

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

На правах рукописи

МЕДВЕЖОНКОВ Дмитрий Сергеевич

**СИММЕТРИЧНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ
В ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И МОДЕЛИ
ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации
(в технике, экологии и экономике)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.т.н., проф. В.И. Зоркальцев

Иркутск – 2013

Содержание

Введение	3
Глава 1. Обзор по теории симметричной двойственности, моделям потокораспределения и алгоритмам внутренних точек	14
§1.1. Основы симметричной двойственности задач оптимизации	–
§1.2. Модели потокораспределения и задачи оптимизации	20
§1.3. Метод внутренних точек как способ расчета моделей	27
§1.4. Выводы по главе	30
Глава 2. Симметричная двойственность в задачах выпуклой опти- мизации с ограничениями-неравенствами	33
§2.1. Двойственность задач оптимизации со строго выпуклой диф- ференцируемой целевой функцией	–
§2.2. Обсуждение свойств двойственных задач оптимизации	47
Глава 3. Реализация и исследование вариантов алгоритмов внут- ренних точек	49
§3.1. Прямые алгоритмы внутренних точек	50
§3.2. Двойственные алгоритмы внутренних точек	55
§3.3. Численные эксперименты на задачах потокораспределения	60
§3.4. Расчеты на задачах проекции точки на политоп	73
Глава 4. Нелинейные модели потокораспределения в экономике и энергетике	81
§4.1. Модель гидравлической системы с автоматическими регулято- рами расхода	–
§4.2. Нелинейная транспортная модель (экономическая интерпрета- ция; варианты потокораспределения и тарифообразования)	89
§4.3. Нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях	102
Заключение	111
Список литературы	116
Приложение. Справка о внедрении	135

Введение

Актуальность проблемы

Математическое моделирование и методы оптимизации важны при поиске системных связей и закономерностей функционирования сложных систем, для повышения эффективности управления в технических, экономических, социальных системах. Современная теория оптимизации во многих случаях служит методической основой для выбора наилучших экономических и технических решений, средством математического моделирования, инструментом вычислительной математики. Весомый вклад в развитие теории и методов оптимизации внесли: А. Таккер, Л.В. Канторович, Дж. Данциг, Х. Кун, Г. Зойтендейк, Е.Г. Гольштейн, И.И. Еремин, В.П. Булатов, Б.Т. Поляк, Ф.П. Васильев, Н.З. Шор, Б.Н. Пшеничный, В.Ф. Демьянов, Ю.Г. Евтушенко, У. Зангвилл и многие другие. [7, 13, 14, 24, 33, 42, 109, 128, 136, 139, 142, 144, 145, 154, 157, 167, 174, 180].

Одним из важнейших разделов теории оптимизации является теория двойственности [7, 13, 39, 67, 112, 158, 184, 188]. Двойственные задачи оптимизации применяются для доказательства оптимальности полученного решения, для анализа его устойчивости к варьированию исходных данных, для содержательной интерпретации математических моделей, теоретического обоснования и разработки новых алгоритмов решения задач математического программирования.

Вид двойственной задачи оптимизации зависит от вида исходной задачи и правил формирования двойственной задачи. Случай, когда двойственная задача оптимизации к двойственной задаче совпадает с исходной, в математическом программировании называют *симметричной двойственностью*. Симметричная двойственность имеет место для задач линейного программирования. Двойственные задачи нелинейного программирования не обладают в общем случае свойством симметричной двойственности, хотя для некоторых типов задач нелинейной оптимизации симметричная двойствен-

ность имеет место. Например, в работах У. Дорна [152], Дж. Денниса [16], а также С.И. Зуховицкого, Л.И. Авдеевой [65] формулируются симметричные двойственные задачи квадратичного программирования. Симметричная двойственность задач оптимизации с целевой функцией, выпуклой по одному векторному аргументу и вогнутой по другому, исследовалась в работах Г. Данцига, Е. Эйзенберга, Р. Коттла [150], М. Базара, Дж. Гуди [134], Г. Дэви [151], Б. Монда, Т. Вейра [169, 170] и др.

