(n,m) = l.$$

При этом прямоугольные матрицы

$$\left\|\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\, \psi_j\right\rangle\right\|_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,m}, \quad \left\|\left\langle \varphi_i,\, A^*\psi_j^{(p_j)}\right\rangle\right\|_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,m}$$

имеют одинаковые ранги, равные l. Преобразованиями

$$\tilde{\psi}_j = \begin{cases} \psi_j, & j = 1,\dots,n, \\ \psi_j - \sum\limits_{i=1}^{n} \left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\, \psi_j\right\rangle \psi_i, & j = n+1,\dots,m. \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \varphi_i - \sum\limits_{j=1}^{m} \left\langle \varphi_i,\, A^* \psi_j^{(p_j)} \right\rangle \varphi_j, & j = m+1, \ldots, n. \end{cases}$$

базисных векторов ψ_j при $m > n$ и φ_i при $m < n$ первая и вторая матрицы соответственно приводятся к своим каноническим формам — прямоугольным матрицам той же размерности с единичным ранговым минором l-го порядка и нулями на остальных местах. Далее везде в работе будем считать, что все необходимые перестройки базисов уже выполнены.

Замечание 1.2.4. Фредгольмов оператор ($m = n$) является частным случаем нетерова (нетеровым оператором нулевого индекса). Псевдообратный оператор B^+ и оператор Треногина — Шмидта Γ фредгольмова оператора B связаны соотношением [64]

$$B^+ = \Gamma - \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\, \psi_i \rangle \, \varphi_i.$$

1.3 Обобщенные функции со значениями в банаховых пространствах

Пусть E — вещественное банахово пространство, E^* — сопряженное к нему банахово пространство.

К множеству $K(E^*)$ *основных функций* отнесем все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*.

Определение 1.3.1. *Носителем* $\operatorname{supp} s(t)$ основной функции $s(t)$ называется замыкание в $\mathbb{R}$ множества значений t, при которых $s(t) \neq 0$.

Сходимость в $K(E^*)$, которая вводится следующим образом:

Определение 1.3.2. Говорят, что последовательность функций $\{s_n(t)\}$ сходится к $s(t)$ в $K(E^*)$, если

а) $\exists\, R > 0$ такое, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} s_n(t) \subset [-R,\ R]$;

б) $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}$ выполняется $\sup\limits_{t\in[-R,\ R]} \left\| s_n^{(\alpha)}(t) - s^{(\alpha)}(t) \right\|_{E^*} \xrightarrow{n\to+\infty} 0;$

наделяет векторное пространство $K(E^*)$ топологической структурой.

Определение 1.3.3. *Обобщенной функцией (распределением)* $f(t)$ *со значениями в банаховом пространстве* E *называется всякий линейный непрерывный функционал* $(f, s(t))$, *заданный на* $K(E^*)$.

Будем обозначать $K'(E)$ множество всех обобщенных функций со значениями в E, которое называется *пространством обобщенных функций* и является полным векторным пространством относительно введенной в нем слабой сходимости:

Определение 1.3.4. Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если

$$(f_n, s(t)) \xrightarrow{n\to+\infty} (f, s(t)),\ \forall\ s(t) \in K(E^*).$$

Замечание 1.3.1. Понятия нулевого множества и носителя распределения, равенства двух обобщенных функций, операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую числовую функцию, дифференцирования (последние две непрерывны из $K'(E)$ в $K'(E)$) определяются так же, как и для классических обобщенных функций Соболева–Шварца, множество которых, следуя монографии В. С. Владимирова [16], будем обозначать $\mathscr{D}'$.

Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $f(t)$ со значениями в E порождает распределение

$$(f(t), s(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big\langle f(t), s(t) \big\rangle \, dt,\ s(t) \in K(E^*),$$

причем имеет место аналог теоремы Дюбуа-Реймона: двум различным локально интегрируемым функциям $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствуют различные распределения. Все обобщенные функции, которые можно задать по приведенному правилу, принято называть *регулярными*, остальные —

сингулярными. Примеры регулярной и сингулярной обобщенных функций из $K'(E)$ доставляют аналоги *функции Хевисайда* и *дельта-функции Дирака.*

Пример 1.3.1. Пусть $a \in E,\ t_0 \in \mathbb{R}$, тогда функцией Хевисайда будем называть обобщенную функцию $a\theta(t-t_0)$, действующую по формуле

$$(a\theta(t-t_0), s(t)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \big\langle a, s(t) \big\rangle dt,\ s(t) \in K(E^*),$$

а дельта-функцией Дирака — распределение, определяемое следующим образом:

$$(a\delta(t-t_0), s(t)) = \big\langle a, s(t_0) \big\rangle,\ s(t) \in K(E^*).$$

Очевидно, что $\operatorname{supp}(a\theta(t-t_0)) = [\ t_0,\ +\infty\,)$, $\operatorname{supp}(a\delta(t-t_0)) = \{t_0\}$, также нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$(a\theta(t-t_0))' = a\delta(t-t_0).$$

Из всего пространства $K'(E)$ выделим специальный класс $K'_+(E)$ обобщенных функций, носителями которых является луч $[\ 0,\ +\infty\,)$, такой класс называют *пространством распределений с ограниченным слева носителем.*

Определение 1.3.5. Пусть $\mathcal{K}(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, причем $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует почти при всех $t \in \mathbb{R}$. *Действием оператор-функции* $\mathcal{K}(t)$ на распределение $f(t) \in K'_+(E_1)$ называется обобщенная функция $\mathcal{K}(t)f(t) \in K'_+(E_2)$, определяемая следующим образом:

$$(\mathcal{K}(t)f(t),\ s(t)) = (f(t),\ \mathcal{K}^*(t)s(t))\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*).$$

Определение 1.3.6. Пусть $\mathcal{K}(t)$ — оператор-функция из определения 1.3.5, $h(t) \in \mathscr{D}'$, тогда произведение $\mathcal{K}(t)h(t)$ (формальное выражение) назовем *обобщенной оператор-функцией.* Действие обобщенной оператор-функции на элемент $f \in E_1$ осуществляется по правилу

$$(\mathcal{K}(t)fh(t),\ s(t)) = \big(h(t),\ \big\langle f,\ \mathcal{K}^*(t)s(t) \big\rangle\big)\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*),$$

т. е. $\mathcal{K}(t)fh(t) \in K'(E_2)$.

Определение 1.3.7. *Сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)h(t)$, $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и обобщенной функции $f(t) \in K'_+(E_1)$ называется распределение $\mathcal{K}(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$, определяемое равенством

$$(\mathcal{K}(t)h(t) * f(t),\ s(t)) = \\ = (h(t),\ (f(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau)))\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*). \quad (1.3.1)$$

Замечание 1.3.2. Корректность этого определения гарантируется ограниченностью слева носителей функций $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$ и доказывается по схеме, аналогичной применяемой в [16] при доказательстве существования свертки в алгебре $\mathscr{D}'_+$.

Пример 1.3.2. Используя последние три определения и пример 1.3.1, можно получить следующие равенства:

$$A\delta^{(\alpha)}(t) * f(t) = \big(Af(t)\big)^{(\alpha)},\ \mathcal{K}(t)h(t) * f\delta^{(\alpha)}(t) = \big(\mathcal{K}(t)fh(t)\big)^{(\alpha)},$$

$$\mathcal{K}(t)\theta(t) * b(t)\theta(t) = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)b(s)ds\ \theta(t),$$

здесь, помимо $\mathcal{K}(t)h(t)$, f и $f(t)$, заимствованных из определений 1.3.6 и 1.3.7, фигурируют $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, а также локально интегрируемая функция $b(t)$ со значениями в E_1.

Замечание 1.3.3. Пусть $\mathcal{K}_1(t)$ и $\mathcal{K}_2(t)$ — оператор-функции со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ и $\mathcal{L}(E_0, E_1)$ соответственно, обладающие теми же свойствами, что и $\mathcal{K}(t)$ из определения 1.3.7, a — какой-либо элемент банахова пространства E_0, $h_1(t),\ h_2(t) \in \mathscr{D}'_+$. Запишем выражение для свертки обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}_1(t)h_1(t)$ и распределения $\mathcal{K}_2(t)ah_2(t) \in K'_+(E_1)$, пользуясь определениями 1.3.6 и 1.3.7:

$$(\mathcal{K}_1(t)h_1(t) * \mathcal{K}_2(t)ah_2(t),\ s(t)) = \\ = \big(h_1(t),\ \big(h_2(\tau),\ \big\langle a,\ \mathcal{K}_2^*(\tau)\mathcal{K}_1^*(t)s(t+\tau)\big\rangle\big)\big)\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*). \quad (1.3.2)$$

Пример 1.3.3. В обозначениях предыдущего замечания приведем некоторые формулы для вычисления сверток обобщенных оператор-функций. При $h_1(t) = \theta(t)$, $\mathcal{K}_2(t) = A_2$, $h_2(t) = \delta^{(\alpha)}(t)$ получим

$$\mathcal{K}_1(t)\theta(t) * A_2 a\delta^{(\alpha)}(t) = \big(\mathcal{K}_1(t)A_2 a\theta(t)\big)^{(\alpha)} = \\ = \mathcal{K}_1^{(\alpha)}(t)A_2 a\theta(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} \mathcal{K}_1^{(i-1)}(0)A_2 a\delta^{(\alpha-i)}(t),$$

аналогично, если $\mathcal{K}_1(t) = A_1$, $h_1(t) = \delta^{(\alpha)}(t)$, $h_2(t) = \theta(t)$, то

$$A_1\delta^{(\alpha)}(t) * \mathcal{K}_2(t)a\theta(t) = \big(A_1\mathcal{K}_2(t)a\theta(t)\big)^{(\alpha)} = \\ = A_1\mathcal{K}_2^{(\alpha)}(t)a\theta(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} A_1\mathcal{K}_2^{(i-1)}(0)a\delta^{(\alpha-i)}(t),$$

а в случае, когда $h_1(t) = h_2(t) = \theta(t)$, получается

$$\mathcal{K}_1(t)\theta(t) * \mathcal{K}_2(t)a\theta(t) = \int_0^t \mathcal{K}_1(t-s)\mathcal{K}_2(s)a ds\ \theta(t).$$

Кроме того, имеет место еще одно важное в дальнейшем равенство:

$$\mathcal{K}_1(t)\theta(t) * \mathcal{K}_2(t)\theta(t) * a(t)\theta(t) = \int_0^t \int_0^{t-s} \mathcal{K}_1(t-s-\tau)\mathcal{K}_2(\tau)a(s)d\tau ds\ \theta(t),$$

где $a(t)$ — локально интегрируемая функция со значениями в E_0.

Замечание 1.3.4. Аналогичные определения и правила могут быть сформулированы для замкнутых операторов и оператор-функций с согласованными областями определения.

1.4 Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора в банаховых пространствах и ее применение

Как и в предыдущих пунктах будем использовать обозначения E_1 и E_2 для двух вещественных банаховых пространств. Интегро-дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - \ldots -$$
$$- A_1u'(t) - A_0u(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds$$

поставим в соответствие следующую обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A_{N-1}\delta^{(N-1)}(t) - \ldots - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t).$$

Здесь $B,\ A_{N-1}, \ldots, A_1,\ A_0,\ k(t)$ — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, свойства которых будем уточнять отдельно в каждом конкретном случае.

Определение 1.4.1. *Фундаментальной оператор-функцией* интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ назовем обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}_N(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t),\ \forall\ v(t) \in K'_+(E_1),$$

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Замечание 1.4.1. Смысл этой конструкции состоит в следующем: если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, то, в силу второго равенства, сверточное уравнение вида

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * u(t) = f(t),$$

где $f(t) \in K'_+(E_2)$, имеет своим решением обобщенную функцию

$$u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) \in K'_+(E_1),$$

причем это решение единственно. Действительно, если существует $v(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $v(t) \neq u(t)$ и $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = f(t)$, то, с учетом первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции, получим

$$v(t) = \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) = u(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения $u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t)$ исходного сверточного уравнения в классе $K'_+(E_1)$.

Понятие фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора впервые введено профессором М. В. Фалалеевым в [88, 127] как обобщение классического понятия фундаментального решения (функции влияния) [16, 21] на случаи линейных интегральных, дифференциальных (в том числе, с частными производными [83]) и интегро-дифференциальных операторов с различными типами вырождений в банаховых пространствах.

Замечание 1.4.2. Первое и второе равенства из определения 1.4.1 можно по-другому записать как

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \mathbb{I}_1\delta(t) \ \text{ и } \ \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \mathbb{I}_2\delta(t)$$

соотвественно. Именно в таком виде мы наиболее часто будем их использовать при доказательстве теорем о фундаментальных оператор-функциях различных интегро-дифференциальных операторов. Далее приведем некоторые простейшие примеры.

Пример 1.4.1. Пусть A — некоторый ограниченный, а $\mathbb{I}$ — тождественный операторы в банаховом пространстве E. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t),$$

который может быть получен из $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ при $N = 1$, $B = \mathbb{I}$ и $k(t) = \mathbb{O}$. Его фундаментальной оператор-функцией является

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(t) = e^{At}\theta(t),$$

где e^{At} — классическая операторная экспонента — ряд $e^{At} = \mathbb{I} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$, сходящийся равномерно по t на любом компакте $[0,\ T]$ в топологии $\mathcal{L}(E)$. Действительно, используя формулы из примера 1.3.3, получаем цепочки равенств

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_1(t) = \mathbb{I}\delta'(t) * e^{At}\theta(t) - A\delta(t) * e^{At}\theta(t) =$$

$$= Ae^{At}\theta(t) + \mathbb{I}\delta(t) - Ae^{At}\theta(t) = \mathbb{I}\delta(t),$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(t) * \tilde{\mathcal{L}}_1(\delta(t)) = e^{At}\theta(t) * \mathbb{I}\delta'(t) - e^{At}\theta(t) * A\delta(t) =$$
$$= Ae^{At}\theta(t) + \mathbb{I}\delta(t) - e^{At}A\theta(t) = \mathbb{I}\delta(t).$$

Пример 1.4.2. Рассмотрим теперь интегральный оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta(t) - k(t)\theta(t),$$

с ядром $k(t)$, которое является однопараметрическим семейством класса $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ограниченных в E операторов. Обобщенная оператор-функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_0(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta(t) + R_0(t)\theta(t)$$

является фундаментальной для этого интегрального оператора. Здесь за $R_0(t)$ обозначена *резольвента ядра* $k(t)$. Она представляет собой ряд

$$R_0(t) = k(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{k(t) \star \cdots \star k(t)}_{k+1 \text{ раз}},$$

состоящий из повторных сверток Лапласа оператор-функции $k(t)$ [2] и сходящийся в топологии $\mathcal{L}(E)$ равномерно по t на каждом отрезке $[0, T]$, причем имеет место оценка

$$\|R_0(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Ce^{CT},\ C = \max_{t\in[0,T]} \|k(t)\|_{\mathcal{L}(E)}.$$

Также справедливы очевидные соотношения

$$R_0(t) = k(t) + \int_0^t k(t-s)R_0(s)ds,\ R_0(t) = k(t) + \int_0^t R_0(t-s)k(s)ds,$$

которые, с учетом третьей формулы в примере 1.3.3, могут быть записаны в обобщенном смысле в терминах введенной операции свертки (см. определение 1.3.7 и замечание 1.3.3) следующим образом:

$$R_0(t)\theta(t) = k(t)\theta(t) + k(t)\theta(t) * R_0(t)\theta(t),$$

$$R_0(t)\theta(t) = k(t)\theta(t) + R_0(t)\theta(t) * k(t)\theta(t).$$

[2] В этом выражении бинарная операции $\star$ определяется так: $k(t) \star k(t) = \int\limits_0^t k(t-s)k(s)ds$.

Используя последние равенства, мы и получим требуемое

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\delta(t)) * \tilde{\mathcal{E}}_0(t) = \tilde{\mathcal{E}}_0(t) * \tilde{\mathcal{L}}_0(\delta(t)) = \mathbb{I}\delta(t).$$

Далее продемонстрируем каким образом понятие фундаментальной оператор-функции может быть использовано в исследовании однозначной разрешимости начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений. Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть B, $A_{N-1}, \ldots, A_1$, A_0 — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$D(B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{N} D(A_{i-1}) \cap D(k),$$

оператор-функция сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B непрерывно обратим, тогда регулярный интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \left(\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)\right),$$

где $R_N(t)$ — резольвента ядра $\mathcal{F}_N(t)B^{-1}$, оператор-функция $\mathcal{F}_N(t)$ задается следующим образом:

$$\mathcal{F}_N(t) = A_{N-1} + A_{N-2}t + \cdots + A_1\frac{t^{N-2}}{(N-2)!} + \\ + A_0\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}k(s)ds.$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции требуется проверить два сверточных равенства

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \mathbb{I}_2\delta(t),\ \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \mathbb{I}_1\delta(t).$$

Заметим для начала, что ввиду предположений, касающихся операторных коэффициентов, ядра интегральной части и их областей определения, суперпозиции $A_{i-1}B^{-1},\ i=1,\dots,N$ и $k(t)B^{-1}$ существуют и являются ограниченными операторами по теореме о замкнутом графике [70, с. 157]. Следовательно, оператор-функция $\mathcal{F}_N(t)B^{-1}$ принимает значения из $\mathcal{L}(E_2)$. Далее, используя соотношение

$$R_N(t)\theta(t)=\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)+\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)*R_N(t)\theta(t)$$

для резольвенты $R_N(t)$ (см. по этому поводу пример 1.4.2), непосредственными вычислениями в первом равенстве получим

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\mathcal{L}_N(\delta(t))*B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t))=$$
$$=\big(\mathbb{I}_2\delta(t)-\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)\big)*(\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t))=$$
$$=\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t)-\big(\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)+\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)*R_N(t)\theta(t)\big)=$$
$$=\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t)-R_N(t)\theta(t)=\mathbb{I}_2\delta(t).$$

А во втором, с учетом

$$R_N(t)\theta(t)=\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)+R_N(t)\theta(t)*\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t),$$

справедлива цепочка равенств

$$\mathcal{E}_N(t)*\mathcal{L}_N(\delta(t))=B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t))*\mathcal{L}_N(\delta(t))=$$
$$=B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\mathbb{I}_2\delta(t)+R_N(t)\theta(t))*$$
$$*\big(\mathbb{I}_2\delta(t)-\mathcal{F}_N(t)B^{-1}\theta(t)\big)*B\delta^{(N)}(t)=$$
$$=B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*B\delta^{N}(t)=\mathbb{I}_1\delta(t).$$

□

Замечание 1.4.3. Пусть $u(t),\ f(t)$ — неизвестная и заданная функции неотрицательного вещественного t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. В условиях теоремы 1.4.1 рассмотрим задачу Коши

$$\mathcal{L}_N(u(t))=f(t),\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1,\dots,u^{(N-1)}=u_{N-1}. \qquad (1.4.1)$$

Пусть $u(t)$ — *классическое* решение начальной задачи (1.4.1), под которым понимается функция класса $C([0,\ +\infty),E_1)\ \cap\ C^N((0,\ +\infty),E_1)$, обращающая в тождество интегро-дифференциальное уравнение и удовлетворяющая начальному условию. Продолжим $u(t)$ и $f(t)$ нулем на отрицательную полуось $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$, $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$. Применяя стандартные правила дифференцирования обобщенной функции $\tilde{u}(t)$, получим выражения для ее производных

$$\tilde{u}'(t) = u'(t)\theta(t) + u_0\delta(t), \; \tilde{u}''(t) = u''(t)\theta(t) + u_1\delta(t) + u_0\delta'(t), \; \ldots$$

$$\tilde{u}^{(N)}(t) = u^{(N)}(t)\theta(t) + u_{N-1}\delta(t) + u_{N-1}\delta'(t) + \cdots + u_0\delta^{(N-1)}(t).$$

Справедлива цепочка равенств

$$0 = \left(\mathcal{L}_N(u(t)) - f(t)\right)\theta(t) = \mathcal{L}_N(\tilde{u}(t)) - \tilde{g}(t),$$

где $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1u_0)\delta(t) + \\ + (Bu_{N-2} - A_{N-1}u_{N-3} - \ldots - A_2u_0)\delta'(t) + \ldots + \\ + (Bu_1 - A_{N-1}u_0)\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),\end{aligned}$$

таким образом, относительно $\tilde{u}(t)$ получаем уравнение

$$\mathcal{L}_N(\tilde{u}(t)) = \tilde{g}(t),$$

которое, в силу первой и третьей формулы в примере 1.3.2, имеет эквивалентный сверточный вид

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t). \tag{1.4.2}$$

Решение $\tilde{u}(t)$ уравнения (1.4.2) в $K'_+(E_1)$ обычно называют *обобщенным решением* задачи Коши (1.4.1). Поскольку из теоремы 1.4.1 нам уже известен явный вид фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, ссылаясь на рассуждения замечания 1.4.1, можно заключить о существовании и единственности этого решения.

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1, тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное обобщенное решение вида*

$$\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds\Bigg]\theta(t),$$

где $p(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$, *функция* $h(t) : \mathbb{R}_+ \to E_2$ *задается следующим образом:*

$$h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),$$

а оператор-функция $R_N(t)$ *из теоремы 1.4.1.*

Доказательство. Согласно замечанию 1.4.1 уравнение (1.4.2) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t).$$

Нетрудно заметить, что

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) - \mathcal{L}_N(p(t))\theta(t) + \mathcal{L}_N(\delta(t)) * p(t)\theta(t).$$

Отсюда непосредственным вычислением свертки, принимая во внимание второе равенство из определения фундаментальной оператор-функции и обозначения для $h(t)$, получим

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \Big(h(t)\theta(t) + \mathcal{L}_N(\delta(t)) * p(t)\theta(t)\Big) = p(t)\theta(t) + \mathcal{E}_N(t) * h(t)\theta(t),$$

а далее, учитывая равенства из примера 1.3.3, и требуемое. □

Замечание 1.4.4. Для существования обобщенного решения в теореме 1.4.2 достаточно локальной интегрируемости по Бохнеру правой части $f(t)$ уравнения (1.4.1).

Замечание 1.4.5. Полученное в теореме 1.4.2 обобщенное решение представляет собой регулярную обобщенную функцию

$$\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t),$$

причем в случае $f(t) \in C(t \geq 0; E_2)$, функция $u(t) : [0, +\infty) \to E_1$ принадлежит классу $C(t \geq 0; E_1) \cap C^N(t > 0; E_1)$, обращает в тождество интегро-дифференциальное уравнение и удовлетворяет начальным условиям, т. е. является классическим решением задачи Коши (1.4.1). Таким образом, имеет место

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1 и* $f(t) \in C(t \geq 0; E_2)$, *тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное классическое решение вида*

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds,$$

где введены обозначения теоремы 1.4.2.

Доказательство. Справедливы равенства

$$u'(t) = p'(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-2}}{(N-2)!} B^{-1} h(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-2}}{(N-2)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds,$$

$$u''(t) = p''(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-3}}{(N-3)!} B^{-1} h(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-3}}{(N-3)!} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds,$$
$$\ldots,$$
$$u^{(N-1)}(t) = p^{(N-1)}(t) + \int\limits_0^t B^{-1} h(s) ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} B^{-1} R_N(\tau) h(s) d\tau ds,$$

$$u^{(N)}(t) = p^{(N)}(t) + B^{-1} h(t) + \int\limits_0^t B^{-1} R_N(t-s) h(s) d\tau ds.$$

Поскольку $f(t) \in C(t \geq 0; E_2)$, все производные функции $u(t)$ до N-го порядка включительно непрерывны по норме пространства E_1, значит, $u(t)$ принадлежит нужному классу.

Заметим, что

$$p^{(i-1)}(t) = u_{i-1} + u_i t + \cdots + u_{N-1}\frac{t^{N-i}}{(N-i)!},\ i = 1, \ldots, N,$$

отсюда

$$u_{i-1}(0) = p^{(i-1)}(0) = u_{i-1},\ i = 1, \ldots, N,$$

т. е. $u(t)$ удовлетворяет начальному условию. Далее, подставив выражения для производных в уравнение, получим цепочку равенств

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = \mathcal{L}_N(p(t)) + BB^{-1}h(t) + \int\limits_0^t BB^{-1}R_N(t-s)h(s)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \mathcal{F}_N(t-s)B^{-1}h(s)ds - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \mathcal{F}_N(t-s-\tau)B^{-1}R_N(\tau)h(s)d\tau ds =$$

$$= \mathcal{L}_N(p(t)) + h(t) + \int\limits_0^t R_N(t-s)h(s)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \mathcal{F}_N(t-s)B^{-1}h(s)ds - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \mathcal{F}_N(t-s-\tau)B^{-1}R_N(\tau)h(s)d\tau ds.$$

Принимая во внимание вид функции $h(t)$ (см. теорему 1.4.2) и равенство

$$R_N(t) = \mathcal{F}_N(t)B^{-1} + \int\limits_0^t \mathcal{F}_N(t-\tau)B^{-1}R_N(\tau)d\tau$$

для резольвенты $R_N(t)$ ядра $\mathcal{F}_N(t)B^{-1}$ (см. пример 1.4.2), получим

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t) + \int\limits_0^t \Bigg[R_N(t-s) - \mathcal{F}_N(t-s)B^{-1} -$$

$$- \int\limits_0^{t-s} \mathcal{F}_N(t-s-\tau)B^{-1}R_N(\tau)d\tau\Bigg]h(s)ds = f(t).$$

Тем самым, функция $u(t)$ является классическим решением задачи Коши (1.4.1), единственность которого гарантируется теоремой 1.4.2. $\square$

Тем самым, фундаментальная оператор-функция является в нашем исследовании ключевым звеном. Знание ее позволяет нам утверждать существование и единственность решения рассматриваемой задачи Коши в классе распределений, более того дает возможность построить в замкнутой форме само обобщенное решение. А затем последующий его анализ выявляет связь с классическим решением.