Основное внимание в диссертации уделяется симметричной двойственности на важном во многих приложениях подклассе задач минимизации сепарабельной дифференцируемой строго выпуклой функции при линейных ограничениях в виде равенств и неравенств на значения отдельных переменных. Теоретической основой для симметричной двойственности на этом классе задач служит теория альтернативных систем линейных неравенств [10, 40, 116, 125, 146, 147] и преобразование Лежандра-Фенхеля [80, 111, 127, 153, 176], известное из выпуклого анализа. Указанный подкласс задач исследовался ранее в работах научного руководителя, причём рассматривались только ограничения-равенства и односторонние ограничения-неравенства на переменные [28, 31, 50–53]. Теоремы, доказываемые в диссертации, развивают существующие исследования на случай задач оптимизации с двусторонними ограничениями-неравенствами на отдельные переменные.

В качестве объекта приложения симметричных двойственных задач оптимизации в диссертации рассматриваются модели потокораспределения. Рассматриваемые модели можно разбить на два класса, различающиеся содержательной интерпретацией: гидравлические цепи и нелинейные транспортные модели (обобщающие линейные транспортные задачи).

В начале XX века в работах М.М. Андрияшева, В.Г. Лобачева, Х. Кросса [3, 79, 148] были предложены первые методы расчета гидравлических сетей. С середины 60-х годов XX в. начала формироваться (в рамках системных научных исследований) теория гидравлических цепей, обобщаю-

щая методы моделирования и оптимизации трубопроводных систем. Вклад в ее развитие внесли В.Я. Хасилев, А.П. Меренков, М.Г. Сухарев, А.Г. Евдокимов, А.Д. Тевяшев, С.В. Сумароков, Е.В. Сеннова, Н.Н. Новицкий и др. [20, 22, 73, 101, 102, 107, 114, 123, 132, 168, 185].

В кандидатской диссертации С.П. Епифанова [29] на базе теории симметричной двойственности исследовались модели потокораспределения в трубопроводных системах при наличии только ограничений-равенств на расходы среды. Использование фактов симметричной двойственности в [29] позволило доказать существование и единственность решения задач потокораспределения в различных постановках причем для класса функций (задающих зависимость потери давления от расхода по дуге), который существенно шире ранее использовавшегося в работах по гидравлическим цепям. При этом была расширена возможность выбора эффективных алгоритмов для расчета моделей; получена новая физическая интерпретация процесса потокораспределения.

В настоящей диссертации исследования моделей потокораспределения на базе теории симметричной двойственности развиваются и для случаев наличия ограничений-неравенств (в том числе двусторонних) на значения переменных. Это позволяет описывать гидравлические системы с наличием устройств регулирования расхода, которые широко распространены в трубопроводных системах. Можно надеяться, что указанные выше положительные эффекты от использования теорем симметричной двойственности можно получить и для моделей с регуляторами расхода.

В качестве объекта приложения теории симметричной двойственности в диссертации рассматриваются также нелинейные транспортные модели, в которых затраты на перевозки по отдельным дугам задаются в виде нелинейных функций от объемов перевозок. Во многих случаях такие модели более адекватны действительности, чем традиционно рассматриваемые линейные транспортные модели [15, 68–71, 117–119, 122, 135, 155,

160, 162, 165, 166]. Нелинейные транспортные модели исследовались с конца 40-х гг. XX в работах Р.Д. Даффина, Г. Биркхофа, Д. Диаза, Д. Денниса, Миллара, Г.Д. Минти, В.Н. Лившица, Р. Рокафеллара, Д. Бертсекаса, Л.Д. Попова, Е.А. Нурминского и других [8, 16, 75–78, 108, 129, 138, 141, 143, 177]. Одним из важных аспектов нелинейных транспортных моделей, рассматриваемых в диссертации является выбор альтернативы формирования тарифов на перевозки – по предельным или по средним затратам.