Здесь мы рассмотрели достаточно простой, но очень важный пример, когда интегро-дифференциальное уравнение является регулярным, и регулярность состоит в непрерывной обратимости оператора при старшей производной дифференциальной части. Уравнение не содержит никаких особенностей, и, поэтому требование сильной непрерывности правой части для разрешимости начальной задачи в классическом смысле выглядит очень естественно.

Далее, когда мы будем рассматривать случаи различных вырождений, это непременно отразится на условиях существования и единственности классического решения, в которых будут фигурировать более жесткие требования (дополнительной гладкости правой части, определенные соотношения на входные данные задачи). Они будут иметь непосредственную связь с порядком дифференциальной части, жордановой структурой, специальными спектральными показателями и т. д.

Глава 2

Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах

Изложение результатов исследования сингулярных линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах начнем с рассмотрения одного частного случая. В этой главе будем изучать специальный класс уравнений

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds + f(t) \qquad (2.0.1)$$

с ядром интегральной части $k(t) = g(t)A$, где A — линейный оператор, а $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — числовая функция, и дифференциальной частью, не содержащей группу младших производных неизвестной функции (такие линейные дифференциальные операторы и соответствующие им уравнения иногда называют *„неполными“* [28,33,87]). Заметим, что интегральный член представляет собой сверточное вольтерровское интегральное возмущение последнего слагаемого $Au(t)$. Именно такая ситуация часто встречается в задачах математической теории вязкоупругости [30,56,104] при моделировании движения вязкоупругих сред наследственного типа, колебаний вязкоупругих тел и т. д. Эти процессы описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, которые являются конкретными реализациями абстрактного уравнения (2.0.1), и примеры таких содержательных задач приведены в заключительной главе настоящей работы. Тем самым, столь специфичный вид исследуемого объекта выбран неслучайно и продиктован соответствующими приложениями.

Будем исследовать разрешимость в классах распределений и функций конечной гладкости задачи Коши с начальными условиями

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2.0.2}$$

для уравнения (2.0.1) при различных предположениях относительно операторных коэффициентов. В частности, рассмотрим случаи фредгольмова и нетерова оператора B (последний как для положительного, так и отрицательного индекса). В этой главе также проведем исследование начальной задачи (2.0.1), (2.0.2) с точки зрения теории полугрупп операторов с ядрами [61, 143] в условиях спектральной, секториальной и радиальной ограниченности соответствующего операторного пучка.

Классическим решением начальной задачи (2.0.1), (2.0.2), по аналогии с замечанием 1.4.3, назовем N раз сильно непрерывно дифференцируемую функцию $u(t)$, обращающую в тождество уравнение (2.0.1) и удовлетворяющую начальным условиям (2.0.2). Задача Коши (2.0.1), (2.0.2) в обобщенных функциях допускает сверточное представление

$$\begin{aligned}\big(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)\big) * \tilde{u}(t) = \\ = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + \\ + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).\end{aligned}$$

А, как уже было показано в п. 1.4 (см. замечание 1.4.1), единственное решение этого уравнения в $K'_+(E_1)$ (*обобщенное* решение начальной задачи (2.0.1), (2.0.2)) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \big(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + \\ + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)\big),\end{aligned} \tag{2.0.3}$$

где $\mathcal{E}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t))$. Восстановив в каждом конкретном случае вырождения уравнения (2.0.1) вид фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$, мы получим возможность для дальнейшего изучения вопроса однозначной разрешимости рассматриваемой начальной задачи в классах распределений с ограниченным слева носителем и функций конечной гладкости.

Результаты этой главы опубликованы в работах [45, 47, 73, 76, 79].

2.1 Случай фредгольмова оператора в главной части

Приведем и докажем некоторые утверждения, необходимые в дальнейшем.

Лемма 2.1.1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда справедливо равенство*

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = \begin{cases} \mathbb{O}_2, & k = \alpha p_i,\ i \neq q, \\ Q_q, & k = \alpha p_i,\ i = q, \\ \mathbb{O}_2, & k \neq \alpha p_i; \end{cases}$$

$q, i = 1, \ldots, n,\ k, \alpha \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку $Q_q = \langle \cdot,\ \psi_q \rangle\, z_q$ (см. п. 1.1), то, в силу равенства (1.1.1),

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle (A\Gamma)^k z_i,\ \psi_q \right\rangle z_q = \\ = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A(\Gamma A)^{k-1}\Gamma z_i,\ \psi_q \right\rangle z_q = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A(\Gamma A)^{k-1}\varphi_i,\ \psi_q \right\rangle z_q.$$

Пусть $k = \alpha p_i$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, тогда, учитывая свойство цикличности A-жорданова набора и $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$ (см. замечание 1.1.6), получим

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = Q_q(A\Gamma)^{\alpha p_i} Q_i = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A(\Gamma A)^{\alpha p_i - 1}\varphi_i,\ \psi_q \right\rangle z_q =$$

$$= \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A(\Gamma A)^{(\alpha-1)p_i+p_i-1}\varphi_i,\ \psi_q \right\rangle z_q = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_q \right\rangle z_q =$$

$$= \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \langle z_i,\ \psi_q \rangle z_q = \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \delta_{iq} z_q.$$

Таким образом,

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = \begin{cases} \mathbb{O}_2, & k = \alpha p_i,\ i \neq q, \\ Q_q, & k = \alpha p_i,\ i = q. \end{cases}$$

Пусть теперь $k \neq \alpha p_i$, но, тогда $k = (\alpha - 1)p_i + \beta$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, а $\beta = 1, \ldots, p_i - 1$. Принимая во внимание вновь свойство цикличности A-жорданова набора, а также условия разрешимости

$$\left\langle A\varphi_i^{(\beta)}, \psi_q \right\rangle = 0,\ i, q = 1, \ldots, n,\ \beta = 1, \ldots, p_i - 1,$$

уравнений для определения A-присоединенных элементов, имеем цепочку равенств

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = Q_q(A\Gamma)^{(\alpha-1)p_i+\beta} Q_i =$$

$$= \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A(\Gamma A)^{(\alpha-1)p_i+\beta-1}\varphi_i,\ \psi_q \right\rangle z_q =$$

$$= \langle \cdot,\ \psi_i \rangle \left\langle A\varphi_i^{(\beta)},\ \psi_q \right\rangle z_q = \mathbb{O}_2.$$

Тем самым, доказательство леммы завершено. □

Введем в рассмотрение оператор вида

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}. \tag{2.1.1}$$

Справедлива следующая

Лемма 2.1.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1.1, тогда справедливо равенство*

$$Q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Поскольку

$$Q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \sum_{q=1}^{n} Q_q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}),$$

то для доказательства требуемого достаточно показать, что

$$Q_q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

при каждом $q = 1, \ldots, n$.

Заметим, что

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ (\Gamma^* A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}\right\rangle A(\Gamma A)^{p_i-j}\varphi_i^{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ (\Gamma^* A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}\right\rangle A(\Gamma A)^{p_i-j}\Gamma z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ (\Gamma^* A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}\right\rangle (A\Gamma)^{p_i-j+1} z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}(A\Gamma)^{p_i-j+1}Q_i(A\Gamma)^{j-1}.$$

Тогда

$$Q_q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = Q_q(A\Gamma)^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}Q_q(A\Gamma)^{p_i-j+1+k}Q_i(A\Gamma)^{j-1}.$$

Поскольку $k \in \mathbb{N}$, значит, при каждом $p_i \in \mathbb{N}$ справедливо разложение $k = \alpha_i p_i + \beta_i,\ i = 1, \ldots, n$, где $\alpha_i \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ \beta_i = 0, \ldots, p_i - 1,\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ (так как $k \neq 0$), тогда

$$Q_q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) =$$

$$= Q_q(A\Gamma)^{\alpha_q p_q + \beta_q} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}Q_q(A\Gamma)^{(\alpha_i+1)p_i-j+1+\beta_i}Q_i(A\Gamma)^{j-1}.$$

Далее обозначим $\omega_i = (\alpha_i + 1)p_i - j + 1 + \beta_i$ и рассмотрим операторы вида

$$Q_q(A\Gamma)^{\omega_i}Q_i.$$

При каждом $i = 1, \ldots, n$ показатель ω_i пробегает значения подряд от $\alpha_i p_i + 1$ до $(\alpha_i + 2)p_i - 1$. В силу леммы 2.1.1 $Q_q(A\Gamma)^{\omega_i}Q_i = \mathbb{O}_2$ при всех этих значениях ω_i, за исключением случая $\omega_i = (\alpha_i + 1)p_i$ и $i = q$, при котором $Q_q(A\Gamma)^{\omega_i}Q_i = Q_q$, что возможно, когда $j = \beta_i + 1,\ i = q$. Значит, с учетом свойства цикличности A^*-жорданова набора, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}Q_q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = Q_q(A\Gamma)^{\alpha_q p_q+\beta_q} - Q_q(A\Gamma)^{\beta_q} = \\ = \left\langle \cdot,\ (\Gamma^* A^*)^{\alpha_q p_q+\beta_q}\psi_q^{(1)}\right\rangle z_q - \left\langle \cdot,\ (\Gamma^* A^*)^{\beta_q}\psi_q^{(1)}\right\rangle z_q = \\ = \left\langle \cdot,\ \psi_q^{(\beta_q+1)}\right\rangle z_q - \left\langle \cdot,\ \psi_q^{(\beta_q+1)}\right\rangle z_q = \mathbb{O}_2,\end{aligned}$$

которая и доказывает требуемое равенство. □

Замечание 2.1.1. Равенство из леммы 2.1.2 справедливо и при $k = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}Q_q(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \left\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\ \psi_q\right\rangle z_q = \\ = \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(1)}\right\rangle \left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_q\right\rangle z_q = \\ = \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q - \sum_{i=1}^{n}\langle \cdot,\ \psi_i\rangle \langle z_i,\ \psi_q\rangle z_q = \\ = \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q - \sum_{i=1}^{n}\delta_{iq}\langle \cdot,\ \psi_i\rangle z_q = \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q - \langle \cdot,\ \psi_q\rangle z_q = \mathbb{O}_2,\end{aligned}$$

откуда и следует

$$Q(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2.$$

Кроме того, отсюда можно получить еще одно полезное равенство

$$(\mathbb{I}_2 - Q)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{I}_2 - \tilde{Q}. \tag{2.1.2}$$

Лемма 2.1.3. *Пусть выполнены условия леммы 2.1.1, тогда справедливо равенство*

$$P + \Gamma\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)}.$$

Доказательство. Исходя из вида проектора P и оператора $\tilde{Q}$, заключаем, что

$$P + \Gamma\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n}\langle \cdot,\ \gamma_i\rangle \varphi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \Gamma A\varphi_i^{(p_i-j+1)}.$$

Поскольку $B^*\psi_i^{(1)} = 0,\ i = 1, \ldots, n$, то

$$P + \Gamma\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle \varphi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \Gamma A\varphi_i^{(p_i-j+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle \varphi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1} \left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)} \right\rangle \Gamma A\varphi_i^{(p_i-j)}.$$

Далее, используя $B^*\psi_i^{(j+1)} = A^*\psi_i^{(j)}$ и $\varphi_i^{(j+1)} = \Gamma A\varphi_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$, а также $\gamma_i = A^*\psi_i^{(p_i)},\ i = 1, \ldots, n$, получим

$$P + \Gamma\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \cdot,\ A^*\varphi_i^{(p_i)} \right\rangle \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1} \left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \Gamma A\varphi_i^{(p_i-j+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)}.$$

Тем самым лемма доказана. □

Замечание 2.1.2. На основе доказанного в лемме 2.1.3 нетрудно заметить, что

$$\tilde{Q}A - A\Gamma\tilde{Q}B = AP. \tag{2.1.3}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k\right],$$

где Γ — оператор Треногина–Шмидта, $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A-жорданов набор оператора B, $\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A^*-жорданов набор *оператора B^*, $r(t)$ — резольвента ядра $-g(t)$, под k-ой степенью обобщенной функции $(\delta(t)+g(t)\theta(t))\in\mathscr{D}'_+$ понимается ее повторная k-кратная свертка, т. е.*

$$(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k=\underbrace{(\delta(t)+g(t)\theta(t))*\dots*(\delta(t)+g(t)\theta(t))}_{k\ \text{раз}},$$

причем $(\delta(t)+g(t)\theta(t))^0=\delta(t)$.

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции требуется проверить два сверточных равенства

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\mathbb{I}_2\delta(t)$$

и

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=\mathbb{I}_1\delta(t).$$

Поскольку $B\Gamma=\mathbb{I}_2-Q,\ B\varphi_i^{(1)}=0,\ i=1,\dots,n$, и

$$(\delta(t)+g(t)\theta(t))*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k=(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1},$$

в первом равенстве имеем

$$\begin{gathered}(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\\
=\sum_{k=1}^{+\infty}\delta^{(N)}(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(\mathbb{I}_2-Q)(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-\\
-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-\\
-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+\\
+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right]=\\
=(\mathbb{I}_2-Q)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)+\\
+\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(\mathbb{I}_2-Q)(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-\\
-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-\end{gathered}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right].$$

Далее учтем равенство (2.1.2), результат леммы 2.1.2, вид оператора $\tilde{Q}$ и $B\varphi_i^{(j+1)}=A\varphi_i^{(j)}$, $j=1,\ldots,p_i-1$, $i=1,\ldots,n$ (см. п. 1. 1.).

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)-$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)Q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})+\tilde{Q}\delta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]=$$

$$=\mathbb{I}_2\delta(t).$$

Теперь докажем второе равенство. Так как $B^*\psi_i^{(1)}=0,\ i=1,\ldots,n$ и

$$(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k*(\delta(t)+g(t)\theta(t))=(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1},$$

то

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\delta^{(N)}(t)\Gamma(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B-$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)\Gamma(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})A-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right]=$$

$$=\Gamma(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B\delta(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)\Gamma(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B-$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)\Gamma(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})A-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=2}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)}\delta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right].$$

Используя равенство $\Gamma B=\mathbb{I}_1-P$ и (2.1.3), результат леммы 2.1.3 и уравнения $B^*\psi_i^{(j+1)}=A^*\psi_i^{(j)}$, $j=1,\dots,p_i-1$, $i=1,\dots,n$ для определения A^*-присоединенных элементов, получим

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=(\mathbb{I}_1-P-\Gamma\tilde{Q}B)\delta(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)\Gamma(A\Gamma)^{k-1}\times$$

$$\times(A-AP-A\Gamma\tilde{Q}B-A+\tilde{Q}A)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)}\delta(t)=\mathbb{I}_1\delta(t),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 2.1.3. Фундаментальная оператор-функция может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + M_N(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right],$$

где $M_N(t)$ — резольвента ядра $A\Gamma\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$, которая представляет собой операторно-функциональный ряд, сходящийся в топологии $\mathcal{L}(E_2)$ равномерно на любом компакте $[0,\, T]$, причем имеет место оценка

$$\|M_N(t)\|_{\mathcal{L}(E_2)} \leq C\exp CT,$$

здесь $C = \|A\Gamma\|_{\mathcal{L}(E_2)} \cdot \max\limits_{t\in[0,\,T]}\left|\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right|$. Отметим также, что справедливы равенства

$$M_N(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}A\Gamma + \int\limits_0^t \frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)d\tau_1 A\Gamma +$$
$$+\int\limits_0^t \frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}A\Gamma M_N(\tau_1)d\tau_1 +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau_1} \frac{(t-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)A\Gamma M_N(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.1.4)$$

и

$$QM_N(t)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2, \qquad (2.1.5)$$

первое из которых следует из определения резольвенты ядра, второе — из леммы 2.1.2.

Замечание 2.1.4. В соответствии с замечанием 1.4.1 единственным обобщенным решением задачи Коши (2.0.1), (2.0.2) является распределение

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t),$$

где $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ имеет вид

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-1)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).$$

Введем обозначения

$$p(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\ ,$$

$$h_0(t) = f(t) + Ap(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds,$$

тогда справедливо равенство

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * p(t)\theta(t) -$$
$$- \left[Bp^{(N)}(t) - Ap(t) - \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds\right]\theta(t),$$

или, поскольку $p^{(N)}(t) \equiv 0$

$$\tilde{g}(t) = (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * p(t)\theta(t) + h_0(t)\theta(t). \qquad (2.1.6)$$

Рассмотрим также последовательность регулярных обобщенных функций из $K'_+(E_2)$ вида

$$h_k(t)\theta(t) = (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k * h_0(t)\theta(t),\ k \in \mathbb{N},$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$. Поскольку

$$h_0(t)\theta(t) = f(t)\theta(t) + (\delta(t) + g(t)\theta(t)) * Ap(t)\theta(t)$$

и

$$(\delta(t) + r(t)\theta(t)) * (\delta(t) + g(t)\theta(t)) = \delta(t),$$

для $h_k(t)$ справедливо иное представление

$$h_k(t)\theta(t) = (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k * f(t)\theta(t) + (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k-1} * Ap(t)\theta(t),$$

и соотношение

$$(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * h_k(t)\theta(t) = h_{k-1}(t)\theta(t),\ k \in \mathbb{N}.$$

Последнее имеет место в классическом смысле, а именно:

$$h_k(t) + \int\limits_0^t g(t-s)h_k(s)ds = h_{k-1}(t). \qquad (2.1.7)$$

Заметим также, что в случае $f(t) \in C^{\alpha}(t \geq 0; E_2)$ и $g(t) \in C^{\alpha}(t \geq 0)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ справедливо еще одно соотношение

$$h_k^{(\alpha)}(t) + \int\limits_0^t g(t-s)h_k^{(\alpha)}(s)ds = h_{k-1}^{(\alpha)}(t) - \sum_{q=1}^{\alpha} h_k^{(q-1)}(0)g^{(\alpha-q)}(t), \quad (2.1.8)$$

которое получается из (2.1.7) с помощью замены в интеграле и дифференцирования.

Справедлива следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0), \;\; f(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0;\; E_2), \;\; p = \max_{i=1,\ldots,n} p_i,$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\; \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \Bigg] \theta(t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N} \left\langle h_k^{((k-1)N-q)}(0),\; \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t), \quad (2.1.9)$$

где используются обозначения двух последних замечаний.

Доказательство. Если выполняются условия теоремы 2.1.1, то известен вид фундаментальной оператор-функции, указанный в этой теореме. Отсюда, в силу замечания 1.4.1, задача Коши (2.0.1), (2.0.2) имеет единственное обобщенное решение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t)$. Теперь восстановим его вид. Сначала подставим выражение (2.1.6) для распределения $\tilde{g}(t)$ в последнюю формулу

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t) =$$

$$= \mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * p(t)\theta(t) + h_0(t)\theta(t) =$$
$$= \mathbb{I}_1\delta(t) * p(t)\theta(t) + \mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t) =$$
$$= p(t)\theta(t) + \mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t).$$

Далее, используя обозначения замечания 2.1.4, получим

$$\mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t) =$$
$$= \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + M_N(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) * h_0(t)\theta(t) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^k * h_0(t)\theta(t) =$$
$$= \left[\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau ds\right]\theta(t) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t) * h_k(t)\theta(t).$$

Поскольку выполняются условия гладкости

$$g(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0;\ E_2),\ p = \max_{i=1,\ldots,n} p_i,$$

имеет место равенство

$$\delta^{((k-1)N)}(t) * h_k(t)\theta(t) =$$
$$= \begin{cases} h_1(t)\theta(t), & k = 1, \\ h_k^{((k-1)N)}(t)\theta(t) + \sum\limits_{q=1}^{(k-1)N} h_k^{((k-1)N-q)}(0)\delta^{(q-1)}(t), & k = 2, \ldots, p_i; \end{cases}$$

подставляя которое в предыдущее выражение, получим требуемую формулу. □

Замечание 2.1.5. Условие сильной гладкости порядка $((p-1)N)$ функции $f(t)$ в теореме 2.1.2 можно ослабить, заменив следующим:

$$\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \in C^{(p_i-j)N}(t \geq 0),\ j = 1, \ldots, p_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда последняя группа слагаемых выражения $\mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k*h_0(t)\theta(t) =$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\delta^{((k-1)N)}(t)*\left\langle h_k(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \theta(t)\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

Введем обозначение для числовых функций

$$\xi_{kji}(t)=\left\langle h_k(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle,\ k=1,\ldots,p_i,\ j=1,\ldots,p_i+1-k,\ i=1,\ldots,n.$$

Принимая во внимание ослабленное условия на функцию $f(t)$, а также $g(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0),\ p=\max\limits_{i=1,\ldots,n}p_i$, можно заключить, что справедлива формула

$$\delta^{((k-1)N)}(t)*\left\langle h_k(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\theta(t)=$$
$$=\begin{cases}\xi_{1ji}(t)\theta(t), & k=1,\\ \xi_{kji}^{((k-1)N)}(t)\theta(t)+\sum\limits_{q=1}^{(k-1)N}\xi_{kji}^{((k-1)N-q)}(0)\delta^{(q-1)}(t), & k=2,\ldots,p_i.\end{cases}$$

В этом случае обобщенное решение имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\Bigg[p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\xi_{kji}^{((k-1)N)}(t)\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\Bigg]\theta(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\xi_{kji}^{((k-1)N-q)}(0)\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t).$$

Замечание 2.1.6. Обобщенное решение представляет собой следующее распределение

$$\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)+\omega(t),$$

где $\omega(t) \in K'_+(E_1)$ является линейной комбинацией δ-функции Дирака и ее производных. Если $\omega(t) \equiv 0$, что возможно, в силу линейной независимости системы элементов $\left\{\varphi_i^{(j)},\ j = 1, \ldots, p_i,\ i = 1, \ldots, n\right\}$, тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0, \tag{2.1.10}$$

$$q = 1, \ldots, (k-1)N,\ k = 2, \ldots, p_i,\ j = 1, \ldots, p_i - k + 1,\ i = 1, \ldots, n,$$

то обобщенное решение имеет вид

$$\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t).$$

Здесь

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \tag{2.1.11}$$

принадлежит классу $C(t \geq 0; E_1) \cap C^N(t > 0; E_1)$ при $g(t) \in C^{pN}(t \geq 0)$, $f(t) \in C^{pN}(t \geq 0; E_2)$, $p = \max\limits_{i=1,\ldots,n} p_i$.

Кроме того, функция $u(t)$ обращает в тождество уравнение (2.0.1). Покажем это. Производная N-го порядка имеет вид

$$u^{(N)}(t) = \Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(t) + \int\limits_0^t \Gamma M_N(t-s)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{(kN)}(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

Так как $B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q$, то

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds =$$

$$= (\mathbb{I}_2 - Q)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(t) + \int\limits_0^t (\mathbb{I}_2 - Q)M_N(t-s)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{(kN)}(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} -$$

$$- Ap(t) - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} A\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!} A\Gamma M_N(\tau_1)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau_1 ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} -$$

$$- \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!} g(\tau_1)A\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau_1 ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \int\limits_0^{t-s-\tau_1} \frac{(t-s-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!} g(\tau_2)A\Gamma M_N(\tau_1)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)d\tau_2 d\tau_1 ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \int\limits_0^t g(t-s)h_k^{((k-1)N)}(s)ds,\, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

Далее воспользуемся равенством (2.1.2), (2.3.2), а также $B\varphi_i^{(1)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ и перегруппируем слагаемые следующим образом

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds =$$

$$= (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(t) - Ap(t) - \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle h_k^{(kN)}(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle h_1(t) + \int\limits_0^t g(t-s)h_1(s)ds,\, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t)+\int\limits_0^t g(t-s)h_k^{((k-1)N)}(s)ds,\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}+$$

$$+\int\limits_0^t\left[M_N(t-s)-\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}A\Gamma-\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-\tau_1-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)A\Gamma d\tau_1-\right.$$

$$-\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-\tau_1-s)^{N-1}}{(N-1)!}A\Gamma M_N(\tau_1)d\tau_1-$$

$$\left.-\int\limits_0^{t-s}\int\limits_0^{t-\tau_1-s}\frac{(t-\tau_1-\tau_2-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)A\Gamma M_N(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1\right](\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds.$$

Последняя группа интегральных слагаемых зануляется в силу равенства (2.1.4). Далее, принимая во внимание вид функции $h_0(t)$, соотношения (2.1.7) и (2.1.8), получим

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds=$$

$$=f(t)-\tilde{Q}h_0(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle h_0(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_{k-1}^{((k-1)N)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle g^{((k-1)N-q)}(t)A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)},$$

Поскольку выполнены условия (2.1.10), последняя группа слагаемых в данном выражении зануляется. Остается

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds=$$

$$=f(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_{k-1}^{((k-1)N)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}=$$

$$=f(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle\left(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right)=$$

$$=f(t),$$

так как $B\varphi_i^{(j+1)}=A\varphi_i^{(j)},\ j=1,\ldots,p_i-1,\ i=1,\ldots,n$. Таким образом, функция (2.1.11) обращает в тождество уравнение 2.0.1.

Заметим, что, поскольку $p^{(i-1)}(0)=u_{i-1}, i=1,\ldots,N$, функция (2.1.11) удовлетворяет начальным условиям

$$u(0)=u_0-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)},$$

$$u'(0)=u_1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N+1)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)},$$

$$\ldots,$$

$$u^{(N-1)}(0)=u_{N-1}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N+N-1)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

Следовательно, (2.1.11) удовлетворяет начальным условиям (2.0.2) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle=0, \tag{2.1.12}$$

$q=(k-1)N+1,\ldots,kN,\ k=1,\ldots,p_i,\ j=1,\ldots,p_i-k+1,\ i=1,\ldots,n.$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1 и*

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\ \ f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2),\ \ p=\max_{i=1,\ldots,n}p_i,$$

тогда, если

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle=0,$$

$$q=1,\ldots,kN,\ \ k=1,\ldots,p_i,\ \ j=1,\ldots,p_i-k+1,\ \ i=1,\ldots,n,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида* (2.1.11).

Замечание 2.1.7. Условие сильной гладкости функции $f(t)$ можно заменить следующим

$$\left\langle f(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{(p_i-j+1)N}(t \geq 0),\ j = 1, \dots, p_i,\ i = 1, \dots, n,$$

тогда условия, ограничивающие входные данные начальной задачи имеют вид

$$\xi_{kji}^{(q-1)}(0) = 0,\ q = 1, \dots, kN,\ k = 1, \dots, p_i,\ j = 1, \dots, p_i-k+1,\ i = 1, \dots, n,$$

здесь используется обозначение замечания 2.1.5.

Замечание 2.1.8. Представленные здесь результаты согласуются со случаем $g(t) \equiv 0$, исследованным ранее в [88, 127]

Пример 2.1.1. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)(x_1(s) + x_2(s))ds + f_1(t), \\ 0 = x_2(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)x_2(s)ds + f_2(t); \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = -\sin t$. Очевидно, что

$$\dim N(B) = \dim N(B^*) = 1 \ \text{ и } \ \varphi = \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что B^* означает транспонированную матрицу ${}^tB$. Заметим также, что $(A\varphi,\, \psi) = 1$, а, значит, φ не имеет A-присоединенных векторов или p, длина A-жордановой цепочки, равна 1. Мы можем выписать

$$z = A\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ и } \ \gamma = A^*\psi = {}^tA\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А теперь

$$\tilde{B} = B + (\cdot,\,\gamma)z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Gamma = (\tilde{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{I}_2 - (\cdot,\,\psi)z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (\cdot,\,\psi)\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор-функция $A\Gamma\left(t + \int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\right)$ имеет вид

$$A\Gamma\big(t + \int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\big) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix},$$

а ее резольвентой является матрица функция

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

а резольвентой функции $(-g(t))$ является $r(t) = t$. Таким образом, фундаментальная оператор функция интегро-дифференциального оператора имеет вид:

$$\mathcal{E}_2(t) = \begin{pmatrix} (t + \frac{t^3}{3!})\theta(t) & -(t + \frac{t^3}{3!})\theta(t) \\ 0 & -\delta(t) - t\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \tilde{g}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}\theta(t) + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\delta(t) + \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\delta'(t),$$

обобщенное решение имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_2(t) * \tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\theta(t) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \left((t-s) + \frac{(t-s)^3}{3!}\right)(f_1(s) - f_2(s))ds \\ -f_2(t) - \int\limits_0^t (t-s)f_2(s)ds \end{pmatrix}\right]\theta(t).$$

И оно станет классическим, если $f_2(t) \in C^2(t \geq 0)$ и будут выполнены условия $f_2(0) = -x_{20}$, $\dot{f}_2(0) = -x_{21}$, которые можно получить из второго уравнения исходной системы, не прибегая к данному исследованию, что позволяет сделать вывод о согласованности представленного подхода с классическими методами решения подобных задач.

Замечание 2.1.9. Из основных утверждений этого пункта могут быть извлечены результаты для случая непрерывно обратимого оператора B. Для этого всюду нужно положить $\varphi_i^{(j)} = 0$ и $\psi_i^{(j)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, а оператор Треногина–Шмидта Γ заменить ограниченным оператором B^{-1}, обратным к B. Ниже сформулируем эти утверждения.

Теорема 2.1.4. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B непрерывно обратим, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(AB^{-1})^{k-1},$$

где под k-ой степенью обобщенной функции $(\delta(t) + g(t)\theta(t)) \in \mathscr{D}'_+$ понимается ее повторная k-кратная свертка, т. е.

$$(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k = \underbrace{(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * \cdots * (\delta(t) + g(t)\theta(t))}_{k \text{ раз}},$$

причем $(\delta(t) + g(t)\theta(t))^0 = \delta(t)$.

Замечание 2.1.10. Если ввести обозначение $L_N(t)$ для резольвенты ядра $AB^{-1}\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} g(s)ds\right)$, то фундаментальная оператор-функция может быть записана в следующем виде:

$$\mathcal{E}_N(t) = B^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + L_N(t)\theta(t)).$$

Теорема 2.1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.4, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если $f(t)$ локально интегрируема по Бохнеру, то оно имеет вид*

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h_0(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} L_N(\tau) h_0(s) d\tau ds\Bigg] \theta(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.1.10.

Теорема 2.1.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.4, тогда, если* $f(t) \in C(t \geq 0;\ E_2)$, *то задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение*

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} h_0(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B^{-1} L_N(\tau) h_0(s) d\tau ds.$$

2.2 Случай нетерова оператора в главной части

В этом параграфе будем использовать сведения из пункта 1.2 с сохранением принятых там обозначений.

Лемма 2.2.1. *Пусть* $B,\ A$ *— замкнутые линейные операторы, действующие из* E_1 *в* E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, *оператор* B *нетеров и имеет полный* A*-жорданов набор, тогда справедливо равенство*

$$\sum_{q=1}^{l} \mathcal{Q}_q (AB^+)^k \left(\mathbb{I}_2 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right) = \mathbb{O}_2,\ k \in \mathbb{N},$$

здесь $l = \min(n,\ m),\ n = \dim N(B),\ m = \dim N(B^*)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{Q}_q(AB^+)^k$, $q = 1, \ldots, l$. Так как $(B^{*+}A^*)^k \psi_q^{(1)} = \psi_q^{(k+1)}$ при $k = 1, \ldots, p_q - 1,\ q = 1, \ldots, l$, то $\mathcal{Q}_q(AB^+)^k = \big\langle \cdot,\ \psi_q^{(k+1)} \big\rangle z_q$. А при $k = p_q$ получим

$$\mathcal{Q}_q(AB^+)^{p_q} = \big\langle \cdot,\ B^{*+}A^*\psi_q^{(p_q)} \big\rangle z_q = \big\langle \cdot,\ B^{*+}\gamma_q \big\rangle z_q = \mathbb{O}_2,$$

поскольку $A^*\psi_q^{(p_q)} = \gamma_q$ и $\gamma_q \in N(B^{*+})$. Отсюда, очевидно, следует, что и при всех $k > p_q$ имеет место равенство $\mathcal{Q}_q(AB^+)^k = \mathbb{O}_2$. Таким образом, для каждого $q = 1, \ldots, l$

$$\mathcal{Q}_q(AB^+)^k \left(\mathbb{I}_2 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right) = \mathbb{O}_2,\ k \geq p_q.$$

Покажем, что это справедливо и при $k = 1, \ldots, p_q - 1$. Согласно (1.2.1) и (1.2.2),

$$\mathcal{Q}_q(AB^+)^k \left(\mathbb{I}_2 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right) =$$

$$= \left\langle \cdot,\ \psi_q^{(k+1)} \right\rangle z_q - \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \left\langle (AB^+)^k A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\ \psi_q \right\rangle z_q =$$

$$= \left\langle \cdot,\ \psi_q^{(k+1)} \right\rangle z_q - \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \left\langle A(B^+A)^k \varphi_i^{(p_i+1-j)},\ \psi_q \right\rangle z_q =$$

$$= \left\langle \cdot,\ \psi_q^{(k+1)} \right\rangle z_q - \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \left\langle A(B^+A)^{k+p_i-j} \varphi_i^{(1)},\ \psi_q \right\rangle z_q.$$

Теперь рассмотрим числа $\left\langle A(B^+A)^{k+p_i-j}\varphi_i^{(1)},\ \psi_q \right\rangle$. При фиксированных $k = 1, \ldots, p_q - 1$ и $i = 1, \ldots, l$, изменяющемся индексе $j = 1, \ldots, p_i$ показатель $k + p_i - j$ пробегает подряд натуральные значения от k до $k + p_i - 1$, где гарантировано имеется $p_i - 1$, при котором

$$\left\langle A(B^+A)^{k+p_i-j}\varphi_i^{(1)},\ \psi_q \right\rangle = \left\langle A(B^+A)^{p_i-1}\varphi_i^{(1)},\ \psi_q \right\rangle =$$
$$= \left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_q \right\rangle = \delta_{iq}.$$

При всех остальных значениях $k + p_i - j$ наши числа равны нулю. Для тех значений k и j, при которых $k + p_i - j < p_i - 1$, это можно установить из формулы (1.2.3), а, если $k + p_i - j \geq p_i$, то следует принять во внимание два факта: $A\varphi_i^{(p_i)} = z_i$ (см. замечание 1.2.2) и $z_i \in N(B^+)$ (из определения псевдообратного оператора). Тем самым, среди чисел $\left\langle A(B^+A)^{k+p_i-j}\varphi_i^{(1)},\ \psi_q \right\rangle$ отличными от нуля (равными единице) являются только те, у которых $i = q$ и $j = k + 1$. Отсюда для всех $q = 1, \ldots, l$

получаем

$$\mathcal{Q}_q(AB^+)^k\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=$$

$$=\left\langle\cdot,\ \psi_q^{(k+1)}\right\rangle z_q-\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\left\langle A(B^+A)^{k+p_i-j}\varphi_i^{(1)},\ \psi_q\right\rangle z_q=$$

$$=\left\langle\cdot,\ \psi_q^{(k+1)}\right\rangle z_q-\left\langle\cdot,\ \psi_q^{(k+1)}\right\rangle z_q=\mathbb{O}_2,\ k=1,\ldots,p_q-1.$$

Таким образом, мы показали, что при каждом $q=1,\ldots,l$ и любом $k\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathcal{Q}_q(AB^+)^k\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=\mathbb{O}_2,$$

из которого и следует требуемое. □

Замечание 2.2.1. Лемма 2.2.1 справедлива и при $k=0$, а именно:

$$\sum_{q=1}^{l}\mathcal{Q}_q\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=\mathbb{O}_2. \tag{2.2.1}$$

Действительно, при всех $q=1,\ldots,l$

$$\mathcal{Q}_q\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=$$

$$=\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\left\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\ \psi_q\right\rangle z_q=$$

$$=\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q-\sum_{i=1}^{l}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(1)}\right\rangle\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_q\right\rangle z_q=$$

$$=\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q-\sum_{i=1}^{l}\langle\cdot,\ \psi_i\rangle\langle z_i,\ \psi_q\rangle z_q=$$

$$=\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q-\sum_{i=1}^{l}\delta_{iq}\langle\cdot,\ \psi_i\rangle z_q=\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q-\langle\cdot,\ \psi_q\rangle z_q=\mathbb{O}_2.$$

Отсюда также следует равенство

$$\left(\mathbb{I}_2-\sum_{q=1}^{l}\mathcal{Q}_q\right)\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=$$

$$= \mathbb{I}_2 - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}. \quad (2.2.2)$$

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.2.1, тогда*

$$\sum_{i=1}^{l}\langle \cdot,\, \gamma_i\rangle \varphi_i + B^+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}. \quad (2.2.3)$$

Доказательство. Поскольку $B^*\psi_i^{(1)} = 0$, то, с учетом (1.2.1), справедлива цепочка равенств

$$B^+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=2}^{p_i}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle (B^+A)^{p_i-j+1}\varphi_i^{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j+1)}\right\rangle (B^+A)^{p_i-j}\varphi_i^{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j+1)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

Далее, используя $B^*\psi_i^{(j+1)} = A^*\psi_i^{(j)},\ j = 1,\ldots,p_i$ (см. замечание 1.2.3), и $A^*\psi_i^{(p_i)} = \gamma_i,\ i = 1,\ldots,l$ (см. замечание 1.2.2), получим

$$B^+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)} - \sum_{i=1}^{l}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(p_i)}\right\rangle \varphi_i^{(1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)} - \sum_{i=1}^{l}\langle \cdot,\, \gamma_i\rangle \varphi_i,$$

откуда и следует искомое равенство. □

Замечание 2.2.2. Имеет место еще одно полезное равенство

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} - AB^+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} = \\ = \sum_{i=1}^{l}\langle \cdot,\, \gamma_i\rangle A\varphi_i. \quad (2.2.4)$$

Замечание 2.2.3. При $n < m$ (2.2.3) и (2.2.4) можно переписать так:

$$\mathcal{P} + B^+\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)} \qquad (2.2.5)$$

и

$$\tilde{Q}A - AB^+\tilde{Q}B = A\mathcal{P}, \qquad (2.2.6)$$

где $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $B,\ A$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1,\ D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B нетеров, $n < m$ и имеет полный A-жорданов набор, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B^+\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) + U_N(t)\theta(t)\Big)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) - \\ - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k\right], \qquad (2.2.7)$$

на подклассе обобщенных функций $w(t) \in K'_+(E_2)$ таких, что

$$Q_\nu\Big(\mathbb{I}_2\delta(t) + U_N(t)\theta(t)\Big) * w(t) = 0,\ \nu = n+1, \ldots, m.$$

Здесь B^+ — псевдообратный оператор, $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A-жорданов набор оператора B, $\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A^*-жорданов набор оператора B^*, $U_N(t)$ — резольвента ядра $AB^+\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$,

$r(t)$ — резольвента ядра $-g(t)$, под k-ой степенью обобщенной функции $(\delta(t)+g(t)\theta(t))\in \mathscr{D}'_+$ понимается ее повторная k-кратная свертка

$$(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k=\underbrace{(\delta(t)+g(t)\theta(t))*\cdots*(\delta(t)+g(t)\theta(t))}_{k\ \text{раз}},$$

причем $(\delta(t)+g(t)\theta(t))^0=\delta(t)$.

Доказательство. В соответствии с определением 1.4.1 покажем, что, во-первых,

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)*w(t)=w(t),$$

для любого распределения $w(t)\in K'_+(E_2)$, которое удовлетворяет соотношению

$$Q_\nu\Big(\mathbb{I}_2\delta(t)+U_N(t)\theta(t)\Big)*w(t)=0,\ \nu=n+1,\dots,m,$$

и, во-вторых,

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*v(t)=v(t),\ \forall\ v(t)\in K'_+(E_1).$$

Поскольку $BB^+=\mathbb{I}_2-\mathcal{Q}$,

$$U_N(t)\theta(t)=AB^+\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))+ \\ +AB^+\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))*U_N(t)\theta(t)),$$

(сведения о резольвенте см. в прмере 1.4.2), $B\varphi_i^{(1)}=0,\ i=1,\dots,n$, и

$$(\delta(t)+g(t)\theta(t))*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k=(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1},$$

справедлива цепочка равенств

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)= \\ (\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})\Big(\mathbb{I}_2\delta(t)+U_N(t)\theta(t)\Big)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})- \\ -AB^+\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))*\Big(\mathbb{I}_2\delta(t)+U_N(t)\theta(t)\Big)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})- \\ -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\Big\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\Big\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right]=$$

$$=(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)-\mathcal{Q}U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right]=$$

$$=\left(\mathbb{I}_2-\sum_{\nu=1}^{n}\mathcal{Q}_\nu-\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu\right)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)-$$

$$-\left(\sum_{\nu=1}^{n}\mathcal{Q}_\nu-\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu\right)U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})+\tilde{Q}\delta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right].$$

Но $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\mathcal{Q}_\nu(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=\mathbb{O}_2$, согласно (2.2.1) (в нашем случае $n<m$, значит, $l=n$), а, так как

$$U_N(t)\theta(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}(AB^+)^k\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k, \tag{2.2.8}$$

то, в силу леммы 2.2.1, $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\mathcal{Q}_\nu U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\equiv\mathbb{O}_2$. Учитывая это все и $B\varphi_i^{(j+1)}=A\varphi_i^{(j)}$, $j=1,\ldots,p_i-1$, $i=1,\ldots,n$ (см. определение 1.2.1), получим

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)-$$

$$-\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)+\tilde{Q}\delta(t)-\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=$$

$$= \mathbb{I}_2\delta(t) - \sum_{\nu=n+1}^{m} \mathcal{Q}_\nu \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) + U_N(t)\theta(t)\Big) +$$
$$+ \sum_{\nu=n+1}^{m} \mathcal{Q}_\nu \tilde{Q}\delta(t) + \sum_{\nu=n+1}^{m} \mathcal{Q}_\nu U_N(t)\theta(t)\tilde{Q}.$$

Однако $\mathcal{Q}_\nu\tilde{Q} = \mathbb{O}_2$ и $\mathcal{Q}_\nu(AB^+)^k\tilde{Q} = \mathbb{O}_2,\ k \in \mathbb{N}$ при $\nu = n+1, \ldots, m$, что является прямым следствием формул (1.2.3) и (1.2.4) из замечания 1.2.2. Таким образом,

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) =$$
$$= \mathbb{I}_2\delta(t) - \sum_{\nu=n+1}^{m} \mathcal{Q}_\nu \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) + U_N(t)\theta(t)\Big),$$

поэтому для всякой обобщенной функции $w(t) \in K'_+(E_2)$, удовлетворяющей условию $Q_\nu\Big(\mathbb{I}_2\delta(t) + U_N(t)\theta(t)\Big) * w(t) = 0,\ \nu = n+1, \ldots, m$, выполняется

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t),$$

т. е. первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем второе равенство, при этом будем использовать эквивалентый вид фундаментальной оператор-функции

$$\mathcal{E}_N(t) = B^+ \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(AB^+)^{k-1}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \Big\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \Big\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k \right],$$

который можно получить путем тождественного преобразования регулярной части с использованием (2.2.8). Так как $B^*\psi_i^{(1)} = 0,\ i = 1, \ldots, n$ и

$$(\delta(t) + r(t)\theta(t))^k * (\delta(t) + g(t)\theta(t)) = (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k-1},$$

то

$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) =$$

$$
=\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\delta^{(N)}(t)B^{+}(AB^{+})^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B-
$$

$$
-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)B^{+}(AB^{+})^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})A-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ B^{*}\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ A^{*}\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right]=
$$

$$
=B^{+}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B\delta(t)+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)B^{+}(AB^{+})^{k}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})B-
$$

$$
-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)B^{+}(AB^{+})^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})A-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=2}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ B^{*}\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ A^{*}\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-j+1)}\delta(t)+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ A^{*}\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((k-1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k-1}\right].
$$

Используя равенства $B^{+}B=\mathbb{I}_1-\mathcal{P}$, (2.2.5), (2.2.6), а также уравнения $B^{*}\psi_i^{(j+1)}=A^{*}\psi_i^{(j)}$, $j=1,\ldots,p_i-1$, $i=1,\ldots,n$ для A^{*}-присоединенных элементов (см. замечание 1.2.3), получим

$$
\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=(\mathbb{I}_1-\mathcal{P}-B^{+}\tilde{Q}B)\delta(t)+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)B^{+}(AB^{+})^{k-1}\times
$$

$$
\times(A-A\mathcal{P}-AB^{+}\tilde{Q}B-A+\tilde{Q}A)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ B^{*}\psi_i^{(j+1)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{k}\right]+
$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-j+1)}\delta(t)=\mathbb{I}_1\delta(t),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$\left\langle h_0(t)+\int_0^t U_N(t-s)h_0(s)ds,\ \psi_\nu\right\rangle=0,\ \ \nu=n+1,\ldots,m, \qquad (2.2.9)$$

тогда задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0),\ \ f(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0;\ E_2),\ \ p=\max_{i=1,\ldots,n}p_i,$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\left[p(t)+\int_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}B^+(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds+\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B^+U_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\right]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\left\langle h_k^{((k-1)N-q)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t), \qquad (2.2.10)$$

где используются обозначения теоремы 2.2.1 и замечания 2.1.4.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$\left\langle h_0(t)+\int_0^t U_N(t-s)h_0(s)ds,\ \psi_\nu\right\rangle z_\nu\theta(t)=$$

$$=Q_\nu\Big(\mathbb{I}_2\delta(t)+U_N(t)\theta(t)\Big)*\tilde{g}(t),\ \ \nu=n+1,\ldots,m,$$

значит, из условия (2.2.9) следует, что $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ принадлежит подклассу обобщенных функций, на котором оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$, согласно теореме 2.2.1, является фундаментальной для интегро-дифференциального оператора $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$. Но тогда задача Коши (2.0.1), (2.0.2) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t).$$

Дальнейшее доказательство теоремы — это преобразование последней свертки в более развернутую форму с учетом введенных ранее обозначений. Эти рассуждения аналогичны изложенным в доказательстве теоремы 2.1.2 предыдущего пункта и из них могут быть получены путем замены Γ на B^+ и $M_N(t)$ на $U_N(t)$. $\square$

Замечание 2.2.4. В теореме 2.2.2 условие сильной непрерывности функции $f(t)$ и ее производных до $((p-1)N)$-го порядка включительно можно заменить более слабым:

$$\left\langle f(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{(p_i-j)N}(t \geq 0),\ j = 1, \dots, p_i,\ i = 1, \dots, n,$$

а обобщенное решение переписать с учетом обозначения

$$\xi_{kji}(t) = \left\langle h_k(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, соотношения* (2.2.9) *и*

$$g(t) \in C^{pN}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{pN}(t \geq 0;\ E_2),\ p = \max_{i=1,\dots,n} p_i,$$

тогда, если

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0,$$

$$q = 1, \dots, kN,\ k = 1, \dots, p_i,\ j = 1, \dots, p_i - k + 1,\ i = 1, \dots, n,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B^+(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})h_0(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B^+U_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}. \quad (2.2.11)$$

Доказательство. Поскольку $g(t)\in C^{pN}(t\geq 0)$, $f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2)$, $p=\max\limits_{i=1,\ldots,n}p_i$, то, очевидно, $u(t)\in C^N(t\geq 0;\ E_1)$. Кроме того, при $\alpha=1,\ldots,N$, справедлива цепочка равенств

$$u^{(\alpha-1)}(0)=$$

$$=p^{(\alpha-1)}(0)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N+\alpha-1)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}=$$

$$=u_{\alpha-1},$$

так как, в частности,

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle=0,$$

$q=(k-1)N+1,\ldots,kN,\ k=1,\ldots,p_i,\ j=1,\ldots,p_i-k+1,\ i=1,\ldots,n$ и $p^{(\alpha-1)}(0)=u_{\alpha-1},\ \alpha=1,\ldots,N$. Теперь покажем, что функция $u(t)$ обращает в тождество уравнение (2.0.1). Подставляя все в это уравнение, получаем

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds=$$

$$=(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(t)+\int\limits_0^t(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})U_N(t-s)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-$$

$$-Ap(t)-\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}AB^+(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}AB^+U_N(\tau_1)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau_1 ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-$$

$$-\int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds-\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)AB^+(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau_1ds-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\int\limits_0^{t-s-\tau_1}\frac{(t-s-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)AB^+U_N(\tau_1)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau_2d\tau_1ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\int\limits_0^t g(t-s)h_k^{((k-1)N)}(s)ds,\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)},$$

далее воспользуемся соотношением

$$U_N(t)=\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}AB^++\int\limits_0^t\frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)d\tau_1AB^++$$

$$+\int\limits_0^t\frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}AB^+U_N(\tau_1)d\tau_1+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau_1}\frac{(t-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)AB^+U_N(\tau_1)d\tau_2d\tau_1$$

для резольвенты $U_N(t)$ ядра $AB^+\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$ равенствами (2.1.7), (2.1.8) и $B\varphi_i^{(1)}=0,\ i=1,\ldots,n$, осуществляя преобразования, аналогичные используемым в замечании 2.1.6 (доказательстве теоремы 2.1.3) предыдущего пункта, получим

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds=$$

$$=(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(t)-\int\limits_0^t\mathcal{Q}U_N(t-s)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds-$$

$$-Ap(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle h_0(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_{k-1}^{((k-1)N)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle g^{((k-1)N-q)}(t)A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

Последняя группа слагаемых обнуляется по условию. В ходе доказательства теоремы 2.2.1 было показано, что

$$(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=\mathbb{I}_2-\tilde{Q}-\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu,$$

и

$$\mathcal{Q}U_N(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=\sum_{\nu=n+1}^{m}\mathcal{Q}_\nu U_N(t).$$

Таким образом, в силу условия (2.2.9) и уравнений $B\varphi_i^{(j+1)}=A\varphi_i^{(j)}$, $j=1,\ldots,p_i-1$, $i=1,\ldots,n$ для A-присоединенных элементов, получим

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=$$
$$=f(t)-\sum_{\nu=n+1}^{m}\left\langle h_0(t)+\int_0^t U_N(t-s)h_0(s)ds,\,\psi_\nu\right\rangle z_\nu-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle h_k^{(kN)}(t),\,\psi_i^{(j)}\right\rangle\left(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right)=f(t),$$

В заключении отметим, что существование и единственность этого решения является прямым следствием теоремы 2.2.2. □

Пример 2.2.1. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = x_2(t) + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)x_2(s)ds + f_1(t), \\ 0 = x_1(t) + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)x_1(s)ds + f_2(t), \\ 0 = x_1(t) + x_2(t) + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)(x_1(s)+x_2(s))ds + f_3(t); \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_1 = \mathbb{R}^2$, $E_2 = \mathbb{R}^3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = \operatorname{sh} t$.