В диссертации подробно рассматривается одно из конкретных приложений транспортных моделей для исследования проблем обеспечения энергетической безопасности страны и её регионов. В качестве развития линейной модели оценки производственных возможностей отраслевых систем энергетики в экстремальных ситуациях, используемой в ИСЭМ СО РАН, в диссертации предлагается рассмотреть нелинейную транспортную модель с двусторонними ограничениями-неравенствами. Нелинейная целевая функция более адекватно описывает риски от использования на отдельных транспортных ветвях режимов повышенной (относительно нормы) нагрузки. Для улучшения существующей методики ранжирования «узких мест» представляется целесообразным использовать факты симметричной двойственности.

Для расчета моделей потокораспределения могут применяться различные алгоритмы [137, 140, 159, 163, 175, 183, 187], в том числе из имеющегося большого разнообразия методов выпуклого программирования. В диссертационной работе акцент сделан на сравнительных экспериментальных исследованиях вариантов алгоритмов внутренних точек из особого класса, в которых ограничения-неравенства на переменные учитываются путем введения квадратичной штрафной функции (с итеративно меняющимися весами) в целевую функцию вспомогательной задачи поиска направления улучшения решения. Пионерами в разработке этих алгоритмов были в СССР в 60 – 70-х гг. XX века С.М. Анцыз, И.И. Дикин, Ю.Г. Евтушенко, В.Г. Жадан, В.И. Зоркальцев [17, 18, 23, 24]. В СО РАН эти алгоритмы использова-

лись при реализации ряда моделей энергетики [19, 20, 44, 45, 49].

Повышенный интерес к алгоритмам внутренних точек во всем мире возник в 80-х годах прошлого века благодаря работам Л.Г. Хачияна, Д.Б. Юдина, Н. Кармаркара, А.С. Немировского, Ю.Е. Нестерова над полиномиальными методами. Эти работы послужили импульсом для появления большого числа публикаций, посвященных теоретическим и экспериментальным исследованиям алгоритмов внутренних точек. Весомый вклад в развитие алгоритмов внутренних точек внесли зарубежные ученые: И. Адлер, Р. Вандербей, М. Коджима, Г. Мак-Кормик, Р. Монтейро, Ш. Мицунно, М. Тодд, Т. Тсучия, А. Фиакко и др. [120, 133, 164, 174, 182].

Выбор исследуемого класса алгоритмов обусловлен тем, что в настоящее время является общепризнанной их высокая численная эффективность. К тому же эти алгоритмы для рассматриваемых задач потокораспределения выполняют роль обобщений хорошо зарекомендовавших себя при расчетах гидравлических цепей методов контурных расходов и узловых давлений.

Можно выделить два подмножества алгоритмов внутренних точек рассматриваемого класса: прямые и двойственные алгоритмы. Симметричная двойственность имеет принципиальное значение для двойственных алгоритмов внутренних точек; без этого свойства их использование было бы невозможным. Частным случаем рассматриваемых алгоритмов являются известные *affine scaling method* [133, 182] и *dual affine scaling method* для решения задач линейного программирования.

К настоящему времени получен ряд важных результатов в усовершенствовании и теоретическом обосновании алгоритмов внутренних точек, в том числе в работах [48, 58, 59]. В этих работах на задачах линейного программирования была доказана сходимость для семейства алгоритмов, различающихся правилами задания весовых коэффициентов. Имеет место недостаток экспериментальных исследований алгоритмов из этого семейства с различными способами задания весовых коэффициентов, особенно для задач выпуклой

оптимизации. Одной из задач диссертации являются экспериментальные исследования с целью сопоставления прямых и двойственных алгоритмов, выявления их свойств, выбора наиболее эффективных вариантов реализации.

Цели исследований диссертации. Диссертация посвящена совершенствованию методов системного анализа сложных систем для повышения эффективности их функционирования. Исследования, представленные в диссертации, преследовали следующие три взаимосвязанные цели:

1) исследовать возможности развития и применения симметричной двойственности в оптимизации для задач выпуклого программирования с сепарабельной целевой функцией и линейными ограничениями – равенствами и неравенствами, в том числе двусторонними;

2) на базе теории симметричной двойственности исследовать свойства нелинейных моделей потокораспределения с ограничениями-неравенствами;

3) провести сравнительные экспериментальные исследования вариантов прямых и двойственных алгоритмов внутренних точек на моделях потокораспределения.