Заметим, что $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, $\dim N(B) = 1$, $\dim N(B^*) = 2$. Базисными элементами в $N(B)$ и $N(B^*)$ выберем

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

соответственно, а в качестве векторов биортогональных систем

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно определению из п. 1.2, псевдообратный для B имеет вид

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор φ_1 не имеет A-присоединенных элементов, причем $z_1 = A\varphi_1$ и $\gamma_1 = A^*\psi_1$. Нетрудно заметить, что

$$\mathbb{I}_2 - (\cdot,\, \psi_1)z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; (\cdot,\, \psi_1)\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор-функция $AB^+\left(t + \int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\right)$ имеет вид

$$AB^+\big(t + \int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\big) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sh}t & \mathrm{sh}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & -\mathrm{sh}t & -\mathrm{sh}t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ее резольвентой является матрица-функция

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t & \sin t \\ \sin t & -\sin t & -\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а резольвентой ядра $(-g(t))$ — функция $r(t) = -t$. Таким образом, обобщенная матрица-функция

$$\mathcal{E}_2(t) = \begin{pmatrix} (-t + 2\sin t)\theta(t) & (t - 2\sin t)\theta(t) & (t - 2\sin t)\theta(t) \\ (t - 2\sin t)\theta(t) & (-t + 2\sin t)\theta(t) & 2\sin t\theta(t) - \delta(t) \end{pmatrix}$$

будет фундаментальной для интегро-дифференциального оператора

$$B\delta''(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta''(t) & -\delta(t) - \mathrm{sh}t\theta(t) \\ -\delta(t) - \mathrm{sh}t\theta(t) & 0 \\ -\delta(t) - \mathrm{sh}t\theta(t) & -\delta(t) - \mathrm{sh}t\theta(t) \end{pmatrix}$$

на подклассе распределений из $K'_+(\mathbb{R}^3)$ [1] следующего вида:

$$\left\{(u_1(t),\, u_2(t),\, u_3(t)) \in K'_+(\mathbb{R}^3) :\; u_2 + \sin t\theta(t) * (u_1 - u_2 - u_3) = 0\right\}.$$

[1]Здесь речь идет о таком классе: $K'_+(\mathbb{R}^3) = \{(u_1(t),\, u_2(t),\, u_3(t)) :\; u_i(t) \in \mathscr{D}_+,\; i = 1, 2, 3\}$.

Если, в частности, этому множеству принадлежит функция

$$\tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \tilde{g}_2(t) \\ \tilde{g}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t) + \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta'(t),$$

а именно это будет, когда $\forall\, t \in [0, +\infty)$ справедливо соотношение

$$f_2(t) + x_{11} \sin t + x_{10} \cos t + \int\limits_0^t \sin(t-s)(f_1(s) - f_2(s) - f_3(s))ds = 0,$$

то исходная начальная задача имеет обобщенное решение вида

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_2(t) * \tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \theta(t) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_{10} \\ -x_{10} \end{pmatrix} \sigma'(t) + \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{11} \end{pmatrix} \sigma(t) + \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \sigma(t-s)(-f_1(s) + f_2(s) + f_3(s))ds \\ \int\limits_0^t \sigma(t-s)(f_1(s) - f_2(s))ds - 2\int\limits_0^t \sin(t-s) f_3(s)ds + f_3(t) \end{pmatrix} \right] \theta(t),$$

где $\sigma(t) = 2\sin t - t$. И оно станет классическим, если $f_3(t) \in C^2(t \geq 0)$ и будут выполнены условия $f_3(0) = -x_{10} - x_{20},\ \dot{f}_3(0) = -x_{11} - x_{21}$.

Теорема 2.2.4. *Пусть $B,\ A$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1,\ D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B нетеров, $n > m$ и имеет полный A-жорданов набор, тогда обобщенная оператор-функция вида* (2.2.7) *с $\psi_i^{(1)} = 0,\ i = m+1, \ldots, n$ и произвольными функционалами $\psi_i^{(j)}$, $i = m+1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$ удовлетворяет условию*

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Доказательство. Осуществляя преобразования, аналогичные проделанным в доказательстве теоремы 2.2.1, получим

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) =$$

$$(\mathbb{I}_2-\mathcal{Q})(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)+\tilde{Q}\delta(t)-\mathcal{Q}U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=$$
$$=\mathbb{I}_2\delta(t)-\mathcal{Q}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})\delta(t)-\mathcal{Q}U_N(t)\theta(t)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q}).$$

Далее из леммы 2.2.1, равенств (2.2.1), (1.2.3) и (1.2.4) следует

$$\mathcal{Q}(AB^+)^{k-1}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})=$$
$$=\sum_{q=1}^{m}\mathcal{Q}_q(AB^+)^{k-1}\left(\mathbb{I}_2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=$$
$$=\sum_{q=1}^{m}\mathcal{Q}_q(AB^+)^{k-1}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)=\mathbb{O}_2,\ k\in\mathbb{N}.$$

Тогда, с учетом (2.2.8), получим равенство

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\mathbb{I}_2\delta(t),$$

которое и доказывает теорему. □

Замечание 2.2.5. Аналогичным образом, можно показать равенство

$$\Upsilon(t)=\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=$$
$$=\left(\mathbb{I}_1-\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left\langle\cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)}-A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right)\delta(t)-$$
$$-\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)}-A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(kN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^k-$$
$$-\sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)B^+(AB^+)^{k-1}\times$$
$$\times\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1}\left\langle\cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)}-A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

Тем самым, второе условие из определения фундаментальной оператор-функции в предположениях теоремы 2.2.4 не выполняется. В этом случае мы можем утверждать только существование обобщенного решения $\tilde{u}(t)=\mathcal{E}_N(t)*\tilde{g}(t)$ задачи Коши (2.0.1), (2.0.2). В развернутом виде при $g(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0),\ f(t)\in C^{(p-1)N}(t\geq 0;\ E_2)$ (здесь $p=\max\{q_1;q_2\}$,

$q_1 = \max\limits_{i=1,\dots,m} p_i$, $q_2 = \max\limits_{i=m+1,\dots,n} \{p_i - 1\}$), оно представляется формулой

$$\tilde{u}(t) = \Upsilon(t) * p(t)\theta(t) + \left[\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} \Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) h_0(s) ds + \right.$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} \Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) h_0(s) d\tau ds -$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \right] \theta(t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=2}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \sum_{q=1}^{(k-1)N} \left\langle h_k^{((k-1)N-q)}(0),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \delta^{(q-1)}(t), \quad (2.2.12)$$

в которой $\psi_i^{(1)} = 0,\ i = m+1, \dots, n$, и будут содержаться произвольные функционалы $\psi_i^{(j)},\ j = 2, \dots, p_i,\ i = m+1, \dots, n$. Таким образом, обобщенное решение не обладает свойством единственности.

Замечание 2.2.6. Если же в условиях теоремы 2.2.4 выбрать входные данные задачи такими, что $g(t) \in C^{pN}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{pN}(t \geq 0;\ E_2)$, $p = \max\{q_1; q_2\}$, $q_1 = \max\limits_{i=1,\dots,m} p_i$, $q_2 = \max\limits_{i=m+1,\dots,n} \{p_i - 1\}$. и

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0,$$

$$q = 1, \dots, kN,\ k = 1, \dots, p_i,\ j = 1, \dots, p_i - k + 1,\ i = 1, \dots, m,$$

а также положить функционалы $\psi_i^{(j)},\ j = 2, \dots, p_i,\ i = m+1, \dots, n$ такими, чтобы выполнялись условия

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0,\, \left\langle u_{l-1},\, B^* \psi_i^{(k+1)} - A^* \psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,$$

$$q = 1, \dots, kN,\ k = 1, \dots, p_i - 1,\ j = 2, \dots, p_i - k + 1,\ i = m+1, \dots, n,$$
$$l = 1, \dots, N,$$

то существует классическое решение, которое имеет вид, как в теореме 2.2.3 (см. формулу (2.2.11)). Об единственности этого решения также утверждать не приходится.

Рассуждения последних двух замечаний сформулируем в виде следующих утверждений

Теорема 2.2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.4, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

то оно имеет вид (2.2.12).

Теорема 2.2.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.4 и*

$$g(t) \in C^{pN}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{pN}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0,$$

$$q = 1, \ldots, kN,\ k = 1, \ldots, p_i,\ j = 1, \ldots, p_i - k + 1,\ i = 1, \ldots, m,$$

а функционалы $\psi_i^{(j)},\ j = 2, \ldots, p_i,\ i = m+1, \ldots, n$ *таковы, что*

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0,\ \left\langle u_{l-1},\, B^*\psi_i^{(k+1)} - A^*\psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,$$

$$q = 1, \ldots, kN,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,\ j = 2, \ldots, p_i - k + 1,\ i = m+1, \ldots, n,$$

$$l = 1, \ldots, N,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет классическое решение* (2.2.11).

Замечание 2.2.7. Если в этом параграфе положить всюду $m = n$, то утверждения, полученные здесь для случаев отрицательного и положительного индексов нетерова оператора B, станут соответствующими утверждениями из предыдущего пункта. Это согласуется с тем фактом, что фредгольмов оператор является нетеровым оператором индекса 0.

Замечание 2.2.8. Представленные здесь результаты согласуются со случаем $g(t) \equiv 0$, исследованным ранее в [88, 127]

Пример 2.2.2. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t) + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)(x_2(s) + x_3(s))ds + f_1(t), \\ 0 = x_1(t) + x_3(t) + \int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-s)(x_1(s) + x_3(s))ds + f_2(t); \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_1 = \mathbb{R}^3$, $E_2 = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = \operatorname{sh} t$. Очевидно, что $\dim N(B) = 2$, $\dim N(B^*) = 1$. Базисными элементами в $N(B)$ и $N(B^*)$ выберем

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответственно, а в качестве векторов биортогональных систем

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно определению из п. 1.2, псевдообратный для B имеет вид

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У вектора φ_1 нет A-присоединенных элементов, т. е. $p_1 = 1$, и $z_1 = A\varphi_1$. Длина A-жордановой цепочки элемента φ_2 равна 2, причем

$$\varphi_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\psi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \psi_2^{(2)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Далее

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t & 2\sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а резольвентой ядра $(-g(t))$ является функция $r(t) = -t$. Фундаментальная оператор-функция имеет вид

$$\mathcal{E}_2(t) = \begin{pmatrix} (1-C_1)\sigma(t)\theta(t) & -(1+C_2)\sigma(t)\theta(t) \\ (C_1-1)\sigma(t)\theta(t) - C_1\gamma(t) & (1+C_2)\sigma(t)\theta(t) - C_2\gamma(t) \\ (C_1-1)\sigma(t)\theta(t) & (1+C_2)\sigma(t)\theta(t) - \gamma(t) \end{pmatrix},$$

где $\sigma(t) = 2\sin t - t$, $\gamma(t) = \delta(t) - t\theta(t)$. Отсюда легко восстанавливаются все компоненты обобщенного решения

$$\tilde{x}_1(t) = \Big[(1-C_1)\sigma'(t)x_{10} + (1-C_1)\sigma(t)x_{11} +$$
$$+ (1-C_1)\int\limits_0^t \sigma(t-s)f_1(s)ds - (1+C_2)\int\limits_0^t \sigma(t-s)f_2(s)ds\Big]\theta(t);$$

$$\tilde{x}_2(t) = \Big[(2(C_1-1)\cos t + 1)x_{10} + (2(C_1-1)\sin t + t)x_{11} -$$
$$- C_1f_1(t) - C_2f_2(t) + 2(C_1-1)\int\limits_0^t \sin(t-s)f_1(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f_1(s)ds +$$
$$+ 2(1+C_2)\int\limits_0^t \sin(t-s)f_2(s)ds - \int\limits_0^t (t-s)f_2(s)ds\Big]\theta(t) -$$

$$- C_1 x_{11}\delta(t) - C_1 x_{10}\delta'(t);$$

$$\tilde{x}_3(t) = \Bigg[(C_1-1)\sigma'(t)x_{10} + (C_1-1)\sigma(t)x_{11} + \\ + (C_1-1)\int\limits_0^t \sigma(t-s)f_1(s)ds + 2(1+C_2)\int\limits_0^t \sin(t-s)f_2(s)ds + \\ + C_2\int\limits_0^t (t-s)f_2(s)ds - f_2(t)\Bigg]\theta(t);$$

Это решение окажется классическим, если $f_1(t)$, $f_2(t) \in C^2(t \geq 0)$ и будут выполнены условия $f_2(0) = -x_{10} - x_{30}$, $\dot{f}_2(0) = -x_{11} - x_{31}$, а произвольные постоянные подобраны следующим образом:

$$C_1 = 0,\ C_2 f_2(0) = -x_{10} - x_{20},\ C_2\dot{f}_2(0) = -x_{11} - x_{21}.$$

2.3 Случай спектральной ограниченности операторного пучка

Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$. Здесь и далее $\mathcal{C}l(E_1, E_2)$ будем обозначать множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в банаховом пространстве E_1 и действующих в банахово пространство E_2. В удобных для нас обозначениях приведем некоторые определения, введенные в [61, 143].

Определение 2.3.1. *Резольвентным множеством* оператора A относительно оператора B (или B-резольвентным множеством оператора A) называется множество

$$\rho^B(A) = \left\{\mu \in \mathbb{C}:\ (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\right\},$$

а оператор-функция $(\mu B - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A относительно оператора B (или B-*резольвентой* оператора A).

Определение 2.3.2. Оператор-функции $R^B_\mu(A) = (\mu B - A)^{-1}B$ и $L^B_\mu(A) = B(\mu B - A)^{-1}$ называются соответственно *правой резольвен-*

той и *левой резольвентой* оператора A относительно оператора B (или *правой* B*-резольвентой* и *левой* B*-резольвентой* оператора A).

Определение 2.3.3. Оператор A называется *спектрально ограниченным* относительно оператора B (или (B,σ)-ограниченным), если $\exists\ a > 0$ такое, что $\{\mu \in \mathbb{C}:\ |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$.

Замечание 2.3.1. Пусть $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C}:\ |\mu| = r > a\}$, тогда, как показано в [61, 143], пара операторов

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} R_\mu^B(A)d\mu,\ Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} L_\mu^B(A)d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P),\ E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q).$$

Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0:\ E_1^0 \to E_2^0,\ B_1:\ E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1:\ E_1^1 \to E_2^1$ ограничен,

$$QB = BP,\ QA = AP.$$

Замечание 2.3.2. Если $\exists\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq \mathbb{O}_1$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} = \mathbb{O}_1$, то бесконечно удаленная точка является *несущественно особой* точкой (либо *устранимой особой* точкой при $p = 0$, либо *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$) B-резольвенты оператора A. В этом случае, согласно [61, 143], (B,σ)-ограниченный оператор A называется (B,p)-*ограниченным.*

Теорема 2.3.1. *Пусть* $B,\ A$ *— линейные операторы,* $B \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1,E_2)$, *ядро* $g(t): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция, оператор* B *необратим и* A *спектрально ограничен относительно* B*, тогда интегро-дифференциальный оператор* $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$

$$-\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

здесь и далее $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$, степени обобщенных функций понимаются в смысле операции свертки (см. теорему 2.1.1).

Доказательство. Согласно определению 1.4.1, требуется проверить два равенства:

$$(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\mathbb{I}_2\delta(t),$$

$$\mathcal{E}_N(t)*(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))=\mathbb{I}_1\delta(t),$$

где $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t))*\mathcal{E}_N(t)=\\
&\qquad=\big(B\delta^{(N)}(t)-A(\delta(t)+g(t)\theta(t))\big)*\mathcal{E}_N(t)=\\
&=BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^kQ(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+BB_1^{-1}Q\delta(t)-\\
&\quad-B\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-\\
&\quad-AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+\\
&\quad+A\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^q=\\
&\quad=\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1)^kQ(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+Q\delta(t)-\\
&\quad-B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-\\
&\quad-\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1)^kQ(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+\\
&\quad+B_0\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}+
\end{aligned}$$

$$+ AA_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) = Q\delta(t) + (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) = \mathbb{I}_2\delta(t).$$

Учитывая $QB = BP$ и $QA = AP$, второе равенство также докажем непосредственными вычислениями, а именно

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = \\
&\qquad = \mathcal{E}_N(t) * \big(B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t))\big) = \\
&= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k BP(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + B_1^{-1}BP\delta(t) - \\
&\quad - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}B(\mathbb{I}_1 - P)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1} - \\
&\quad - B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}AP(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + \\
&\quad \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1 - P)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1} = \\
&= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + P\delta(t) - \\
&\quad - \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\mathbb{I}_1 - P)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1} - \\
&\quad - B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + \\
&\quad + \sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1 - P)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1} + \\
&\qquad + A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1 - P)\delta(t) = P\delta(t) + (\mathbb{I}_1 - P)\delta(t) = \mathbb{I}_1\delta(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 2.3.3. Если в теореме 2.3.1 дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка точка B-резольвенты оператора A, то

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$

$$
-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},
$$

где $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ из замечания 2.3.2.

Замечание 2.3.4. Эквивалентным видом фундаментальной оператор-функции является следующий:

$$
\mathcal{E}_N(t)=B_1^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}*(\mathbb{I}_2\delta(t)+P_N(t)\theta(t))Q-
$$
$$
-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}, \quad (2.3.1)
$$

где $P_N(t)$ — резольвента ядра $A_1B_1^{-1}\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$, которая является операторно-функциональным рядом, равномерно сходящимся по норме пространства $\mathcal{L}(E_2)$ на любом компакте $[0,\,T]$, причем имеет место оценка

$$
\|M_N(t)\|_{\mathcal{L}(E_2)}\le C\exp CT,
$$

здесь $C=\left\|A_1B_1^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E_2)}\cdot\max\limits_{t\in[0,\,T]}\left|\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right|$, а также стандартное резольвентное равенство

$$
P_N(t)=\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}A_1B_1^{-1}+\int\limits_0^t\frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)d\tau_1A_1B_1^{-1}+
$$
$$
+\int\limits_0^t\frac{(t-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}A_1B_1^{-1}P_N(\tau_1)d\tau_1+
$$
$$
+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau_1}\frac{(t-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)A_1B_1^{-1}P_N(\tau_1)d\tau_2d\tau_1 \quad (2.3.2)
$$

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и ∞ является несущественно особой точкой B-резольвенты оператора A, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$
g(t)\in C^{pN}(t\ge 0),\;\; f(t)\in C^{pN}(t\ge 0;\;E_2),
$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds -$$
$$- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t)\Bigg] \theta(t) -$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^{q+1} \omega_{j-1[q+1]} \delta^{(qN+N-j)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j = 1, \ldots, N, \ q = 0, \ldots, p.$$

Доказательство. В условиях теоремы 2.3.1 и (B,p)-ограниченности оператора A фундаментальная оператор-функция имеет вид (2.3.1), тогда, в силу замечания 1.4.1, единственным обобщенным решением задачи Коши (2.0.1), (2.0.2) является распределение

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t).$$

Используя обобзначения, восстановим явный вид этого решения

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \tilde{g}(t) = p(t)\theta(t) + \mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t).$$

Теперь подсчитаем свертку $\mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t)$. Справедлива цепочка равенств

$$\mathcal{E}_N(t) * h_0(t)\theta(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} * B_1^{-1}(\mathbb{I}_2\delta(t) + P_N(t)\theta(t))Q * h_0(t)\theta(t) -$$
$$- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) \delta^{(qN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1} * h_0(t)\theta(t) =$$
$$= \Bigg[\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}P_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds\Bigg]\theta(t)-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*h_{q+1}(t)\theta(t).$$

Рассмотрим теперь последнюю группу слагаемых. Поскольку выполняются условия гладкости

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\ \ f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2),$$

имеет место равенство

$$\delta^{(qN)}(t)*h_{q+1}(t)\theta(t)=$$

$$=\begin{cases}h_1(t)\theta(t), & q=0,\\ h_{q+1}^{(qN)}(t)\theta(t)+\sum\limits_{k=1}^{qN}h_{q+1}^{(qN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t), & q=1,\ldots,p;\end{cases}$$

а, значит,

$$\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*h_{q+1}(t)\theta(t)=$$

$$=\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{q+1}^{(qN)}(t)\theta(t)+$$

$$+\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\sum_{k=1}^{qN}h_{q+1}^{(qN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t).$$

Осуществим преобразование сингулярной составляющей

$$\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\sum_{k=1}^{qN}h_{q+1}^{(qN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t)=$$

$$=(A_0^{-1}B_0)A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\sum_{k=1}^{N}h_2^{(N-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t)+$$

$$+(A_0^{-1}B_0)^2A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\sum_{k=1}^{2N}h_3^{(2N-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t)+$$

$$(A_0^{-1}B_0)^3A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\sum_{k=1}^{3N}h_4^{(3N-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t)+\ldots+$$

$$
\begin{aligned}
&(A_0^{-1}B_0)^p A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\sum_{k=1}^{pN} h_{p+1}^{(pN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t) = \\
&= (A_0^{-1}B_0)\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p-1}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+2}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p-2}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+3}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(2N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^3\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p-3}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+4}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(3N-j)}(t) + \ldots + \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^{p-1}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{1}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+p}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{((p-1)N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^p\sum_{j=1}^{N} A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{p+1}^{(j-1)}(0)\delta^{(pN-j)}(t).
\end{aligned}
$$

Учитывая тот факт, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq \mathbb{O}_1$, а $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} = \mathbb{O}_1$, получим последним равенством следующее

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\sum_{k=1}^{qN} h_{q+1}^{(qN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t) = \\
&= (A_0^{-1}B_0)\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+2}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+3}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(2N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^3\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+4}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(3N-j)}(t) + \ldots + \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^{p-1}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+p}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{((p-1)N-j)}(t)+ \\
&+ (A_0^{-1}B_0)^p\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+p+1}^{(kN+j-1)}(0)\delta^{(pN-j)}(t).
\end{aligned}
$$

Теперь, с учетом обозначения

$$
\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),
$$

$$j = 1, \dots, N,\ q = 0, \dots, p,$$

получим

$$\sum_{q=1}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q) \sum_{k=1}^{qN} h_{q+1}^{(qN-k)}(0)\delta^{(k-1)}(t) =$$

$$= (A_0^{-1}B_0)\omega_{j-1[1]}\delta^{(N-j)}(t) + (A_0^{-1}B_0)^2\omega_{j-1[2]}\delta^{(2N-j)}(t) +$$

$$+ (A_0^{-1}B_0)^3\omega_{j-1[3]}\delta^{(3N-j)}(t) + \ldots + (A_0^{-1}B_0)^{p-1}\omega_{j-1[p-1]}\delta^{((p-1)N-j)}(t) +$$

$$+ (A_0^{-1}B_0)^p\omega_{j-1[p]}\delta^{(pN-j)}(t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega_{j-1[q+1]}\delta^{(qN+N-j)}(t).$$

Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 2.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1, ∞ является несущественно особой точкой B-резольвенты оператора A и*

$$g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\omega_{j-1[q]} = 0,\ j = 1, \dots, N,\ q = 0, \dots, p,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$\tilde{u}(t) = p(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds -$$

$$- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$

$$j = 1, \dots, N,\ q = 0, \dots, p.$$

Доказательство. Пусть $g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0)$, $f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2)$, тогда $u(t) \in C^N(t \geq 0;\ E_1)$. Покажем, что функция $u(t)$ обращает в тождество уравнение (2.0.1). Действительно,

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t g(t-s)u(s)ds =$$

$$Bp^{(N)}(t) + BB_1^{-1}Qh_0(t) + \int\limits_0^t BB_1^{-1}P_N(t-s)Qh_0(s)ds -$$

$$- B\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN+N)}(t) -$$

$$- Ap(t) - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}AB_1^{-1}Qh_0(s)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}AB_1^{-1}P_N(\tau_1)Qh_0(s)d\tau_1 ds +$$

$$A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN)}(t) -$$

$$- \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds - \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau_1)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)AB_1^{-1}Qh_0(s)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \int\limits_0^{t-s-\tau_1} \frac{(t-s-\tau_1-\tau_2)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)AB_1^{-1}P_N(\tau_1)Qh_0(s)d\tau_2 d\tau_1 ds +$$

$$+ A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\int\limits_0^t g(t-s)h_{q+1}^{(qN)}(s)ds =$$

$$= Bp^{(N)}(t) + Qh_0(t) + \int\limits_0^t \Bigg[P_N(t-s) - \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}A_1B_1^{-1} -$$

$$- \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-\tau_1-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_1)A_1B_1^{-1}d\tau_1 -$$

$$\int\limits_0^{t-s} \frac{(t-\tau_1-s)^{N-1}}{(N-1)!}A_1B_1^{-1}P_N(\tau_1)d\tau_1 -$$

$$-\int\limits_0^{t-s}\int\limits_0^{t-\tau_1-s}\frac{(t-\tau_1-\tau_2-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(\tau_2)A_1B_1^{-1}P_N(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1\Bigg]Qh_0(s)ds-$$

$$-Ap(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds-$$

$$-AA_0^{-1}B_0\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{q+1}^{(qN+N)}(t)+$$

$$+A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\left[h_{q+1}^{(qN)}(t)+\int\limits_0^t g(t-s)h_{q+1}^{(qN)}(s)ds\right].$$

Принимая во внимание $p^{(N)}(t)\equiv 0$ и резольвентное соотношение (2.3.2), получим

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)u(s)ds=$$

$$=Qh_0(t)-Ap(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds-$$

$$-A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{q+1}^{(qN+N)}(t)+$$

$$+AA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\left[h_1(t)+\int\limits_0^t g(t-s)h_1(s)ds\right]+$$

$$+A\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\left[h_{q+1}^{(qN)}(t)+\int\limits_0^t g(t-s)h_{q+1}^{(qN)}(s)ds\right].$$

Теперь, используя равенства (2.1.7) и (2.1.8), а также $(A_0^{-1}B_0)^{p+1}=\mathbb{O}_1$, имеем

$$Bu^{(N)}(t)-Au(t)-\int\limits_0^t g(t-s)u(s)ds=$$

$$=Qh_0(t)+(\mathbb{I}_2-Q)h_0(t)-Ap(t)-\int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds-$$

$$- A\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_q^{(qN)}(t)+$$

$$+ A\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\left[h_q^{(qN)}(t) + \sum_{k=1}^{qN} h_{q+1}^{(k-1)}(0)g^{(qN-k)}(t)\right].$$

Далее, очевидно,

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int_0^t g(t-s)u(s)ds =$$

$$= f(t) - A\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\sum_{k=1}^{qN} h_{q+1}^{(k-1)}(0)g^{(qN-k)}(t).$$

А для последних слагаемых имеет место представление

$$\sum_{q=1}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\sum_{k=1}^{qN} h_{q+1}^{(k-1)}(0)g^{(qN-k)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega_{j-1[q+1]}g^{(qN+N-j)}(t),$$

которое уже было показано в теореме 2.3.2, где вместо $g(t)$ фигурировала $\delta(t)$. Таким образом, если $\omega_{j-1[q]} = 0$ при всех $j = 1, \dots, N,\ q = 1, \dots, p$, то, очевидно, функция $u(t)$ является решением уравнения (2.0.1).

Далее прямым подсчетом найдем производные функции $u(t)$ до $N-1$ порядка включительно в точке $t = 0$. Имеем следующие равенства:

$$u(0) = u_0 - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN)}(0),$$

$$u'(0) = u_1 - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN+1)}(0),$$

$$\dots,$$

$$u^{(N-1)}(0) = u_{N-1} - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN+N-1)}(0),$$

или

$$u^{(j-1)}(0) = u_{j-1} - \omega_{j-1[0]},\ j = 1, \dots, N.$$

Если $\omega_{j-1[0]} = 0, \quad j = 1, \dots, N$, то функция $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.0.2). $\square$

Пример 2.3.1. Рассмотрим пример 2.1.1 с точки зрения теории полугрупп операторов с ядрами. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)(x_1(s) + x_2(s))ds + f_1(t), \\ 0 = x_2(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)x_2(s)ds + f_2(t); \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = -\sin t$. Очевидно, что $\rho^B(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu \neq 1\}$, значит, оператор A спектрально ограничен относительно B (в качестве константы a в определении 2.3.3 можно выбрать любое действительное число, превосходящее единицу), причем $(\mu B - A)^{-1} = \frac{1}{1-\mu}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix}$. Проекторы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

таковы, что $N(P) = \operatorname{span}\{e_2\}$, $R(P) = \operatorname{span}\{e_1\}$, $N(Q) = \operatorname{span}\{e_1 + e_2\}$, $R(Q) = \operatorname{span}\{e_2\}$, где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A_0^{-1}B_0 = \mathbb{O}$, то $p = 0$, т. е. оператор A является $(B, 0)$-ограниченным (см. замечание 2.3.2).

Оператор-функция $A_1 B_1^{-1}\left(t+\int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\right)$ имеет вид

$$A_1 B_1^{-1}(t+\int\limits_0^t (t-s)g(s)ds) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix},$$

ее резольвентой является матрица-функция

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

а резольвентой $(-g(t))$ — функция $r(t) = t$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_2(t) = \begin{pmatrix} (t+\frac{t^3}{3!})\theta(t) & -(t+\frac{t^3}{3!})\theta(t) \\ 0 & -\delta(t) - t\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \tilde{g}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}\theta(t) + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\delta(t) + \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\delta'(t),$$

обобщенное решение имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_2(t) * \tilde{g}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\theta(t) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \left((t-s) + \frac{(t-s)^3}{3!}\right)(f_1(s) - f_2(s))ds \\ -f_2(t) - \int\limits_0^t (t-s) f_2(s)ds \end{pmatrix}\right]\theta(t).$$

Если $f_2(t) \in C^2(t \geq 0)$ и будут выполнены условия

$$f_2(0) = -x_{20},\ \dot{f}_2(0) = -x_{21},$$

то решение совпадет с классическим.

2.4 Случай секториальной ограниченности операторного пучка

Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$.

Определение 2.4.1. Пусть $\mu_0,\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in \rho^B(A)$, тогда оператор-функции $R^B_{(\mu,p)}(A) = \prod\limits_{q=0}^{p} R^B_{\mu_q}(A)$ и $L^B_{(\mu,p)}(A) = \prod\limits_{q=0}^{p} L^B_{\mu_q}(A)$ называются соответственно *правой* (B,p)*-резольвентой* и *левой* (B,p)*-резольвентой* оператора A. Здесь использованы обозначения $\rho^B(A)$ и $R^B_{\mu_q}(A)$, $L^B_{\mu_q}(A)$ из определений 2.3.1 и 2.3.2 предыдущего пункта.

Определение 2.4.2. Оператор A называется *секториальным* с числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ относительно оператора B (короче, (B,p)*-секториальным*), если

а) существуют постоянные $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ такие, что сектор

$$S^B_{a,\Theta}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\arg(\mu - a)| < \Theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho^B(A);$$

б) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in S^B_{a,\Theta}(A)$ выполняется

$$\max\left\{\left\|R^B_{(\mu,p)}(A)\right\|_{\mathcal{L}(E_1)},\ \left\|L^B_{(\mu,p)}(A)\right\|_{\mathcal{L}(E_2)}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}.$$

Замечание 2.4.1. Без ограничения общности в предыдущем определении можно положить $a = 0$, тогда сектор $S^B_{0,\Theta}(A)$ следует обозначать $S^B_{\Theta}(A)$.

Определение 2.4.3. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-секториальным справа*, если он (B,p)-секториален и $\forall\ \lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in S^B_{\Theta}(A)$ выполняется оценка

$$\left\|R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1}Av\right\|_{E_1} \leq \frac{\mathrm{const}(v)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|},\ \forall\ v \in D(A).$$

Определение 2.4.4. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-секториальным слева*, если он (B,p)-секториален и существует всюду плотный в E_2

линеал $\mathcal{A}$ такой, что $\forall\ \lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in S^B_\Theta(A)$ выполняется оценка

$$\left\| A(\lambda B - A)^{-1} L^B_{(\mu,p)}(A) w \right\|_{E_2} \leq \frac{\mathrm{const}(w)}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|},\ \forall\ w \in \mathcal{A}.$$

Определение 2.4.5. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-секториальным*, если он сильно (B,p)-секториален слева и

$$\left\| (\lambda B - A)^{-1} L^B_{(\mu,p)}(A) \right\|_{\mathcal{L}(E_2,E_1)} \leq \frac{\mathrm{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|},$$

при любых $\lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in S^B_\Theta(A)$.

Замечание 2.4.2. Сильно (B,p)-секториальный оператор A является также сильно (B,p)-секториальным справа.

Замечание 2.4.3. Пусть A является (B,p)-секториальным оператором, контур $\gamma \in S^B_\Theta(A)$ такой, что $|\arg \mu| \xrightarrow{|\mu| \to +\infty} \Theta$, тогда, как показано в [61, 143], оператор-функции

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^B_\mu(A) e^{\mu t} d\mu,\ \mathcal{F}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^B_\mu(A) e^{\mu t} d\mu,$$

являются аналитическими и равномерно ограниченными разрешающими полугруппами операторов. Причем, если A сильно (B,p)-секториален справа (слева), то существует единица полугруппы $\mathcal{U}(t)$ $(\mathcal{F}(t))$, т. е. предельный оператор

$$P = \lim_{t \to +0} \mathcal{U}(t)\ (Q = \lim_{t \to +0} \mathcal{F}(t)),$$

где предельный переход понимается в смысле нормы пространства E_1 (E_2). Операторы P и Q являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P),\ E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q).$$

Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 :\ E_1^0 \to E_2^0$ имеет ограниченный обратный, $B_0 :\ E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 :\ E_1^1 \to E_2^1$ ограничены,

$A_0^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(E_1^0)$ и $B_0A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E_2^0)$ нильпотентны со степенью нильпотентности не выше числа p. Если оператор A сильно (B,p)-секториален, то $B_1 : \ E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратим,

$$QB = BP, \ QA = AP.$$

Справедлива теорема

Теорема 2.4.1. *Пусть B, A — линейные операторы, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B необратим и A сильно (B,p)-секториален, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$
$$- \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

здесь и далее $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$, степени обобщенных функций понимаются в смысле операции свертки (см. теорему 2.1.1).

Доказательство. Согласно определению 1.4.1, требуется проверить два равенства:

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \mathbb{I}_2\delta(t),$$
$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = \mathbb{I}_1\delta(t),$$

где $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно. Справедлива цепочка равенств

$$(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}_N(t) =$$
$$= \big(B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t)+g(t)\theta(t))\big) * \mathcal{E}_N(t) =$$
$$= BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + BB_1^{-1}Q\delta(t) -$$
$$- B\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1} -$$

$$- AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+ A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1)^k Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + Q\delta(t)-$$

$$- B_0\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1)^k Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+ B_0\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}+$$

$$+ AA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta(t) = Q\delta(t) + (\mathbb{I}_2-Q)\delta(t) = \mathbb{I}_2\delta(t).$$

Учитывая $QB = BP$ и $QA = AP$, второе равенство также докажем непосредственными вычислениями, а именно

$$\mathcal{E}_N(t) * (B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) =$$

$$= \mathcal{E}_N(t) * \big(B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t)+g(t)\theta(t))\big) =$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^k BP(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + B_1^{-1}BP\delta(t)-$$

$$- \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}B(\mathbb{I}_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}AP(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+ \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1-P)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1} =$$

$$= B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) + P\delta(t)-$$

$$- \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}(\mathbb{I}_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t) * (\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}-$$

$$- B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}A_1P(\delta(t)+g(t)\theta(t))^k * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1-P)\delta^{((q+1)N)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}+$$

$$+A_0^{-1}A(\mathbb{I}_1-P)\delta(t)=P\delta(t)+(\mathbb{I}_1-P)\delta(t)=\mathbb{I}_1\delta(t).$$

Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\;\; f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\;E_2),$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\Bigg[p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}Qh_0(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}P_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-$$
$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{q+1}^{(qN)}(t)\Bigg]\theta(t)-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega_{j-1[q+1]}\delta^{(qN+N-j)}(t),\quad (2.4.1)$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]}=\sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^kA_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j=1,\dots,N,\;\; q=0,\dots,p.$$

Доказательство этого утверждения полностью повторяет рассуждения теоремы 2.3.2. Поскольку нам известна фундаментальная оператор-функция, то единственным обобщенным решением задачи Коши (2.0.1), (2.0.2) является распределение

$$\tilde{u}(t)=\mathcal{E}_N(t)*\tilde{g}(t).$$

Так как вид $\mathcal{E}_N(t)$ в теоремах 2.3.1 и 2.4.1 совпадают с точностью до обозначений (разумеется, в эти обозначения мы вкладываем разный смысл, который отражен во вспомогательном материале каждого из пунктов), то дальнейшее доказательство — раскрытие соответствующей свертки имеет полную аналогию с доказательством теоремы 2.3.2 и производится с учетом обозначений для $p(t),\ h_k(t)$, введенных еще в замечании 2.1.4, и пояснений к ним.

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1 и*

$$g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0),\ \ f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\omega_{j-1[q]} = 0,\ j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds + \\
+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds - \\
- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t),
\end{aligned} \quad (2.4.2)$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^k A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p.$$

2.5 Случай радиальной ограниченности операторного пучка

Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$.

Определение 2.5.1. Оператор A называется *радиальным* с числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ относительно оператора B (короче, (B,p)-*радиальным*), если а) существует постоянная $a \in \mathbb{R}$ такая, что $\forall\ \mu > a\ \Rightarrow \mu \in \rho^B(A)$;

б) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in (a,\ +\infty)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\max\left\{\left\|\left(R^B_{(\mu,p)}(A)\right)^n\right\|_{\mathcal{L}(E_1)},\ \left\|\left(L^B_{(\mu,p)}(A)\right)^n\right\|_{\mathcal{L}(E_2)}\right\} \le \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p}(\mu_q - a)^n}.$$

Обозначения $R^B_{(\mu,p)}(A),\ L^B_{(\mu,p)}(A)$ введены в определении 2.4.1 предыдущего пункта.

Замечание 2.5.1. Не ограничивая общности, в определении 2.5.1 можно считать $a = 0$.

Определение 2.5.2. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-радиальным справа*, если он (B,p)-радиален и $\forall\ \lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in \mathbb{R}_+$ выполняется оценка

$$\left\|R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1}Av\right\|_{E_1} \le \frac{\mathrm{const}(v)}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q},\ \forall\ v \in D(A).$$

Определение 2.5.3. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-радиальным слева*, если он (B,p)-радиален и существует всюду плотный в E_2 линеал $\mathcal{A}$ такой, что $\forall\ \lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in \mathbb{R}_+$ выполняется оценка

$$\left\|A(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)w\right\|_{E_2} \le \frac{\mathrm{const}(w)}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q},\ \forall\ w \in \mathcal{A}.$$

Определение 2.5.4. Оператор A называется *сильно* (B,p)*-радиальным*, если он сильно (B,p)-радиален слева и

$$\left\|(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)\right\|_{\mathcal{L}(E_2,E_1)} \le \frac{\mathrm{const}}{\lambda\prod\limits_{q=0}^{p}\mu_q},$$

при любых $\lambda,\ \mu_0.\ \mu_1, \ldots,\ \mu_p \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 2.5.2. Сильно (B,p)-радиальный оператор A является также сильно (B,p)-радиальным справа.

Замечание 2.5.3. Пусть A является (B,p)-радиальным оператором, тогда оператор-функции

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (R_\mu^B(A))^{p+1} \right)^n = e^{\frac{\mu t}{p+1}\left((\mu R_\mu^B(A))^{p+1} - \mathbb{I}_1\right)},$$

$$\mathcal{F}(t) = e^{-\frac{\mu t}{p+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\mu^{p+2}}{p+1} (L_\mu^B(A))^{p+1} \right)^n = e^{\frac{\mu t}{p+1}\left((\mu L_\mu^B(A))^{p+1} - \mathbb{I}_2\right)},$$

являются равномерно ограниченными и сильно непрерывными разрешающими полугруппами операторов. Причем, если A сильно (B,p)-радиален справа (слева), то в сильной топологии существует предельный оператор

$$P = \lim_{\mu\to+\infty} (\mu R_\mu^B(A))^{p+1} \ (Q = \lim_{\mu\to+\infty} (\mu L_\mu^B(A))^{p+1}),$$

который является проектором в E_1 (E_2). Проекторы P и Q порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P), \ E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q).$$

Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : \ E_1^0 \to E_2^0$ имеет ограниченный обратный. Если к тому же оператор A сильно (B,p)-радиален, то существует $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_2^1, E_1^1)$ и $A_0^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(E_1^0)$ является нильпотентным оператором со степенью нильпотентности не выше числа p,

$$QB = BP, \ QA = AP.$$

Далее последовательно сформулируем утверждения о виде фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора, о существовании и единственности обобщенного и классического решений начальной задачи (2.0.1), (2.0.2). Поскольку доказательства этих теорем имееют ту же технику, что и в предыдущих двух пунктах, ограничимся здесь только формулировкой соответствующих утверждений.

Теорема 2.5.1. *Пусть B, A — линейные операторы, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B необратим и A сильно (B,p)-радиален, тогда интегро-дифференциаль-*

ный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$
$$- \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)\delta^{(qN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{q+1},$$

здесь и далее $r(t)$ — *резольвента ядра* $(-g(t))$, *степени обобщенных функций понимаются в смысле операции свертки (см. теорему 2.1.1).*

Теорема 2.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1, тогда задача Коши* (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{pN}(t \geq 0),\ \ f(t) \in C^{pN}(t \geq 0;\ E_2),$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[p(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}Qh_0(s)ds +$$
$$+ \int_0^t\int_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}P_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds -$$
$$- \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{q+1}^{(qN)}(t)\Bigg]\theta(t) -$$
$$- \sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega_{j-1[q+1]}\delta^{(qN+N-j)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2 - Q)h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p.$$

Теорема 2.5.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1 и*

$$g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0),\ \ f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\omega_{j-1[q]} = 0,\ j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p,$$

то задача Коши (2.0.1), (2.0.2) *имеет единственное классическое решение вида*

$$\tilde{u}(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds -$$
$$- \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t), \quad (2.5.1)$$

где используются обозначения замечаний 2.1.4 и 2.3.4,

$$\omega_{j-1[q]} = \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^k A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0),$$
$$j = 1, \ldots, N, \ q = 0, \ldots, p.$$

Глава 3

Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при старшей производной

В этой главе приведены результаты исследования задачи Коши

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}. \quad (1.4.1)$$

Напомним вид левой части уравнения

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - \ldots -$$
$$- A_1 u'(t) - A_0 u(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds.$$

Такую задачу в главе 1 мы уже изучали при условии непрерывной обратимости оператора B (см. п. 1.4), а теперь будет рассмотрен случай фредгольмова оператора. Как и везде выше, к исследованию однозначной разрешимости поставленной задачи применяется конструкция фундаментальной оператор-функции. Принципиальное отличие этого класса интегро-дифференциальных уравнений от изученного во второй главе состоит в наличии всех слагаемых группы младших производных, а также в том, что ядро интегральной части имеет более общий вид. Значит, здесь мы будем иметь дело с обобщенной жордановой структурой, а работа с ней обычно сопряжена с определенными техническими трудностями. В связи с этим к доказательству основной теоремы (о виде фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ был разработан подход, который существенно снижает громоздкость выкладок. Впервые он был применен в [77] к исследованию вырожденных дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков (при работе с обобщенными A_1, A_0- и A_2, A_1, A_0-жордановыми наборами, т. е. относительно оператор-функций $\mathcal{A}(t) = A_1 + A_0 t$ и $\mathcal{B}(t) = A_2 + A_1 t + A_0 \frac{t^2}{2}$), а затем в [74] адаптирован для интегральных и интегро-дифференциальных операторов высоких порядков. Суть этой методики состоит в последовательном доказательстве пяти вспомогательных операторно-функциональных соотношений, использование которых делает тривиальным доказательство основной теоремы.

В этой главе доказана теорема о явном виде фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, получены условия существования и единственности обобщенного и классического решений начальной задачи. Представленные результаты опубликованы в [48, 49, 51, 53, 55, 74, 75].

3.1 Фундаментальная оператор-функция вырожденного интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$

Теорема 3.1.1. *Пусть B, $A_{N-1}, \ldots, A_1$, A_0 — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(t \geq 0)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$\overline{D(B)} = \overline{\bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k)} = E_1, \; D(B) \subseteq \bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k),$$

$k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов и имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции

$$\mathcal{F}_N(t) = A_{N-1} + A_{N-2} t + \cdots + A_1 \frac{t^{N-2}}{(N-2)!} +$$

$$+ A_0\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}k(s)ds,$$

тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K_+^{'}(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t),$$

здесь Γ — оператор Треногина — Шмидта, $R_N(t)$ и $N_N(t)$ — резольвенты ядер $\mathcal{F}_N(t)\Gamma$ и $(-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t))$ соответственно, функция $G(t)$ задается следующим образом:

$$G(t) = ((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)),$$

$\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,p_i\right\}$ *— полный обобщенный $\mathcal{F}_N^*(t)$-жорданов набор оператора B^*.*

Доказательству теоремы 3.1.1 предпошлем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1.1. *Если выполнены условия теоремы 3.1.1, то*

1°. $Q_i R_N^{(k-1)}(0) = \begin{cases} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(k+1)}\right\rangle z_i, & k = 1,\ldots,p_i - 1, \\ Q_i, & k = p_i; \end{cases}$

2°. $(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t);$

3°. $(Q_i R_N^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) = Q_i\delta(t);$

4°. $Q R_N(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = -Q\delta(t);$

5°. $G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) =$
$= (\mathbb{I}_2\delta(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t)) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t).$

Доказательство. Последовательно докажем пять этих равенств.

1°. Справедливо соотношение

$$R_N^{(k-1)}(t) = \mathcal{F}_N^{(k-1)}(t)\Gamma + R_N(0)\mathcal{F}_N^{(k-2)}(t)\Gamma + R_N'(0)\mathcal{F}_N^{(k-3)}(t)\Gamma + \cdots +$$

$$+ R_N^{(k-2)}(0)\mathcal{F}_N(t)\Gamma + \int\limits_0^t R_N^{(k-1)}(t-s)\mathcal{F}_N(s)\Gamma ds, \quad (3.1.1)$$

которое получается из

$$R_N(t) = \mathcal{F}_N(t)\Gamma + \int\limits_0^t R_N(t-s)\mathcal{F}_N(s)\Gamma ds$$

простым дифференцированием по t. Тогда при $k = 1$ и $k = 2$, с учетом формулы (1.1.3) для $\mathcal{F}_N^*(t)$-присоединенных элементов (см. п. 1.1), получим

$$Q_i R_N(0) = Q_i \mathcal{F}_N(0)\Gamma = \left\langle \cdot,\ \Gamma^* \left(\mathcal{F}_N(0)\right)^* \psi_i^{(1)} \right\rangle z_i = \\ = \left\langle \cdot,\ \Gamma^* l_1^*(\psi_i) \right\rangle z_i = \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(2)} \right\rangle z_i$$

и

$$Q_i R_N'(0) = Q_i \big(\mathcal{F}_N'(0)\Gamma + R_N(0)\mathcal{F}_N(0)\Gamma\big) = \\ = \left\langle \cdot,\ \Gamma^* \big(\left(\mathcal{F}_N'(0)\right)^* \psi_i^{(1)} + \left(\mathcal{F}_N(0)\right)^* \psi_i^{(2)} \big) \right\rangle z_i = \\ = \left\langle \cdot,\ \Gamma^* l_2^*(\psi_i) \right\rangle z_i = \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(3)} \right\rangle z_i$$

соответственно. Далее с помощью (3.1.1) и (1.1.3) индукцией по k легко доказать, что

$$Q_i R_N^{(k-1)}(0) = \left\langle \cdot, \Gamma^* l_k^*(\psi_i) \right\rangle z_i.$$

Требуемое при $k = 1, \ldots, p_i - 1$ получается из (1.1.3), а при $k = p_i$ — из равенств $\gamma_i = l_{p_i}^*(\psi_i)$ (см. замечание 1.1.4) и (1.1.1).

2°. Так как $(\mathbb{I}_2 - Q)z_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то имеют место соотношения

$$(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * N_N(t)\theta(t) = \mathbb{O}_2,$$

$$(\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) * \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t) = \mathbb{O}_2,$$

где $\mathbb{O}_2$ — нулевой оператор в пространстве E_2, которые в совокупности со свойством идемпотентности проектора $\mathbb{I}_2 - Q$, доказывают 2°.