Объектом исследования являются задачи оптимизации с выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями, алгоритмы внутренних точек, модели технических и экономических систем потокораспределения.

Предметом исследования является развитие теории симметричной двойственности, выявление новых свойств моделей потокораспределения и экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек.

Методы и инструменты исследования базируются на методологии математического моделирования, теории и методах оптимизации, выпуклом анализе, теории графов, линейной алгебре. Для реализации итерационных численных алгоритмов использованы языки программирования C и C++, также проведены расчеты в математических пакетах Maple и Matlab.

Основные результаты, выносимые на защиту

1) Доказана эквивалентность симметричных двойственных задач минимизации сепарабельной выпуклой функции при линейных ограничениях, включающих двусторонние ограничения на переменные. Получены условия существования и единственности решения симметричных двойственных задач. Сформулированы и обоснованы условия оптимальности в виде системы нелинейных уравнений и неравенств с использованием условий равенства нулю кусочно-линейных функций-срезок вместо билинейных ограничений дополняющей нежёсткости.

2) На основе теории симметричной двойственности получена содержательная интерпретация нелинейных моделей потокораспределения с двусторонними ограничениями на переменные. Разработана нелинейная модель оценки возможностей функционирования в чрезвычайных ситуациях Единых систем газо- или нефтеснабжения. Для этой модели даны рекомендации по использованию двойственных оценок при ранжировании «узких» мест сети.

3) Предложены эффективные способы выбора параметров в программно реализованных вариантах прямых и двойственных алгоритмов внутренних точек. На задачах потокораспределения показано преимущество линейных весовых коэффициентов, учитывающих множители Лагранжа, перед традиционными квадратичными. Установлено, что двойственные алгоритмы приводят к оптимальным решениям исходной задачи быстрее, чем прямые.

Научная новизна. Формулировки симметричных двойственных задач оптимизации рассматриваемого в диссертации класса и доказательство эквивалентности этих задач являются новыми. Они распространяют существующую теорию симметричной двойственности на случай наличия двусторонних ограничений-неравенств на переменные. Получен и обоснован новый, удобный для различных приложений вид условий оптимальности для

таких задач.

Предложена новая нелинейная модель оценки возможностей Единой системы газоснабжения (ЕСГ) или Единой системы нефтеснабжения (ЕСН) в чрезвычайных ситуациях, являющаяся развитием существующей в ИСЭМ СО РАН линейной модели. Для предложенной модели даны рекомендации по использованию двойственных оценок для более детального ранжирования «узких» мест транспортной сети, что является новым в работах по исследованию живучести ЕСГ и ЕСН. Предложены новые интерпретации постановок нелинейных транспортных задач на базе теории симметричной двойственности.

Впервые проведены вычислительные эксперименты для особого типа алгоритмов внутренних точек на рассматриваемом в диссертации классе задач оптимизации. Исследования позволили выявить новые свойства алгоритмов, в частности преимущество двойственного алгоритма внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами, учитывающими множители Лагранжа, на рассматриваемом классе задач.

Практическая значимость

1) Нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях использована в исследованиях проблем энергетической безопасности, которые включают анализ последствий реализации возможных возмущений в системах энергетики, а также выявление слабых мест в системе топливо- и энергоснабжения потребителей. Полученные на основе теории симметричной двойственности оценки дают дополнительную информацию о потокораспределении, необходимую для более детального анализа живучести систем энергетики в чрезвычайных ситуациях.

2) Разработанный программный модуль, реализующий алгоритм внутренних точек для расчета нелинейной модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях, внедрен в программный комплекс «Нефть и газ России» (ИСЭМ СО РАН).

3) Распространение теории симметричной двойственности на класс задач оптимизации с ограничениями-неравенствами позволяет описывать с их помощью гидравлические системы с автоматическими регуляторами расхода. Для модели такой системы с учетом свойств разреженности матрицы инцидентий выполнена программная реализация двойственного алгоритма внутренних точек, дающая выигрыш в скорости счета по сравнению с некоторыми коммерческими решателями.