3°. Используя $Q_i Q_j = \delta_{ij} Q_i$, а также естественное соотношение

$$N_N(t)\theta(t) = -\sum_{k=1}^{n} Q_k R_N^{(p_k)}(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)),$$

для резольвенты $N_N(t)$, равенство 3° можно установить следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(Q_iR_N^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t)) * (I\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) = \\
= Q_i\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + \sum_{k=1}^{n} Q_kR_N^{(p_k)}(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) = \\
= Q_i\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t) - N_N(t)\theta(t)) = Q_i\delta(t).
\end{gathered}
$$

4°. Последовательно применяя доказанные ранее $1^\circ,\ 3^\circ$, а затем

$$\left\langle z_k,\ \psi_i^{(j+1)} \right\rangle = 0,\ j = 1, \ldots, p_i - 1$$

из замечания 1.1.5 и легко проверяемые проекторные соотношения

$$Q_i(\mathbb{I}_2 - Q) = \mathbb{O}_2,\ Q_iz_j = \delta_{ij}z_i,$$

покажем требуемое тождественными преобразованиями, а именно:

$$
\begin{gathered}
QR_N(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = \\
= \sum_{i=1}^{n} Q_iR_N(t)\theta(t) * \delta^{(p_i)}(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) * G(t) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \left(Q_iR_N^{(p_i)}(t)\theta(t) + Q_i\delta(t) + \sum_{j=2}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t) \right) * \\
* (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) * G(t) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i\delta(t) + \sum_{j=2}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t) \right) * \\
* \left((\mathbb{I}_2 - Q)\frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\theta(t) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k} \left\langle \cdot,\ \psi_k^{(j)} \right\rangle z_k\delta^{(p_k-p_i+1-j)}(t) \right) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\theta(t) - \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(1)} \right\rangle z_i\delta(t) - \right. \\
\left. - \sum_{j=2}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\theta(t) \right) = -Q\delta(t),
\end{gathered}
$$

5°. Справедлива цепочка равенств

$$G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = G(t) * (B\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\theta(t)) * \delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Bigg(B\delta(t) - (\mathbb{I}_2 - Q)\mathcal{F}_N(t)\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i-1-j)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i-1-j)}(t) * \mathcal{F}_N(t)\theta(t) \Bigg) * \delta^{(N)}(t),$$

в последнее из которых подставим выражение

$$\delta^{(p_i-1-j)}(t) * \mathcal{F}_N(t)\theta(t) = \mathcal{F}_N^{(p_i+1-j)}(t)\theta(t) + \mathcal{F}_N^{(p_i-j)}(0)\delta(t) +$$

$$+ \mathcal{F}_N^{(p_i-j-1)}(0)\delta'(t) + \ldots + \mathcal{F}'_N(0)\delta^{(p_i-j-1)}(t) + \mathcal{F}_N(0)\delta^{(p_i-j)}(t),$$

а затем приведем подобные слагаемые относительно производных $\delta(t)$. В результате этих преобразований, с учетом уравнений для определения $\mathcal{F}_N^*(t)$-присоединенных векторов (см. определение 1.1.1), получим

$$G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \Bigg(\tilde{B}\delta(t) - (\mathbb{I}_2 - Q)\mathcal{F}_N(t)\theta(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \mathcal{F}_N^{(p_i+1-j)}(t)\theta(t) \Bigg) * \delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Bigg(\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t) + Q\mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \mathcal{F}_N^{(p_i+1-j)}(t)\Gamma\theta(t) \Bigg) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t).$$

Далее с использованием 1° и

$$R_N(t) = \mathcal{F}_N(t)\Gamma + \int_0^t R_N(t-s)\mathcal{F}_N(s)\Gamma ds,$$

находим

$$Q\mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \mathcal{F}_N^{(p_i+1-j)}(t)\Gamma\theta(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i \Bigg(\mathcal{F}_N^{(p_i)}(t)\Gamma + R_N(0)\mathcal{F}_N^{(p_i-1)}(t)\Gamma + R'_N(0)\mathcal{F}_N^{(p_i-2)}(t)\Gamma + \ldots +$$

$$+ R_N^{(p_i-2)}(0)\mathcal{F}'_N(t)\Gamma + R_N^{(p_i-1)}(0)\mathcal{F}_N(t)\Gamma \Bigg)\theta(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i \Bigg(R_N^{(p_i)}(t) - \int_0^t R_N^{(p_i)}(t-s)\mathcal{F}_N(s)\Gamma ds \Bigg)\theta(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t)\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t)),$$

что и завершает доказательство равенства 5° и всей леммы. □

Доказательство теоремы 3.1.1. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции, требуется установить равенства

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \mathbb{I}_2\delta(t), \ \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \mathbb{I}_1\delta(t).$$

Раскрывая первую свертку, получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \\
&\quad = \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * \\
&\quad * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = \\
&\quad = ((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * \\
&\quad * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = \\
&\quad = \Big(\mathbb{I}_2\delta(t) - Q\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t))\Big) * \\
&\quad * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) = \\
&\quad = \Big((\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - QR_N(t)\theta(t)\Big) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t).
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу 2° и 4°,

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) + Q\delta(t) = \mathbb{I}_2\delta(t).$$

Для доказательства второго равенства воспользуемся соотношением 5° из леммы 3.1.1.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \\
&\quad = \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * \\
&\quad * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) * G(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \\
&\quad = \Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R_N(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + N_N(t)\theta(t)) *
\end{aligned}$$

$$* (\mathbb{I}_2\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t)\theta(t)) * (\mathbb{I}_2\delta(t) - \mathcal{F}_N(t)\Gamma\theta(t)) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \tilde{B}\delta^{(N)}(t) = \mathbb{I}_1\delta(t).$$

Таким образом, теорема 3.1.1 доказана. □

3.2 Обобщенное и классическое решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения в фредгольмовым оператором при старшей производной

Вернемся к исследованию поставленной задачи 1.4.1. Как уже было показано ранее (см. замечание 1.4.3), в пространстве распределений она допускает представление

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \tag{1.4.2}$$

здесь $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ задается формулой

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1u_0)\delta(t) +$$
$$+ (Bu_{N-2} - A_{N-1}u_{N-3} - \ldots - A_2u_0)\delta'(t) + \ldots +$$
$$+ (Bu_1 - A_{N-1}u_0)\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).$$

Поскольку вид фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ известен, справедлива

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1, тогда задача Коши* (1.4.1) *имеет единственное обобщенное решение вида*

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t).$$

Замечание 3.2.1. Принимая во внимание вил обобщенной оператор-функции $\mathcal{E}(t)$, полученный в теореме 3.1.1, и распределения $\tilde{g}(t)$, становится понятно, что в условиях этой теоремы обобщенное решение $\tilde{u}(t)$ представляет собой сумму регулярной и сингулярной составляющих. Последняя имеет точечный носитель и представляет собой линейную комбинацию δ-функции Дирака и ее производных до некоторого порядка (который, кстати, зависит от длин обобщенных жордановых цепочек). Применяя методику работы [67] [1], можно конкретизировать структуру обобщенного решения, не пребегая к прямому раскрытию многократной свертки. Обобщенное решение начальной задачи (1.4.1) имеет вид:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = v(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i - N} \sum_{k=1}^{p_i - N + 1 - j} c_{i\ [k+j+N-1]} \varphi_i^{(k)} \delta^{(j-1)}(t),$$

где функция $v(t)$ в случае $\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i - j + 1}(t \geq 0)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, принадлежит классу $C(t \geq 0;\ E_1) \cap C^N(t > 0;\ E_1)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}_N(v(t)) = f(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i - N} \sum_{k=1}^{p_i - N + 1 - j} c_{i\ [k+j+N-1]} k^{(j-1)}(t) \varphi_i^{(k)},$$

и начальным условиям

$$v^{(j-1)}(0) = u_{j-1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i - N + j} c_{i\ [k+N-j]} \varphi_i^{(k)},\ j = 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $c_{i\ [j]} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$, определяются единственным образом по формулам

$$c_{i\ [j]} = - \sum_{k=1}^{p_i - j + 1} \left\langle h^{(p_i - j - k + 1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

здесь $h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),\ p(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$.

Докажем этот факт. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \\
&= \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \left(v(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i - N} \sum_{k=1}^{p_i - N + 1 - j} c_{i\ [k+j+N-1]} \varphi_i^{(k)} \delta^{(j-1)}(t) \right) = \\
&= \mathcal{L}_N(v(t))\theta(t) + \left(B v^{(N-1)}(0) - A_{N-1} v^{(N-2)}(0) - \ldots - A_1 v(0) \right) \delta(t) + \\
&\quad + \left(B v^{(N-2)}(0) - A_{N-1} v^{(N-3)}(0) - \ldots - A_2 v(0) \right) \delta'(t) + \ldots + \\
&\quad + \left(B v'(0) - A_{N-1} v(0) \right) \delta^{(N-2)}(t) + B v(0) \delta^{(N-1)}(t) + \\
&\quad + \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i - N} \sum_{k=1}^{p_i - N + 1 - j} c_{i\ [k+j+N-1]} \varphi_i^{(k)} \delta^{(j-1)}(t).
\end{aligned}$$

[1] Подход, о котором идет речь, наиболее доступным образом изложен в пособии [80].

Заметим, что

$$Bv(0) = Bu_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-N+1} c_{i\ [k+N-1]} B\varphi_i^{(k)},$$

$$Bv'(0) - A_{N-1}v(0) = Bu_1 - A_{N-1}u_0 + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-N+2} c_{i\ [k+N-2]} B\varphi_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-N+1} c_{i\ [k+N-1]} A_{N-1}\varphi_i^{(k)},$$

$$\ldots,$$

$$Bv^{(N-2)}(0) - A_{N-1}v^{(N-3)}(0) - \ldots - A_2 v(0) = \\ = Bu_{N-2} - A_{N-1}u_{N-3} - \ldots - A_2 u_0 + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-1} c_{i\ [k+1]} B\varphi_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-2} c_{i\ [k+2]} A_{N-1}\varphi_i^{(k)} - \ldots - \\ - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-N+1} c_{i\ [k+N-1]} A_2\varphi_i^{(k)},$$

$$Bv^{(N-1)}(0) - A_{N-2}v^{(N-3)}(0) - \ldots - A_1 v(0) = \\ = Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1 u_0 + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} c_{i\ [k]} B\varphi_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-1} c_{i\ [k+1]} A_{N-1}\varphi_i^{(k)} - \ldots - \\ - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i-N+1} c_{i\ [k+N-1]} A_1\varphi_i^{(k)},$$

а также воспользуемся представлением

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) = \delta^{(N)}(t) * (B\delta(t) + \mathcal{F}_N(t)\theta(t))$$

(вид оператор-функции $\mathcal{F}_N(t)$ см. в теореме 3.1.1), тогда

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = f(t)\theta(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i-N} \sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]} k^{(j-1)}(t)\varphi_i^{(k)}\theta(t) + \\ + (Bu_{N-1} - A_{N-1}u_{N-2} - \ldots - A_1 u_0)\delta(t) +$$

$$+(Bu_{N-2}-A_{N-1}u_{N-3}-\ldots-A_2u_0)\delta'(t)+\ldots+$$

$$+(Bu_1-A_{N-1}u_0)\delta^{(N-2)}(t)+Bu_0\delta^{(N-1)}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}B\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-1)}(t)-$$

$$-\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-2)}(t)-$$

$$-\sum_{j=3}^{N}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}'_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-3)}(t)-\ldots-$$

$$-\sum_{j=N-1}^{N}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}_N^{(j-3)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta'(t)-$$

$$-\sum_{j=N}^{N}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}_N^{(j-2)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta(t)\Bigg]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j}c_{i\ [k+j+N-1]}\Big(B\varphi_i^{(k)}\delta^{(j+N-1)}(t)-\mathcal{F}_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j+N-2)}(t)-$$

$$-\mathcal{F}'_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j+N-3)}(t)-\ldots-\mathcal{F}_N^{(j+N-3)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta'(t)-$$

$$-\mathcal{F}_N^{(j+N-2)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta(t)\Big)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j}c_{i\ [k+j+N-1]}\mathcal{F}_N^{(j+N-1)}(t)\varphi_i^{(k)}.$$

Принимая во внимание очевидное равенство $\mathcal{F}_N^{(N)}(t)=k(t)$ и вид распределения $\tilde{g}(t)$, получим

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\tilde{g}(t)+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{j=1}^{p_i}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}B\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-1)}(t)-$$

$$-\sum_{j=2}^{p_i}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-2)}(t)-$$

$$-\sum_{j=3}^{p_i}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}'_N(0)\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-3)}(t)-\ldots-$$

$$-\sum_{j=N-1}^{p_i}\sum_{k=1}^{p_i-j+1}c_{i\ [k+j-1]}\mathcal{F}_N^{(j-3)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta'(t)-$$

$$
- \sum_{j=N}^{p_i} \sum_{k=1}^{p_i-j+1} c_{i\ [k+j-1]} \mathcal{F}_N^{(j-2)}(0)\varphi_i^{(k)}\delta(t)\Bigg] =
$$

$$
= \tilde{g}(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \sum_{k=1}^{p_i-j+1} c_{i\ [k+j-1]} \Big[B\varphi_i^{(k)} - l_{k-1}(\varphi_i) \Big] \delta^{(j-1)}(t).
$$

а затем и требуемое, так как последняя группа слагаемых зануляется, в силу существования обобщенного полного $\mathcal{F}_N(t)$-жорданова набора. Здесь введены следующие обозначения

$$
l_{k-1}(\varphi_i) = \sum_{q=1}^{k-1} \mathcal{F}_N^{(k-1-q)}(0)\varphi_i^{(q)},\ k = 2,\ \ldots, p_i,
$$

причем $l_0(\varphi_i) = 0$.

Замечание 3.2.2. Если в доказанной формуле обобщенного решения положить $c_{i\ [j]} = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$, то она примет вид

$$
\tilde{u}(t) = v(t)\theta(t),
$$

где функция $v(t)$ при $\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i-j+1}(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, n,$ $j = 1, \ldots, p_i$, принадлежит классу $C(t \geq 0;\ E_1) \cap C^N(t > 0;\ E_1)$, удовлетворяет рассматриваемому интегро-дифференциальному уравнению и исходным начальным условиям, т. е. является классическим решением задачи Коши (1.4.1). Таким образом, справедлива

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1 и*

$$
\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i-j+1}(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,
$$

тогда, если

$$
\sum_{k=1}^{p_i-j+1} \left\langle h^{(p_i-j-k+1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,
$$

то задача Коши (1.4.1) *имеет единственное классическое решение.*

Замечание 3.2.3. Полученные в этой главе результаты согласуются со случаем $k(t) \equiv \mathbb{O}$, т. е. когда $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ — дифференциальный оператор высокого порядка. Особую ценность этот факт имеет с точки зрения приложений: делает возможным исследование моделей, описываемых не только интегро-дифференциальными, но и дифференциальными уравнениями в частных производных (высокого порядка по времени). С теоретической точки зрения доказанные теоремы могут трактоваться как обобщение результатов для полных дифференциальных уравнений высоких порядков. Однако, несмотря на "угрожающую" общность, полученные результаты имеют свою область применимости и ограничения, которые описаны в следующих замечаниях.

Замечание 3.2.4. Из доказанных в этой главе утверждений не могут быть получены результаты для однозначной разрешимости задачи Коши (2.0.1), (2.0.2), рассмотренной в предыдущей главе, формальными предположениями A_{N-1}, A_{N-2}, $\ldots$, $A_1 = \mathbb{O}$, $A_0 = A$ и $k(t) = g(t)A$. Если говорить более общо, из этих утверждений мы не сможем получить результатов для уравнений при $A_{N-1} = \mathbb{O}$ или A_{N-1}, $A_{N-2} = \mathbb{O}$ или и т. д. A_{N-1}, $A_{N-2}, \ldots, A_0, k(0)$, $k'(0), \ldots$, $k^{(q)} = \mathbb{O}$. Другими словами, если оператор-функция $\mathcal{F}_N(t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль какого-либо конечного порядка. В таком случае неясным становится вопрос о жордановой структуре вырожденного оператора B: попросту непонятно каким образом выстраиваются обобщенные жордановы цепочки относительно оператор-функции $\mathcal{F}_N(t)$ с таким свойством. Тем самым, вопрос существования и единственности решения задачи Коши

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),\ u^{(k-1)}(0) = u_{k-1},\ k = 1, \ldots, N$$

с фредгольмовым оператором B при $N \geq 2$ (случай $N = 1$ изучен в [84]) на сегодняшний день остается открытым. С той же самой проблемой мы столкнемся при исследовании сверточного интегрального уравнения

$$Bu(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),$$

с фредгольмовым оператором B, ядро которого имеет в точке $t = 0$ нуль некоторого конечного порядка. Таким образом, наши утверждения верны при дополнительном предположении: *оператор-функция* $\mathcal{F}_N(t)$ *не имеет простого или кратного нуля в точке* $t = 0$.

Замечание 3.2.5. Родственной или даже более общей по отношению к этой будет ситуация, когда соответствующие операторы не равны нулю, но их ядра не пустые и являются подмножествами нуль-пространства $N(B)$. Такие случаи нередко встречаются в приложениях. Работа по решению указанных проблем продолжается автором в настоящее время.

Глава 4

Приложения

В этой главе рассмотрим некоторые приложения абстрактных результатов. Приведем примеры конкретных реализаций рассматриваемых до сих пор абстрактных начальных задач. Будем при этом придерживаться следующих обозначений.

- t — положительная действительная переменная, играющая в наших задачах роль времени;
- $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_M)$ — M-мерный вектор, компоненты которого обозначают пространственные координаты;
- Ω — ограниченное односвязное множество пространства $\mathbb{R}^M$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞;

Также будем пользоваться обозначениями для функциональных пространств

- $\mathcal{L}_2(\Omega)$ — пространство Лебега, состоящее из вещественных функций суммируемых по Лебегу с квадратом на множестве Ω, с нормой

$$\|u(\bar{x})\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} u^2(\bar{x})d\bar{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

  и скалярным произведением

$$\langle u(\bar{x}),\, v(\bar{x})\rangle_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(\bar{x})v(\bar{x})d\bar{x};$$

- $H^l(\Omega)$ (или $W_2^l(\Omega)$) — пространство Соболева вещественных l раз непрерывно дифференцируемых по совокупности переменных на множестве Ω функций, причем каждая частная производная функции имеет предел при стремлении $\bar{x}$ к любой граничной точке области Ω. Норма и скалярное произведение в таком пространстве задаются соответственно
$$\|u(\bar{x})\|_{H^l(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} u^2(\bar{x}) d\bar{x} + \sum_{1 \le |\alpha| \le l} \int\limits_{\Omega} \left(D^\alpha u(\bar{x})\right)^2 d\bar{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$
и
$$\langle u(\bar{x}),\, v(\bar{x}) \rangle_{H^l(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(\bar{x}) v(\bar{x}) d\bar{x} + \sum_{1 \le |\alpha| \le l} \int\limits_{\Omega} D^\alpha u(\bar{x}) D^\alpha v(\bar{x}) d\bar{x},$$
здесь $D^\alpha u(\bar{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x_1,\, x_2, \dots,\, x_M)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_M^{\alpha_M}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M$;
- $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$ — замкнутые множества пространств $\mathcal{L}_2(\Omega)$ и $H^l(\Omega)$ соответственно, которые состоят из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ (или вблизи $\partial\Omega$). Известно, что множество $\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$ плотно в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Рассмотрим однородную граничную задачу
$$\Delta\phi(\bar{x}) = \lambda\phi(\bar{x}),\ \bar{x} \in \Omega, \tag{4.0.1}$$
$$\phi(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0. \tag{4.0.2}$$
Здесь Δ — оператор Лапласа $\Delta\phi(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$. Введем обозначение $\sigma(\Delta)$ для спектра задачи (4.0.1), (4.0.2). Известно, что $\sigma(\Delta)$ представляет собой счетное множество, состоящее из вещественных чисел $\lambda < 0$, которое не имеет точек сгущения. Каждому собственному числу λ соответствует конечное число $d(\lambda)$ линейно независимых собственных функций $\phi_{\lambda i}(\bar{x}) \in C^\infty(\Omega)$, $i = 1, \dots, d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ — кратность собственного числа λ. Совокупность всех $\phi_{\lambda i}(\bar{x})$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \dots, d(\lambda)$ образует базис сепарабельного гильбертова пространства $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega)$, ортонормированный в

смысле его скалярного произведения. Оператор $\Delta - \lambda$ является самосопряженным в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, а, значит, фредгольмовым в этом пространстве при любом фиксированном $\lambda \in \sigma(\Delta)$. Если же $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ (λ — регулярная точка оператора Δ), т. е. однородная задача Дирихле (4.0.1), (4.0.2) имеет только нулевые решения, то $\Delta - \lambda$ непрерывно обратим в $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega)$. Изложенные здесь факты о собственных значениях и собственных функциях оператора Лапласа можно найти непосредственно или извлечь из более общих утверждений, приведенных в монографии [41, Гл. I–III, с. 25–290].

4.1 Движение вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта

В цилиндрической области $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$(\nu - \Delta)\frac{\partial}{\partial t}u(t, \bar{x}) - \Delta u(t, \bar{x}) - \int\limits_0^t k_1(t-\tau)\Delta u(\tau, \bar{x})d\tau = f(t, \bar{x}),$$

которое возникает при изучении динамики наследственно упругих тел [104], в частности, оно является линейной составляющей уравнения, описывающего течение вязкоупругих жидкостей Кельвина–Фойгта [56]. Здесь вещественная постоянная ν отлична от нуля, $k_1(t) \in C^\infty(t \geq 0)$. Для этого уравнения поставим задачу Коши–Дирихле, т. е. зададим начальное

$$u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}),\ \bar{x} \in \Omega$$

и однородное граничное

$$u(t, \bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0,\ t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

условия. Данную задачу редуцируем к начальной задаче (2.0.1), (2.0.2) при $N = 1$, полагая

$$E_1 = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega),\ E_2 = \mathcal{L}_2(\Omega),\ B = \nu - \Delta,\ A = \Delta,\ g(t) = k_1(t),$$

$$D(B) = D(A) = \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Omega)$$

Пусть $\nu \in \sigma(\Delta)$, тогда функции $\phi_{\nu i}(\bar{x}),\ i = 1,\ \dots,\ d(\nu)$ образуют базис пространства нулей фредгольмова оператора B. В качестве элементов базиса $N(B^*)$ выберем следующие функции

$$\psi_i(\bar{x}) = \frac{1}{\nu}\phi_{\nu i}(\bar{x}),\, \bar{x} \in \Omega,\, i = 1, \dots, d(\nu).$$

Справедлива цепочка равенств

$$\langle A\varphi_i,\, \psi_j\rangle = \int\limits_{\Omega} \Delta\phi_{\nu i}(\bar{x})\psi_j(\bar{x})d\bar{x} = \\ = \int\limits_{\Omega} \phi_{\nu i}(\bar{x})\phi_{\nu j}(\bar{x})d\bar{x} = \delta_{ij},\, i,\, j = 1, \dots, d(\nu),$$

которая означает, что длины всех A-жордановых цепочек равны единице. В качестве следствия из теоремы 2.1.2 справедливо следующее утверждение

Теорема 4.1.1. *Пусть $\nu \in \sigma(\Delta)$ и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t, \bar{x})\phi_{\nu i}(\bar{x})d\bar{x} \in C(t \geq 0),\, i = 1, \dots, d(\nu),$$

тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой

$$\tilde{u}(t, \bar{x}) = u(t, \bar{x})\theta(t) = \\ = \Bigg[u_0(\bar{x}) + \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\nu}} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\nu - \lambda} \int\limits_0^t \Bigg(1 + \int\limits_0^{t-s} p_\lambda(\tau)d\tau\Bigg) a_{\lambda i}(s)ds\phi_{\lambda i}(\bar{x}) - \\ - \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{d(\nu)}\Bigg(a_{\nu i}(t) + \int\limits_0^t p(t-s)a_{\nu i}(s)ds\Bigg)\phi_{\nu i}(\bar{x})\Bigg]\,\theta(t),$$

где $p_\lambda(t)$ — резольвента ядра $\frac{\lambda}{\nu-\lambda}\ (1+\int\limits_0^t k_1(s)ds)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \nu$, $p(t)$ — резольвента ядра $(-k_1(t))$, функция $a_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \dots, d(\lambda)$ задается следующим образом:

$$a_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega}\Bigg[f(t, \bar{x}) + \lambda\Bigg(1 + \int\limits_0^t k_1(s)ds\Bigg)u_0(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

А из теоремы 2.1.3 вытекает

Теорема 4.1.2. *Пусть* $\nu \in \sigma(\Delta)$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\nu i}(\bar{x})d\bar{x} \in C^1(t \geq 0),\ i = 1,\ldots,d(\nu),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_{\Omega} \Big(f(0,\bar{x}) + \nu u_0(\bar{x})\Big)\phi_{\nu i}(\bar{x})d\bar{x} = 0,\ i = 1,\ldots,d(\nu),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x}) \in C^1(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.1.1.*

Нетрудно сформулировать аналогичные утверждения и для регулярного случая, когда $\nu \notin \sigma(\Delta)$, т. е. оператор $\nu - \Delta$ непрерывно обратим.

Теорема 4.1.3. *Пусть* $\nu \notin \sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой*

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \\
&= \left[u_0(\bar{x}) + \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)}\sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\nu-\lambda}\int\limits_0^t \Big(1 + \int\limits_0^{t-s} p_\lambda(\tau)d\tau\Big)a_{\lambda i}(s)ds\phi_{\lambda i}(\bar{x})\right]\theta(t),
\end{aligned}$$

где $p_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\nu-\lambda}\ (1 + \int\limits_0^t k_1(s)ds)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, *функция* $a_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$a_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega}\left[f(t,\bar{x}) + \lambda\Big(1 + \int\limits_0^t k_1(s)ds\Big)u_0(\bar{x})\right]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.1.4. *Пусть* $\nu \notin \sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x}) \in C(t \geq 0; \mathcal{L}_2(\Omega))$, *то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x}) \in C^1(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.1.3.*

Эти утверждения являются прямыми следствиями теорем 2.1.5 и 2.1.6, сформулированных в п. 2.1.