4) Разработана программная среда EasyLink, позволяющая визуализировать процесс задания исходных данных модели потокораспределения.

5) Материалы диссертации используются в спецкурсе «Сетевые модели экономики и энергетики», читаемом студентам ИМЭИ ИГУ.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 05.13.01 в диссертации проведено развитие теории симметричной двойственности в оптимизации; выполнена формализация и постановка задач потокораспределения; усовершенствованы критерии оценки эффективности решения задач оптимизации для исследования энергетической безопасности; разработано специальное математическое и программное обеспечение для решения этих задач, а также для визуализации исходных данных (пп. 1–3, 5, 12 области исследований).

Достоверность научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, а также проверкой исследуемых идей, моделей и алгоритмов на тестовых, модельных и прикладных задачах энергетики.

Апробация работы

Исследования по теме диссертации выполнялись в рамках проектов РФФИ №05-01-00587а, №09-01-00306-а, РГНФ №06-02-00266а. Доклады-вались и обсуждались на 22 конференциях, из них: 5 международных и 7 всероссийских. В том числе: на научно-теор. конференциях молодых ученых

ИГУ (2006, 2007); на XXXVI–XXXXI конференциях научной молодежи ИСЭМ СО РАН (2006–2011); на Межвуз. конф. «Математика и проблемы ее преподав. в вузе» (2007, Иркутск, ИГПУ); на IX Школе-семинаре молодых ученых "Мат. моделир. и инф. технологии" (2007, Иркутск, Ангасолка, оз. Байкал); на III и IV Всеросс. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (2006, 2009, Омск, Омский филиал ИМ СО РАН); на Российской конф. "Дискретная оптимизация и исследование операций" (2007, Владивосток, ИМ СО РАН, ИАПУ ДВО РАН); на международной научно-практ. конф. «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления» (2009, Алматы, Казахстан); на II Междунар. школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (2010, Иркутск, ИДСТУ СО РАН); Всеросс. научн. семинаре с междунар. участием «Математические модели и методы анализа и оптимальн. синтеза развивающ. трубопроводных и гидравлич. систем» (2010, Ялта, Украина); на XIV Всеросс. конф. «Мат. программир. и прилож.» (2011, ИММ УрО РАН, Екатеринбург); на Российско-Монгольской конф. мол. ученых по мат. моделир., вычисл.-инфор-мац. технологиям и управлению (2011, Ханх, Монголия); на XIV и XV Байкальской междунар. школе-семинаре «Методы оптимиз. и их приложения» (2008, Северобайк.; 2011, п. Листвянка, оз. Байкал). Работа обсуждалась на семинарах в научных институтах: на совместном заседании секций «Специализир. системы энергетики» и «Прикл. математика и информатика» ИСЭМ СО РАН (2010, Иркутск); на совм. заседании семинаров «Мат. экономика» и «Модели экономич. систем с иерархией в управлении» ИМ СО РАН (2011, Новосибирск); на объединенном семинаре ИВМиМГ и кафедры выч. математики НГУ (2011, Новосибирск); на семинаре Отделения методов управления и исследования операций ИДСТУ СО РАН (2011, 2013, Иркутск).

Публикации

Результаты опубликованы в 31 печатной работе [30, 32, 54–57, 60–64, 81–100]. Из этих работ 18 статей, в том числе: 5 статей в реферируемых

журналах из списка ВАК [32, 56, 64, 92, 100], 1 статья [62] в зарубежном журнале. В числе публикаций 6 текстов докладов [55, 57, 63, 95, 98, 99] в материалах международных конференций.

Личный вклад автора. Все основные научные результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно и не нарушают авторских прав других лиц. Из совместных публикаций с В.И. Зоркальцевым, С.П. Епифановым, С.М. Пержабинским в диссертационную работу включены результаты, не затрагивающие интересы соавторов. А.В. Еделев осуществлял консультирование и помощь с внедрением нелинейной модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 135 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, который содержит 188 наименований, и приложения. В диссертации содержится 7 рисунков, 16 таблиц.