Замечание 4.1.1. Здесь и далее всюду знак " $\sum\limits_{\lambda\in\sigma(\Delta)}$ " в формулах обобщенных и классических решений предполагает суммирование в порядке возрастания абсолютных значений собственных чисел $\lambda\in\sigma(\Delta)$.

4.2 Поперечные колебания пластины с памятью

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$(\mu-\Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\bar{x})+\Delta^2 u(t,\bar{x})-\int\limits_0^t k_2(t-\tau)\Delta^2 u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}),$$

$$t>0,\ \bar{x}\in\Omega,$$

$$u(t,\bar{x})|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ \left.\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x})\right|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ \bar{x}\in\Omega,\ u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,$$

которая при $M=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ описывает поперечные колебания вязкоупругой пластины [104]. Функция $u(t,x_1,x_2)$ задает поперечные перемещения пластины, число μ представляет собой нелинейное соотношение между ее постоянными механическими характеристиками, а $k_2(t)$ отражает реологические свойства (ползучесть).

Выбирая

$$E_1=\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega),\ E_2=\mathcal{L}_2(\Omega),\ B=\mu-\Delta,\ A=-\Delta^2,\ g(t)=-k_2(t),$$

$$D(B)=D(A)=\overset{\circ}{H}{}^{l+4}(\Omega),$$

сведем данную задачу к начальной задаче (2.0.1), (2.0.2) при $N=2$.

В регулярном случае справедливы утверждения

Теорема 4.2.1. *Пусть $\mu\notin\sigma(\Delta)$, тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой*

$$\tilde{u}(t,\bar{x})=u(t,\bar{x})\theta(t)=\Bigg[u_0(\bar{x})+u_1(\bar{x})t+$$

$$+\sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\mu-\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\Big(1+(t-s-\tau)q_\lambda(\tau)\Big)b_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

где $q_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda^2}{\mu-\lambda}\,(-t+\int\limits_0^t(t-s)k_2(s)ds)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, *функция* $b_{\lambda i}(t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $i=1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$b_{\lambda i}(t)=\int\limits_\Omega\biggl[f(t,\bar{x})-\lambda^2\biggl(1+\int\limits_0^t k_2(s)ds\biggr)u_0(\bar{x})-$$
$$-\lambda^2\biggl(t+\int\limits_0^t(t-s)k_2(s)ds\biggr)u_1(\bar{x})\biggr]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\mu\notin\sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x})\in C(t\geq 0;\mathcal{L}_2(\Omega))$, *тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x})\in C^2(t\geq 0;\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.2.1.*

Если $\mu\in\sigma(\Delta)$, то, как указано выше, оператор $B=\mu-\Delta$ фредгольмов, в силу самосопряженности на $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Положим базисом в $N(B^*)$ множество функций $\left\{-\frac{1}{\mu^2}\phi_{\beta i}(\bar{x})\right\}_{i=1}^{d(\mu)}$, заданных на Ω, тогда

$$\langle A\varphi_i,\,\psi_j\rangle=\frac{1}{\mu^2}\int\limits_\Omega\Delta^2\phi_{\mu i}(\bar{x})\phi_{\mu j}(\bar{x})d\bar{x}=\delta_{ij},\,i,j=1,\ldots,d(\mu),$$

что означает равенство единице длин всех жордановых цепочек.

Теорема 4.2.3. *Пусть* $\mu\in\sigma(\Delta)$ *и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\mu i}(\bar{x})d\bar{x}\in C(t\geq 0),\,i=1,\ldots,d(\mu),$$

тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное обобщенное решение, определяемое формулой

$$\tilde{u}(t,\bar{x})=u(t,\bar{x})\theta(t)=\biggl[u_0(\bar{x})+u_1(\bar{x})t+$$
$$+\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\mu}}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\mu-\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\Bigl(1+(t-s-\tau)q_\lambda(\tau)\Bigr)b_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x})-$$
$$-\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{d(\mu)}\biggl(b_{\mu i}(t)+\int\limits_0^t q(t-s)b_{\mu i}(s)ds\biggr)\phi_{\mu i}(\bar{x})\biggr]\,\theta(t),$$

где $q_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda^2}{\mu-\lambda}\,(-t+\int\limits_0^t(t-s)k_2(s)ds)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $\lambda\neq\mu$, $q(t)$ *— резольвента ядра* $k_2(t)$, *функция* $b_{\lambda i}(t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $i=1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$b_{\lambda i}(t)=\int\limits_\Omega\Bigg[f(t,\bar{x})-\lambda^2\Bigg(1+\int\limits_0^t k_2(s)ds\Bigg)u_0(\bar{x})-$$
$$-\lambda^2\Bigg(t+\int\limits_0^t(t-s)k_2(s)ds\Bigg)u_1(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.2.4. *Пусть* $\mu\in\sigma(\Delta)$ *и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\mu i}(\bar{x})d\bar{x}\in C^2(t\geq 0),\ i=1,\ldots,d(\mu),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_\Omega\Bigg(f(0,\bar{x})-\mu^2u_0(\bar{x})\Bigg)\phi_{\nu i}(\bar{x})d\bar{x}=0,$$
$$\int\limits_\Omega\Bigg(\frac{\partial f}{\partial t}(0,\bar{x})+k_2(0)f(0,\bar{x})-\mu^2u_1(\bar{x})\Bigg)\phi_{\nu i}(\bar{x})d\bar{x}=0,$$
$$i=1,\ldots,d(\mu),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x})\in C^2(t\geq 0;\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.2.3.*

4.3 Вязкоупруго-динамическое состояние среды

Рассмотрим еще одну начально-краевую задачу

$$(\alpha-\Delta)u_{tt}-\beta\Delta u_t-\Delta u+\int\limits_0^t k_3(t-\tau)\Delta u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}),$$
$$t>0,\ \bar{x}\in\Omega,$$
$$u|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ \ u_t|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ \bar{x}\in\Omega,\ \ u|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,$$

возникающую при изучении вязкоупругих процессов [104]. Здесь α, $\beta\in\mathbb{R}$ отличны от нуля, $k_3(t)\in\mathcal{C}^\infty(t\geq 0)$.

Выбрав пространства E_1, E_2а также области определения операторов $B = \alpha - \Delta$, $A_1 = \beta\Delta$, $A_0 = \Delta$, $k(t) = -k_3(t)\Delta$, как в примере 4.1, и, предполагая $\alpha \in \sigma(\Delta)$, сведем данную задачу к задаче Коши 1.4.1 при $N = 2$. Базисными элементами ядра оператора B^* положим $\frac{1}{\alpha\beta}\phi_{\alpha i}(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, d(\alpha)$. Тогда $\langle A_1\varphi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$, т. е. длины всех обобщенных жордановых цепочек относительно оператор функции $\mathcal{F}_2(t) = A_1 + A_0 t + \int\limits_0^t (t-\tau)k(\tau)d\tau$ равны 1. Прямыми следствиями теорем 3.2.1 и 3.2.2 являются следующие утверждения.

Теорема 4.3.1. *Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$ и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\alpha i}(\bar{x})d\bar{x} \in C(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, d(\alpha),$$

тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t +$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\alpha}} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\alpha-\lambda} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t-s-\tau)r_\lambda(\tau)\Big)c_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x}) -$$

$$- \frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{d(\alpha)} \int\limits_0^t \Big(1 + \int\limits_0^{t-s} r(\tau)d\tau\Big)c_{\alpha i}(s)ds\phi_{\alpha i}(\bar{x})\Bigg]\,\theta(t),$$

где $r_\lambda(t)$ — резольвента ядра $\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}(\beta + t - \int\limits_0^t (t-s)k_3(s)ds)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \alpha$, $r(t)$ — резольвента ядра $-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int\limits_0^t k_3(s)ds$, функция $c_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \ldots, d(\lambda)$ задается следующим образом:

$$c_{\lambda i}(t) = \int\limits_\Omega \Bigg[f(t,\bar{x}) + \lambda\Big(1 - \int\limits_0^t k_3(s)ds\Big)u_0(\bar{x}) +$$

$$+ \lambda\Big(\beta + t - \int\limits_0^t (t-s)k_3(s)ds\Big)u_1(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.3.2. *Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$ и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\alpha i}(\bar{x})d\bar{x} \in C^1(t \geq 0), i = 1, \ldots, d(\alpha),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_{\Omega} (f(0,\bar{x}) + \alpha u_0(\bar{x}) + \alpha\beta u_1(\bar{x}))\phi_{\alpha i}(\bar{x})\,d\bar{x} = 0,\ i = 1,\ldots,d(\alpha),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.3.1.*

В регулярном случае к исследованию однозначной разрешимости поставленной задачи применимы теоремы 1.4.2 и 1.4.3 из п. 1.4.

Теорема 4.3.3. *Пусть* $\alpha \notin \sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t +$$

$$+ \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\alpha-\lambda} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t-s-\tau)r_\lambda(\tau)\Big) c_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x})\Bigg]\,\theta(t),$$

где $r_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}(\beta + t - \int\limits_0^t (t-s)k_3(s)ds)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, *функция* $c_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$c_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega} \Bigg[f(t,\bar{x}) + \lambda\Big(1 - \int\limits_0^t k_3(s)ds\Big)u_0(\bar{x}) +$$

$$+ \lambda\Big(\beta + t - \int\limits_0^t (t-s)k_3(s)ds\Big)u_1(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.3.4. *Пусть* $\alpha \notin \sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x}) \in C(t \geq 0; \mathcal{L}_2(\Omega))$, *тогда исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.3.3.*

4.4 Поперечные колебания диссипативной пластины

Начально-краевая задача вида

$$(\gamma - \Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\bar{x}) - \Delta\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x}) + \Delta^2 u(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x}),\ t > 0,\ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u(t,\bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x})\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}),\ \bar{x}\in\Omega,\ u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

в случае $M=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ описывает поперечные колебания диссипативной пластины с учетом термальных эффектов [101]. Здесь $\gamma\neq 0$. Положив операторные коэффициенты $B=\gamma-\Delta,\ A_1=\Delta,\ A_2=-\Delta^2$ и ядро $k(t)\equiv\mathbb{O}$ определенными на $\overset{\circ}{H}{}^{l+4}\ (\Omega)$, а $E_1=\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega),\ E_2=\mathcal{L}_2(\Omega)$, сведем исходную задачу к (1.4.1) при $N=2$. При $\gamma\in\sigma(\Delta)$ в $N(B^*)$ базисными функциями выберем $\frac{1}{\gamma}\phi_{\gamma i}(\bar{x})$, $i=1,\ldots,d(\gamma)$. Нетрудно убедиться, что фредгольмов оператор B имеет полный жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{F}_2(t)=A_1+A_0t$, состоящий только из его нулей $\phi_{\gamma i}(\bar{x})$, $i=1,\ldots,d(\gamma)$. Справедливы утверждения

Теорема 4.4.1. *Пусть* $\gamma\in\sigma(\Delta)$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\gamma i}(\bar{x})d\bar{x}\in C(t\geq 0),\ i=1,\ldots,d(\gamma),$$

тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t,\bar{x}) &= u(t,\bar{x})\theta(t) = \\
&= \Bigg[u_0(\bar{x}) + \Bigg(u_1(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{d(\gamma)}\int\limits_{\Omega} u_1(\bar{x})\phi_{\gamma i}(\bar{x})d\bar{x}\phi_{\gamma i}(\bar{x})\Bigg)t + \\
&+ \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\gamma}}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\gamma-\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\Big(1+(t-s-\tau)m_\lambda(\tau)\Big)d_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x}) - \\
&- \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{d(\gamma)}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} e^{\gamma(t-s)}\Big(f(s,\bar{x})-\gamma^2u_0(\bar{x})\Big)\phi_{\gamma i}(\bar{x})d\bar{x}ds\phi_{\gamma i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),
\end{aligned}$$

где $m_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\gamma-\lambda}(1-\lambda t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $\lambda\neq\gamma$, *функция* $d_{\lambda i}(t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $i=1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$d_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega}\Big[f(t,\bar{x})-\lambda^2u_0(\bar{x})+\lambda u_1(\bar{x})-\lambda^2tu_1(\bar{x})\Big]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.4.2. *Пусть* $\gamma\in\sigma(\Delta)$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\gamma i}(\bar{x})d\bar{x}\in C^1(t\geq 0),\ i=1,\ldots,d(\gamma),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_{\Omega} \big(f(0,\bar{x}) - \gamma^2 u_0(\bar{x}) + \gamma u_1(\bar{x})\big)\phi_{\gamma i}(\bar{x})\, d\bar{x} = 0,\ i = 1, \ldots, d(\gamma),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.4.1.*

Соответственно при $\gamma \notin \sigma(\Delta)$ оператор B непрерывно обратим, и следствиями теорем 1.4.2 и 1.4.3 являются следующие утверждения.

Теорема 4.4.3. *Пусть* $\gamma \notin \sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t +$$

$$+ \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\gamma - \lambda} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t - s - \tau)m_\lambda(\tau)\Big) d_{\lambda i}(s) d\tau ds \phi_{\lambda i}(\bar{x})\Bigg]\, \theta(t),$$

где $m_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\gamma-\lambda}(1 - \lambda t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, *функция* $d_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \ldots, d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$d_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega} \Big[f(t,\bar{x}) - \lambda^2 u_0(\bar{x}) + \lambda u_1(\bar{x}) - \lambda^2 t u_1(\bar{x})\Big]\phi_{\lambda i}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Теорема 4.4.4. *Пусть* $\gamma \notin \sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x}) \in C(t \geq 0; \mathcal{L}_2(\Omega))$ *тогда, исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.4.3.*

Замечание 4.4.1. Вид функции $m_\lambda(t)$, использованной в формулах решений, может быть уточнен, он, очевидно, зависит от фиксированного значения γ и от λ как параметра. В частности, для всех $\lambda \in \sigma(\Delta)$ таких, что $\lambda < \gamma - \frac{1}{4}$, имеем

$$m_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\gamma - \lambda} e^{\frac{\lambda}{2(\gamma-\lambda)}t} \left(\cos \frac{\lambda\sqrt{4\gamma - 4\lambda - 1}}{2(\gamma - \lambda)} t + A_\lambda \sin \frac{\lambda\sqrt{4\gamma - 4\lambda - 1}}{2(\gamma - \lambda)} t\right).$$

В случае $\lambda > \gamma - \frac{1}{4}$, $\lambda \neq \gamma$, получим

$$m_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\gamma - \lambda} e^{\frac{\lambda}{2(\gamma-\lambda)}t} \left(\mathrm{ch} \frac{\lambda\sqrt{1 - 4\gamma + 4\lambda}}{2(\gamma - \lambda)} t + B_\lambda \mathrm{sh} \frac{\lambda\sqrt{1 - 4\gamma + 4\lambda}}{2(\gamma - \lambda)} t\right).$$

И, наконец, $m_\lambda(t) = 4\lambda e^{2\lambda t}(1+\lambda t)$ при $\lambda = \gamma - \frac{1}{4}$. Здесь использованы обозначения

$$A_\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\gamma - 4\lambda + 1}} - \sqrt{4\gamma - 4\lambda + 1}\right),$$
$$B_\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 4\gamma + 4\lambda}} + \sqrt{1 - 4\gamma + 4\lambda}\right).$$

4.5 Продольные колебания упругого стержня с учетом инерции

Рассмотрим следующую задачу:

$$(\lambda' - \Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\bar{x}) - a(\Delta - \lambda'')\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x}) - b(\Delta - \lambda''')u(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x}),$$

$$u(t,\bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}),\ \left.\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x})\right|_{t=0} = u_1(\bar{x}),\ \bar{x} \in \Omega,\ u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

которая при $M = 1$ моделирует продольные колебания упругого стержня [27], при этом неизвестная функция $u(t,x)$ задает продольные перемещения, а заданная $f(t,x)$ — силовую нагрузку, действительные и отличные от нуля коэффициенты λ', λ'', λ''', a и b — постоянные механические характеристики. Полагая

$$E_1 = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega),\ E_2 = \mathcal{L}_2(\Omega),$$

$$B = \lambda' - \Delta,\ A_1 = a(\Delta - \lambda''),\ A_0 = b(\Delta - \lambda'''),\ k(t) = \mathbb{O},$$
$$D(B) = D(A_1) = D(A_0) = D(k) = \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Omega),$$

сведем рассматриваемую задачу к (1.4.1) при $N = 2$. Ранее в [27] эта задача была исследована при условии $\lambda' \in \sigma(\Delta)$, $\lambda' = \lambda''$, $\lambda' \neq \lambda'''$. Применяемый подход не позволял рассмотреть случай $\lambda' \in \sigma(\Delta)$, $\lambda' \neq \lambda''$, который был изучен автором в [46] и представлен ниже. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.5.1. *Пусть $\lambda' \in \sigma(\Delta)$, причем $\lambda' \neq \lambda''$ и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\lambda' i}(\bar{x})d\bar{x} \in C(t \geq 0),\ i = 1,\ldots,d(\lambda'),$$

тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) =$$
$$= \Bigg[u_0(\bar{x}) + \Bigg(u_1(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{d(\lambda')} \int\limits_{\Omega} u_1(\bar{x})\phi_{\lambda' i}(\bar{x})d\bar{x}\phi_{\lambda' i}(\bar{x})\Bigg)t +$$
$$+ \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\lambda'}} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\lambda'-\lambda} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t-s-\tau)n_\lambda(\tau)\Big)e_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x}) -$$
$$- \frac{1}{\omega'} \sum_{i=1}^{d(\lambda')} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} e^{-\frac{\omega''_{\lambda'}}{\omega'_{\lambda'}}(t-s)} \Big(f(s,\bar{x}) + \omega''_{\lambda'}u_0(\bar{x})\Big)\phi_{\lambda' i}(\bar{x})d\bar{x}ds\phi_{\lambda' i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

где $\omega'_\lambda = a(\lambda - \lambda'')$, $\omega''_\lambda = b(\lambda - \lambda''')$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $n_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{1}{\lambda'-\lambda}(\omega'_\lambda - \omega''_\lambda t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \lambda'$, *функция* $e_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$e_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega} \Big[f(t,\bar{x}) + \omega''_\lambda u_0(\bar{x}) + \omega'_\lambda u_1(\bar{x}) + \omega''_\lambda t u_1(\bar{x})\Big]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.5.2. *Пусть* $\lambda' \in \sigma(\Delta)$, *причем* $\lambda' \neq \lambda''$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\lambda' i}(\bar{x})d\bar{x} \in C^1(t \geq 0),\ i = 1,\ldots,d(\lambda'),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_{\Omega} (f(0,\bar{x}) + \omega''_{\lambda'}u_0(\bar{x}) + \omega'_{\lambda'}u_1(\bar{x}))\phi_{\lambda' i}(\bar{x})\,d\bar{x} = 0,\ i = 1,\ldots,d(\lambda'),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \mathring{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.5.1.*

Теорема 4.5.3. *Пусть* $\lambda' \notin \sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t +$$
$$+ \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\gamma-\lambda} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \Big(1 + (t-s-\tau)n_\lambda(\tau)\Big)e_{\lambda i}(s)d\tau ds\phi_{\lambda i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

где $\omega'_\lambda = a(\lambda - \lambda'')$, $\omega''_\lambda = b(\lambda - \lambda''')$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $n_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{1}{\lambda' - \lambda}(\omega'_\lambda - \omega''_\lambda t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, *функция* $e_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \ldots, d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$e_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega} \left[f(t, \bar{x}) + \omega''_\lambda u_0(\bar{x}) + \omega'_\lambda u_1(\bar{x}) + \omega''_\lambda t u_1(\bar{x}) \right] \phi_{\lambda i}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Теорема 4.5.4. *Пусть* $\lambda' \notin \sigma(\Delta)$ *и* $f(t, \bar{x}) \in C(t \geq 0; \mathcal{L}_2(\Omega))$ *тогда, исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t, \bar{x}) \in C^2(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.5.3.*

4.6 Колебания термоупругой пластины

Начально-краевая задача

$$(\Delta - \alpha_2) u_{ttt} - k\Delta(\Delta - \alpha_1) u_{tt} - \gamma \Delta^2 u_t + k\Delta^3 u = f(t, \bar{x}), \ t > 0, \ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \ u_t|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \ u_{tt}|_{t=0} = u_2(\bar{x}), \ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0,$$

где α_1, α_2, γ, k отличны от нуля и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, описывает при $M = 2$ и $f(t, x_1, x_2) \equiv 0$ колебания термоупругой пластины [129] и допускает редукцию к задаче Коши (1.4.1) для вырожденного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка, если выбрать пространства E_1 и E_2, как в предыдущем примере, а областью определения операторных коэффициентов и ядра — множество $\overset{\circ}{H}{}^{l+6}(\Omega)$. В случае $\alpha_2 \in \sigma(\Delta)$ элементами базиса $N(B^*)$ положим функции $\frac{1}{k\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \phi_{\alpha_2 i}(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, d(\alpha_2)$, тогда, очевидно, что $\langle A_2 \varphi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, т. е. длины всех жордановых цепочек равны единице.

Теорема 4.6.1. *Пусть* $\alpha_2 \in \sigma(\Delta)$, *причем* $\alpha_2 \neq \alpha_1$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t, \bar{x}) \phi_{\alpha_2 i}(\bar{x}) d\bar{x} \in C(t \geq 0), \ i = 1, \ldots, d(\alpha_2),$$

тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t + u_2(\bar{x})\frac{t^2}{2} +$$

$$+\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\alpha_2}}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\lambda-\alpha_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\Bigg((t-\xi-\eta)+\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2}v_\lambda(\eta)\Bigg)y_{\lambda i}(\xi)d\eta d\xi\phi_{\lambda i}(\bar{x})-$$

$$-\frac{1}{k\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}\sum_{i=1}^{d(\alpha_2)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\Bigg(1+(t-\xi-\eta)v(\eta)\Bigg)y_{\alpha_2 i}(s)d\eta d\xi\phi_{\alpha_2 i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

где $v_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\lambda-\alpha_2}(k(\lambda-\lambda_1)+\gamma\lambda t-k\lambda^2\frac{t^2}{2})$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $\lambda\neq\alpha_2$, $v(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}(-\frac{\gamma}{k}+\alpha_2 t)$, *функция* $y_{\lambda i}(t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $i=1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$y_{\lambda i}(t) = \int\limits_\Omega\Bigg[f(t,\bar{x}) + \lambda\Bigg(k(\lambda-\lambda_1)+\gamma\lambda t-k\lambda^2\frac{t^2}{2}\Bigg)u_2(\bar{x}) +$$

$$+\lambda^2\Bigg(\gamma-k\lambda t\Bigg)u_1(\bar{x}) - k\lambda^3 u_0(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.6.2. *Пусть* $\alpha_2\in\sigma(\Delta)$, *причем* $\alpha_2\neq\alpha_1$ *и*

$$\int\limits_\Omega f(t,\bar{x})\phi_{\alpha_2 i}(\bar{x})d\bar{x}\in C^1(t\geq 0),\ i=1,\ldots,d(\alpha_2),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_\Omega\Bigg(f(0,\bar{x})-k\alpha_2^3u_0(\bar{x})+\gamma\alpha_2^2u_1(\bar{x})+k\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)u_2(\bar{x})\Bigg)\phi_{\alpha_2 i}(\bar{x})d\bar{x}=0,$$

$$i=1,\ldots,d(\alpha_2),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x})\in C^3(t\geq 0;\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.6.1.*

Когда $\alpha_2\notin\sigma(\Delta)$, *т. е. B непрерывно обратим из теорем вытекают следующие утверждения 1.4.2 и 1.4.3.*

Теорема 4.6.3. *Пусть* $\alpha_2\notin\sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t + u_2(\bar{x})\frac{t^2}{2} +$$

$$+\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\alpha_2}}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\lambda-\alpha_2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\left((t-\xi-\eta)+\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2}v_\lambda(\eta)\right)y_{\lambda i}(\xi)d\eta d\xi\phi_{\lambda i}(\bar{x}),$$

где $v_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\lambda}{\lambda-\alpha_2}(k(\lambda-\lambda_1)+\gamma\lambda t-k\lambda^2\frac{t^2}{2})$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, *функция* $y_{\lambda i}(t)$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$, $i=1,\ldots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$y_{\lambda i}(t)=\int\limits_\Omega\Bigg[f(t,\bar{x})+\lambda\left(k(\lambda-\lambda_1)+\gamma\lambda t-k\lambda^2\frac{t^2}{2}\right)u_2(\bar{x})+$$
$$+\lambda^2\Big(\gamma-k\lambda t\Big)u_1(\bar{x})-k\lambda^3u_0(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.6.4. *Пусть* $\alpha_2\notin\sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x})\in C(t\geq 0;\mathcal{L}_2(\Omega))$ *тогда, исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x})\in C^3(t\geq 0;\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.6.3.*

4.7 Колебания термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле

Следующая задача

$$\tau(\Delta-\alpha_3)u_{tttt}+(\Delta-\alpha_2)u_{ttt}-\Delta((\tau\gamma+k)\Delta-k\alpha_1)u_{tt}-$$
$$-\gamma\Delta^2u_t+k\Delta^3u=f(t,\bar{x}),\ t>0,\ \bar{x}\in\Omega,$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ u_t\big|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ u_{tt}\big|_{t=0}=u_2(\bar{x}),\ u_{ttt}\big|_{t=0}=u_3(\bar{x}),\ \bar{x}\in\Omega,$$

$$u\big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,$$

моделирует при $M=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ колебания термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле, распространяющемся по закону Каттанео–Вернотте [129, 137]. Заметим, что в случае равенства нулю так называемого релаксационного параметра τ рассматриваемое уравнение становится уравнением из примера 4.6.