Глава 1. Обзор по теории симметричной двойственности, моделям потокораспределения и алгоритмам внутренних точек

§1.1. Основы симметричной двойственности задач оптимизации

Для широкого класса задач оптимизации применяются особые конструкции – двойственные задачи оптимизации, вид которых зависит от вида исходной задачи и правил формирования двойственной задачи. Случай, когда двойственная задача к двойственной совпадает с исходной называют *симметричной двойственностью*. Подобный термин в используемом в диссертации смысле был введен в работе У. Дорна [152].

В диссертации сформулированы и доказаны теоремы, обосновывающие симметричную двойственность задач выпуклого программирования с линейными ограничениями, в том числе с двусторонними неравенствами на значения переменных. Эти теоремы развивают исследования, начатые в работах [28, 29, 31, 50–53]. Для доказательства теорем симметричной двойственности и исследования свойств задач оптимизации используются факты теории альтернативных систем линейных неравенств и свойства преобразования Лежандра-Фенхеля.

Теория альтернативных систем линейных неравенств

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств лежат в основе теории математического программирования. На них базируется теория двойственности линейной оптимизации, которая, в свою очередь, является основой широкого класса задач нелинейной оптимизации. Эти теоремы имеют и другие важные приложения. В частности, они используются при идентификации несовместности системы линейных неравенств; для конструирования новых алгоритмов решения систем линейных и, на базе этого, нелинейных систем неравенств; для выявления избыточных ограничений в задачах оптимизации; для получения решений систем линей-

ных неравенств с минимальным набором активных ограничений [116].

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств утверждают, что системе линейных неравенств можно поставить в соответствие (по некоторым правилам) альтернативную систему линейных неравенств. Альтернативность состоит в том, что одна и только одна из этих двух систем будет иметь решение, а вторая обязательно будет иметь противоречивые условия. При этом имеет место симметрия систем: альтернативная к альтернативной системе совпадает с исходной системой.

Существует много внешне сильно различающихся математических формулировок теорем, применяемых к разным типам систем линейных неравенств. Варианты теорем об альтернативных системах линейных неравенств связывают с именами разных математиков.

Вклад в развитие теории альтернативных систем линейных неравенств внесли работы П. Гордана, Г. Минковского, Г. Фаркаша, Д. Гейла [10], С.Н. Черникова [125], И.И. Еремина [40], Н.Н. Астафьева [33], К.Г. Бройдена [147, 146], А.И. Голикова, Ю.Г. Евтушенко [12], В.И. Зоркальцева [116] и других.

Симметричная двойственность в линейном программировании

Простым и наглядным примером задач оптимизации, в которых наблюдается симметричная двойственность, являются задачи линейного программирования (ЛП). Любой задаче ЛП можно поставить в соответствие (по определенным правилам) *двойственную* задачу ЛП, причем двойственная задача к двойственной будет совпадать с исходной задачей.

Одним из первых идею двойственности в задачах ЛП исследовал Л.В. Канторович. Развивая методы решения транспортной задачи, он еще в 1940 предложил метод разрешающих множителей, который можно рассматривать как идейную основу известного симплекс-метода, предложенного в 1947 г. Дж. Данцигом [15]. Развивая теорию и методы ЛП для реше-

ния задач экономики и производства, Л. В. Канторович ввел «двойственные оценки» ресурсов [71] (сам он называл их «объективно обусловленными оценками»), показывающие степень ценности этих ресурсов для общества. В своих работах Л.В. Канторович развил идею о том, что каждое оптимальное производственное и управленческое решение взаимосвязано с оптимальной системой цен, заданных двойственными оценками.

В работах И.И. Еремина исследовались постановки несобственных двойственных задач линейного программирования [34, 35], а также симметричных двойственных задач последовательного линейного программирования [36]. Перенос симметричной двойственности на ситуацию парето-лексикографических задач оптимизации, в частности в предположениях несобственности, реализован в работах [37–39].