Выбрав в качестве E_1 и E_2 пространства $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega)$ и $\mathcal{L}_2(\Omega)$ соответственно, а облатью определения операторных коэффициентов $\overset{\circ}{H}{}^{l+6}(\Omega)$, сведем данную задачу Коши–Дирихле к начальной задаче (1.4.1) при $N=4$

и $k(t) = \mathbb{O}$. Как следствия теорем 3.2.1, 3.2.2, 1.4.2 и 1.4.3 справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.7.1. *Пусть* $\alpha_3 \in \sigma(\Delta)$, *причем* $\alpha_3 \neq \alpha_2$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\alpha_3 i}(\bar{x})d\bar{x} \in C(t \geq 0),\ i = 1,\dots,d(\alpha_3),$$

тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t + u_2(\bar{x})\frac{t^2}{2} + u_2(\bar{x})\frac{t^3}{6} +$$
$$+ \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(\Delta)\\ \lambda\neq\alpha_3}} \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \frac{1}{\tau(\lambda-\alpha_3)} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\xi} \Bigg(\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2} +$$
$$+ \frac{(t-\xi-\eta)^3}{6} w_\lambda(\eta)\Bigg) z_{\lambda i}(\xi)d\eta d\xi \phi_{\lambda i}(\bar{x}) -$$
$$- \frac{1}{\alpha_3-\alpha_2} \sum_{i=1}^{d(\alpha_3)} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\xi} \Bigg((t-\xi-\eta) +$$
$$+ \frac{(t-\xi-\eta)^2}{2} w(\eta)\Bigg) z_{\alpha_3 i}(s)d\eta d\xi \phi_{\alpha_3 i}(\bar{x})\Bigg]\theta(t),$$

где $w_\lambda(t)$ — *резольвента ядра* $\frac{1}{\tau(\lambda-\alpha_3)}(\alpha_2 - \lambda + \chi_\lambda t + \gamma\lambda^2\frac{t^2}{2} - k\lambda^3\frac{t^3}{6})$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $\lambda \neq \alpha_3$, *причем* $\chi_\lambda = \lambda\big((\tau\gamma + k)\lambda - k\alpha_1\big)$, $w(t)$ — *резольвента ядра* $\frac{1}{\alpha_3-\alpha_2}(\chi_{\alpha_3} + \gamma\alpha_3^2 t - k\alpha_3^3\frac{t^2}{2})$, *функция* $z_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1,\dots,d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$z_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega}\Bigg[f(t,\bar{x}) + \Bigg(\alpha_2 - \lambda + \chi_\lambda t + \gamma\lambda^2\frac{t^2}{2} - k\lambda^3\frac{t^3}{6}\Bigg)u_3(\bar{x}) +$$
$$+ \Bigg(\chi_\lambda + \gamma\lambda^2 t - k\lambda^3\frac{t^2}{2}\Bigg)u_2(\bar{x}) + \lambda^2\Bigg(\gamma - k\lambda t\Bigg)u_1(\bar{x}) - k\lambda^3 u_0(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.7.2. *Пусть* $\alpha_3 \in \sigma(\Delta)$, *причем* $\alpha_3 \neq \alpha_2$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_{\alpha_3 i}(\bar{x})d\bar{x} \in C^1(t \geq 0),\ i = 1,\dots,d(\alpha_3),$$

тогда, если выполнены соотношения

$$\int\limits_{\Omega}\Big(f(0,\bar{x}) - k\alpha_3^3 u_0(\bar{x}) + \gamma\alpha_3^2 u_1(\bar{x}) + \chi_{\alpha_3} u_2(\bar{x}) +$$
$$+ (\alpha_2 - \alpha_3) u_3(\bar{x})\Big)\phi_{\alpha_3 i}(\bar{x})d\bar{x} = 0,\ i = 1, \ldots, d(\alpha_3),$$

то исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение $u(t,\bar{x}) \in C^4(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.7.1.*

Теорема 4.7.3. *Пусть* $\alpha_3 \notin \sigma(\Delta)$, *тогда исследуемая задача имеет единственное обобщенное решение*

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x})\theta(t) = \Bigg[u_0(\bar{x}) + u_1(\bar{x})t + u_2(\bar{x})\frac{t^2}{2} + u_2(\bar{x})\frac{t^3}{6} +$$
$$+ \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)}\sum_{i=1}^{d(\lambda)}\frac{1}{\tau(\lambda-\alpha_3)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\Big(\frac{(t-\xi-\eta)^2}{2} +$$
$$+ \frac{(t-\xi-\eta)^3}{6}w_\lambda(\eta)\Big)z_{\lambda i}(\xi)d\eta d\xi\phi_{\lambda i}(\bar{x})\Bigg]\,\theta(t)$$

где $w_\lambda(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{1}{\tau(\lambda-\alpha_3)}(\alpha_2 - \lambda + \chi_\lambda t + \gamma\lambda^2\frac{t^2}{2} - k\lambda^3\frac{t^3}{6})$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, *причем* $\chi_\lambda = \lambda\big((\tau\gamma + k)\lambda - k\alpha_1\big)$, *функция* $z_{\lambda i}(t)$, $\lambda \in \sigma(\Delta)$, $i = 1, \ldots, d(\lambda)$ *задается следующим образом:*

$$z_{\lambda i}(t) = \int\limits_{\Omega}\Bigg[f(t,\bar{x}) + \Big(\alpha_2 - \lambda + \chi_\lambda t + \gamma\lambda^2\frac{t^2}{2} - k\lambda^3\frac{t^3}{6}\Big)u_3(\bar{x}) +$$
$$+ \Big(\chi_\lambda + \gamma\lambda^2 t - k\lambda^3\frac{t^2}{2}\Big)u_2(\bar{x}) + \lambda^2\Big(\gamma - k\lambda t\Big)u_1(\bar{x}) - k\lambda^3 u_0(\bar{x})\Bigg]\phi_{\lambda i}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Теорема 4.7.4. *Пусть* $\alpha_3 \notin \sigma(\Delta)$ *и* $f(t,\bar{x}) \in C(t \geq 0; \mathcal{L}_2(\Omega))$ *тогда, исследуемая задача Коши–Дирихле имеет единственное решение* $u(t,\bar{x}) \in C^4(t \geq 0; \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$ *из теоремы 4.7.3.*

Литература

[1] Азизов Т. Я. Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Матем. заметки. — 1999 — Т. 65, № 6. — С. 924—928.

[2] Белов И. И. Задача Коши для линейных нагруженных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с вырожденной матрицей при производной / И. И. Белов // Краевые задачи. — Иркутск: Иркутский гос. университет, 1997. — С.99–102.

[3] Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1988. — 160 с.

[4] Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 233 с.

[5] Булатов М. В. Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной / М. В. Булатов // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 692–697.

[6] Булатов М. В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами / М. В. Булатов, Е. В. Чистякова // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1248–1255.

[7] Булатов М. В. Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М. В. Булатов, Е. В. Чистяко-

ва // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2011. — Т. 51, № 9. — С. 1665–1673.

[8] Бухгейм А. Л. Обратные задачи восстановления памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина // Докл. РАН. — 1997. — Т. 354, № 6. — С. 727–729.

[9] Бухгейм А. Л. Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина // Сиб. мат. журн. — 1997 — Т. 38, № 5. — С. 1018–1033.

[10] Бухгейм А. Л. Два метода в обратной задаче определения памяти / А. Л. Бухгейм, Н. И. Калинина, В. Б. Кардаков // Сиб. мат. журн. — 2000 — Т. 41, № 4. — С. 767–776.

[11] Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вайнберг // Итоги науки. Серия Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. — М.: ВИНИТИ, 1964. — С. 5–37.

[12] Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[13] Васильев В. В. Решение одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра / В. В. Васильев // Тр. Иркут. гос. университета. Сер. мат. — Т. 26. — Иркутск: Иркутский гос. университет, 1968. — С. 3–17.

[14] Васильев В. В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // Известия вузов. Математика. — 1961. — № 4. — С. 8–24.

[15] Васильев В. В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 100, № 5. — С. 849–852.

[16] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

[17] Власов В. В. Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // Докл. РАН. — 2010. — Т. 434, № 1. — С. 12–15.

[18] Власов В. В. Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. — Т. 39. — С. 36–65.

[19] Габов С. А. Новые задачи математической теории волн / С. А. Габов. — М.: Физматлит, 1998. — 448 с.

[20] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 338 с.

[21] Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, выпуск 1 / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.

[22] Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах / Е. Ю. Гражданцева // Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. ИГУ. — Иркутск, 2005. — 119 с.

[23] Далецкий Ю. М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. М. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 535 с.

[24] Демиденко Г. В. Уравнения и системы уравнений, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[25] Егоров И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

[26] Завалищин С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

[27] Замышляева А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А. А. Замышляева // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8, № 4. — С. 45–54.

[28] Замышляева А. А. Неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Деп. ВИНИТИ. — 1998. — № 2001-В98. — 33 с.

[29] Иванов В. К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков. — М.: Физматлит, 1995. — 384 с.

[30] Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — М.: Наука, 1970. — 280 с.

[31] Калашников А. С. Классы единственности для интегро-дифференциальных уравнений с операторами Вольтерра типа свертки / А. С. Калашников // Функциональный анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13, № 2. — С. 83–84.

[32] Кожанов А. И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А. И. Кожанов. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1990. — 130 с.

[33] Копачевский Н. Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций / Н. Д. Ко-

пачевский. — 2012. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О. А." — 152 с.

[34] Копачевский Н. Д. О спектральной задаче, связанной с интегро-дифференциальным уравнением второго порядка / Н. Д. Копачевский // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2003. — Т. 16, № 1. — С. 139–152.

[35] Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[36] Коробова О. В. Матричные фундаментальные оператор-функции вырожденных операторно-дифференциальных систем / О. В. Коробова // Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. ИГУ. — Иркутск, 2009. — 154 с.

[37] Крейн С. Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах / С. Г. Крейн, Н. И. Чернышев. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1979. — 18 с. (Препринт № 4)

[38] Крейн С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Доклады РАН. — 1997. — Т. 35, № 4. — С. 450–452.

[39] Лаврентьев М. М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода / М. М. Лаврентьев // Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков. — М.: Наука, 1972. — С. 130–136.

[40] Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. — Новосибирск: Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева, 2010. — 912 с.

[41] Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука. — 1973. — 576 с.

[42] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

[43] Логинов Б. В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. — Ташкент: ФАН, 1978. — С. 133–148.

[44] Магницкий Н. А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра 1 рода / Н. А. Магницкий // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 1. — С. 29–32.

[45] Орлов С. С. О разрешимости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с фредгольмовым оператором в главной части / С. С. Орлов // Изв. ИГУ. Математика. — 2012. — Т. 5, № 3. С. 73–93.

[46] Орлов С. С. Начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической теории упругости / С. С. Орлов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2011. — Т. 29, № 1. — С. 21–29.

[47] Орлов С. С. Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложения / С. С. Орлов // Изв. ИГУ. Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 54–60.

[48] Орлов С. С. Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах / С. С. Орлов // Изв. ИГУ. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 328–332.

[49] Орлов С. С. Фундаментальная оператор-функция сингулярного интегро-дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах / С. С. Орлов // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». — Нальчик: НИО КБНЦ РАН, 2009. — С. 296–298.

[50] Орлов С. С. Задача Коши–Дирихле для интегро-дифференциального уравнения вязко-упругости. Регулярный случай / С. С. Орлов // Труды VI Международной конференции студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». — Т. 2. — Томск: Изд-во ТПУ, 2009. — С. 625–628.

[51] Орлов С. С. Обобщенное и классическое решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения в банаховых пространствах / С. С. Орлов // Материалы Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики». — Томск: Изд-во ТГУ, 2010. — С. 154–157.

[52] Орлов С. С. Задача Коши–Дирихле для линейного интегро-дифференциального уравнения вязкоупругости / С. С. Орлов // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2009. — С. 40.

[53] Орлов С. С. Задача Коши для вырожденного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка в банаховых пространствах / С. С. Орлов // Материалы конференции «Ляпуновские чтения & презентации информационных технологий». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 34.

[54] Орлов С. С. Интегро-дифференциальное уравнение продольных колебаний вязко-упругого стержня: разрешимость начально-краевых задач и их точные решения / С. С. Орлов // Тру-

ды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Актуальные проблемы механики сплошных сред и небесной механики. — Томск: Изд-во ТГУ, 2012. — С. 123–126.

[55] Орлов С. С. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при старшей производной / С. С. Орлов // Тезисы докладов молодежной Международной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». — Новосибирск: Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, 2009. — С. 74.

[56] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта / А. П. Осколков // Труды МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

[57] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 366 с.

[58] Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I / А. И. Прилепко // Дифференц. уравн. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560–1571.

[59] Русак Ю. Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функции и сопряженной к ней / Ю. Б. Русак // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. — 1972. — № 2. — С. 15–19.

[60] Свешников А. Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов. — М.: Научный мир, 2008. — 400 с.

[61] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // УМН. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

[62] Сидоров Д. Н. О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров // Известия вузов. Математика. — 2013. — № 1. — С. 62–72.

[63] Сидоров Н. А. Об обобщенных решениях интегральных уравнений в задаче идентификации нелинейных динамических моделей / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 4. — С. 41–47.

[64] Сидоров Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 9. — С. 1516–1626.

[65] Сидоров Н. А. Об одном классе уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах / Н. А. Сидоров // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 21, № 2. — С. 202–203.

[66] Сидоров Н. А. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 308–318.

[67] Сидоров Н. А. Обобщенные решения дифференциального уравнения с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

[68] Сидоров Н. А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями / Н. А. Сидоров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1309–1316.

[69] Стахеева О. А. Разрешимость вырожденных линейных эволюционных уравнений с памятью / О. А. Стахеева // Тезисы докладов IV Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. — 2013. — М: Изд-во РУДН. — С. 247–248.

[70] Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Физматлит. — 2007. — 488 с.

[71] Трубин В. Г. Решение одного вырождающегося интегродифференциального уравнения / В. Г. Трубин // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Вып. 5. — Иркутск: Иркутский гос. университет, 1978. —С. 94–101.

[72] Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических систем / Е. И. Ушаков. — Новосибирск: Наука, 1988. — 273 с.

[73] Фалалеев М. В. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 286–297.

[74] Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы высоких порядков в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 11. — С. 68–79.

[75] Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. ИГУ. Математика. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 118–134.

[76] Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их прило-

жения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. — 2011. — Вып. 7, № 4. — С. 100–110.

[77] Фалалеев М. В. Вырожденные дифференциальные уравнения высоких порядков специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, А. В. Красник, С. С. Орлов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 126–139.

[78] Фалалеев М. В. Задача Коши–Дирихле для уравнения колебаний термоупругой плластины / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2010. — Т. 26, № 2. — С. 138–143.

[79] Фалалеев М. В. Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2010. — Т. 17, Вып. 4. — С. 597–600.

[80] Фалалеев М. В. Обобщенные функции и действия над ними: учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2011. — 108 с.

[81] Фалалеев М. В. Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Изв. ИГУ. Математика. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 126–132.

[82] Фалалеев М. В. Теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Дисс... док-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. ИГУ. — Иркутск, 2008. — 238 с.

[83] Фалалеев М. В. Фундаментальная оператор-функция вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах /

М. В. Фалалеев // Докл. РАН. — 2007. — Т. 416, № 6. — С. 745–749.

[84] Фалалеев М. В. О приложениях теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева, 2007. — С. 283–297.

[85] Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Известия вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

[86] Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 769–774.

[87] Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1393–1406.

[88] Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 5. — С. 1167–1182.

[89] Фалалеев М. В. Задача Коши для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Вестник ЧелГУ. Серия 3. Математика. Механика. Информатика. — 1999. — № 2. — С. 126–136.

[90] Федоров В. Е. О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева //

Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. — 2008. — Вып. 2, № 27. — С. 104–109.

[91] Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

[92] Чистякова Е. В. О свойствах разностных схем для вырожденных интегро-дифференциальных систем индекса 1 / Е. В. Чистякова // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1579–1588.

[93] Шароглазов В. С. К решению задачи Коши для линейных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с вырожденной матрицей при производной / В. С. Шароглазов // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск: Иркутский гос. университет, 1980. — С. 98–106.

[94] Шишкин Г. А. Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Г. А. Шишкин // Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Иркутский гос. ун-т им. А. А. Жданова. — Иркутск, 1972. — 134 с.

[95] Шкиль Н. И. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / Н. И. Шкиль, А. Н. Вороной, В. Н. Лейфура. — Киев: Вища школа, 1985. — 248 с.

[96] Янушаускас А. И. Граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения / А. И. Янушкаускас. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. университета, 1997. — 168 с.

[97] Arendt W. Integrated Solutions of Volterra Integrodifferential Equations and Applications / W. Arendt, H. Kellermann // Pitman Research Notes in Mathematics Series. — Vol. 190. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1989. — P. 21–51.

[98] Balachandran K. Controllability of Sobolev-Type Semilinear Integrodifferential Systems in Banach Spaces / K. Balachandran R. Sakthivel // Appl. Math. Lett. — 1999. — Vol. 12. — P. 63—71.

[99] Balachandran K. Nonlinear Integrodifferential Equation of Sobolev Type with Nonlocal conditions in Banach Spaces / K. Balachandran, D. G. Park, Y. C. Kwun // Comm. Korean Math. Soc. — 1999. — Vol. 14, № 1. — P. 223–231.

[100] Barbu V. Semilinear Integro-Differential Equations in Hilbert Space / V. Barbu, M. A. Malik // J. Math. Anal Appl. — 1979. — Vol. 67. — P. 452–475.

[101] Bisognin E. On Exponential Stability for Von Karman Equations in the Presence of Thermal Effects / E. Bisognin, V. Bisognin, G. Perla Menzala, E. Zuazua // Math. Meth. Appl. Sci. — 1998. — Vol. 21. — P. 393–416.

[102] Bloom F. Ill-Posed Problems for Integrodifferential Equations in Mechanics and Electromagnetic Theory / F. Bloom. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981. — 222 p.

[103] Bu S. Q. Solutions of Second Order Degenerate Integro-Differential Equations in Vector-Valued Function Spaces / S. Q. Bu, G. Cai // Sci. China Math. — 2013. — Vol. 56, № 5. — P. 1059–1072.

[104] Cavalcanti M. M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043–1053.

[105] Chen G. Semigroups and Integral Equations / G. Chen, R. C. Grimmer // J. Integral Equations. — 1980. — Vol. 2. — P. 133–154.

[106] Crandall M. G. An Abstract Nonlinear Volterra lntegrodifferential Equation / M. G. Crandall, S.-O. Londen, J. A. Nohel // J. Math. Anal Appl. — 1978. — Vol. 64. — P. 701–735.

[107] Da Prato G. Linear Integro-Differential Equations in Banach Spaces / G. Da Prato, M. Iannelli // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 62. — P. 207—219.

[108] Da Prato G. Linear Abstract Integro-Differential Equations of Hyperbolic Type in Hilbert Spaces / G. Da Prato, M. Iannelli // Rend. Sem. Mat. Padova. — 1980. — Vol. 62. — P. 191–206.

[109] Dolezal V. Dynamics of Linear Systems / V. Dolezal. — Prague: Academ. Publ., 1964. — 224 p.

[110] Falaleev M. V. Asymptotic Expansions of Continuous Solutions of System of Volterra Integral Equations of the First Kind / M. V. Falaleev // Computerized Tomography: Proceedings of the Fourth International Symposium, Novosibirsk, Russia, August 10–14, 1993. — Utrecht: VSP, 1995. — P. 155–157.

[111] Fattorini H. O. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces / H. O. Fattorini. — Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1985. — 328 p.

[112] Favini A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. — 313 p.

[113] Favini A. Singular Integro-Differential Equations of Parabolic Type / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Adv. Diff. Eqs. — 2002. — Vol. 7. — P. 769–798.

[114] Favini A. Identification Problem for Singular Integro-Differential Equatons of Parabolic Type I / A. Favini, A. Lorenzi // Dynamics of

Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. — 2005. — Vol. 12. — P. 303–328.

[115] Gao H. Class of Nonlinear Degenerate Integrodifferential Control Systems / H. Gao, P. Lei, B. Zhang // J. Control Optim. — 2004 — Vol. 43. — P. 986–1010.

[116] Grasselli M. An Inverse Hyperbolic Integrodifferential Problem Arising in Geophysics. I / M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi // Siberian Math. J. — 1992. — Vol. 33, № 3. — P. 415–426.

[117] Grimmer R. C. Resolvent Operators for Integral Equations in Banach Spaces / R. C. Grimmer // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 273. — P. 333–349.

[118] Guidetti D. Volterra Integrodifferential Equations of Parabolic Type of Higher Order in Time in L_p Spaces / D. Guidetti // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2000. — Vol. 103. — P. 65–111.

[119] Gurtin M. E. A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1968. — Vol. 31. — P. 113–126.

[120] Hannsgen K. B. The Resolvent Kernel of an Integrodifferential Equation in Hilbert Space / K. B. Hannsgen // SIAM J. Math. Anal. — 1976. — Vol. 7. — P. 481–490.

[121] Janno J. Global Existence for a Hyperbolic Integrodifferential Inverse Problem / J. Janno // Forum. Math. — 1996. — Vol. 8. — P. 303–317.

[122] Kabanihin S. I. Identification Problems of Wave Phenomena: Theory and Numerics / S. I. Kabanihin, A. Lorenzi. — Utrecht: VSP, 1999. — 342 p.

[123] Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov. — Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 1999. — 171 p.

[124] Lord M. E. Existence and Uniqueness of Sobolev Type Integrodifferential Equations / M. E. Lord // Appl. Math. Comp. — 1978. — Vol. 4. — P. 253–263.

[125] Lorenzi A. Fredholm-Type Results for Integro-Differential Identification Parabolic Problems / A. Lorenzi, A. I. Prilepko // Dif. Int. Eqs. — 1993. — Vol. 6. — P. 535–552.

[126] Lorenzi A. Global Existence Results for First-Ofder Integrodifferential Identification Problem / A. Lorenzi, A. I. Prilepko // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1996. — Vol. 96. — P. 51–84.

[127] Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 548 p.

[128] Miller R. K. Well-Posedness and Stability of Linear Volterra Integrodifferential Equations in Abstract Spaces / R. K. Miller, R. L. Wheeler // Funkcial. Ekvac. — 1978. — Vol. 21. — P. 279–305.

[129] Munoz Rivera J. E. Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates / J. E. Munoz Rivera, L. H. Fatori // Math. Meth. Appl. Sci. — 1998. — Vol. 21. — P. 797–821.

[130] Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications / M. Z. Nashed. — New York; San Francisco; London: Academic Press, 1976. — 1055 p.

[131] Oka H. Second Order Linear Volterra Equations Governed by a Sine Family / H. Oka // J. Int. Eqs Appl. — 1996. — Vol. 8. — P. 447–456.

[132] Oka H. Second Order Linear Volterra Integrodifferential Equations / H. Oka // Semigroup Forum. — 1996. — Vol. 53. — P. 25–43.

[133] Pandolfi L. The Controllability of the Gurtin–Pipkin Equations: a Cosine Operator Approach / L. Pandolfi // Appl. Math. Optim. — 2005. — Vol. 52. — P. 143–165.

[134] Ponce R. Bounded Solutions to Evolution Equations in Banach Spaces / R. Ponce // Ph. D. Mathematics. The University of Santiago, Chile (USACH). — Santiago, 2011. — 87 p.

[135] Prilepko A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — Bassel, New-York: Marcel Dekker Inc., 2000. — 709 p.

[136] Pyatkov S. G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S. G. Pyatkov. — Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002. — 216 p.

[137] Racke R. Asymptotic Behavior of Solutions in Linear 2- or 3-d Thermoelasticity with Second Sound / R. Racke // Quart. Appl. Math. — 2003. — Vol. 61. — P. 409–441.

[138] Sathya R. Controllability of Sobolev-Type Neutral Stochastic Mixed Integrodifferential Systems / R. Sathya, K. Balachandran // European J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 1, № 1. — p. 68–87.

[139] Sidorov N. A. Generalized Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind / N. A. Sidorov, M. V. Falaleev, D. N. Sidorov // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. — 2006. — Vol. 29, № 2. — P. 101–109.

[140] Strutt J. W. (Baron Rayleigh) The Theory of Sound, Two volumes: Vol. 1 / J. W. Strutt. — New York: Co Dover Publications, 1945. — 480 p.

[141] Showalter R. E. The Sobolev Equations I / R. E. Showalter // Appl. Anal. — 1975. — V. 5, № 1. — P. 15–22.

[142] Showalter R. E. The Sobolev Equations II / R. E. Showalter // Appl. Anal. — 1975. — V. 5, № 2. — P. 81–99.

[143] Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. — 216 p.