Идеи и факты теории симметричной двойственности ЛП используются в диссертации для построения симметричной двойственности задач оптимизации выпуклых функций при линейных ограничениях, в том числе двусторонних ограничениях-неравенствах на переменные.

Симметричная двойственность в нелинейном программировании

Работа Дж. Денниса [16] посвящена обсуждению аналогий между теорией электрических цепей и математическим программированием, в ней дана физическая интерпретация задач потокораспределения. В этой работе формулируются симметричные двойственные задачи квадратичного программирования с использованием преобразования Лежандра, обладающие свойством симметричной двойственности.

В книге С.И. Зуховицкого, Л.И. Авдеевой [65] излагаются методы и задачи линейного и выпуклого программирования, формулируются симметричные двойственные задачи линейного и квадратичного программирования с использованием преобразования Лежандра.

Симметричная двойственность для задач оптимизации вещественной

функции $f(x, y)$, выпуклой по вектору переменных x и вогнутой по вектору переменных y формулируется в работах Г. Данцига, Е. Эйзенберга, и Р. Коттла [150], а также Б. Монда [169]. Обобщение результатов Г. Данцига и др. выполнено в работах М. Базараа и Дж. Гуди [134], а также Г. Дэви [151]. Б. Монд и Т. Вейр в статье [170] сформулировали постановки симметричных двойственных задач с псевдовыпуклой–псевдовогнутой целевой функцией.

В работах В.И. Зоркальцева [50–53] для задач оптимизации с целевыми функциями из специально введенного класса функций и линейными ограничениями были предложены формулировки двойственных задач, обладающие свойством симметричной двойственности. В работах [28, 29, 31, 51, 52] приводятся доказательства теорем симметричной двойственности для задач с ограничениями-равенствами, а также односторонними ограничениями-неравенствами.

Преобразование Лежандра-Фенхеля

В теории оптимизации важную роль играют свойства выпуклости функций и множеств. Значительный прогресс в развитии методов оптимизации инициировала теория, получившая название «выпуклый анализ» (после работ В. Фенхеля [153] и Р. Рокафеллара [111]). В выпуклом анализе существенную роль играет преобразование Лежандра-Фенхеля.

Определение. Преобразованием Лежандра-Фенхеля выпуклой функции одного вещественного аргумента $F : R \rightarrow R$ называется функция:

$$\Phi(y) = \sup \{yx - F(x) : x \in R\}. \quad (1)$$

Отметим, что преобразование Лежандра-Фенхеля еще называют преобразованием Фенхеля [144], Лежандра-Юнга-Фенхеля [2, 80]. Функцию $\Phi(y)$ также называют сопряженной с $F(x)$ [109, 111, 127, 176].

В случае, когда вещественная функция F одного вещественного аргу-

мента является строго выпуклой и дважды дифференцируемой, преобразование Лежандра-Фенхеля этой функции совпадает с классическим *преобразованием Лежандра*, задаваемым формулой:

$$\Phi(y) = y\varphi(y) - F(\varphi(y)),$$

где $\varphi(y)$ – функция обратная к функции $f(x)$, которая обозначает производную $F(x)$.

Преобразование Лежандра получило своё название в честь французского математика Адриена-Мари Лежандра (1752–1833). Идея, которую хотел реализовать Лежандр, заключается в том, чтобы с помощью преобразования получить из исходной функции такую, что производные исходной и полученной функций были бы взаимно обратны.

Из определения следует, что для того, чтобы функция $F(x)$ допускала преобразование Лежандра необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой в области определения и чтобы её производная функция $f(x)$ имела обратную. Последнее имеет место, если функция $f(x)$ является взаимно однозначной (биекцией).

Преобразование Лежандра-Фенхеля, в отличие от преобразования Лежандра, может применяться к нестрого выпуклым функциям и к выпуклым функциям, имеющим точки недифференцируемости.

Свойства преобразования Лежандра-Фенхеля

Приведем некоторые известные свойства преобразования Лежандра-Фенхеля, которые будут использоваться в диссертации для доказательства теорем симметричной двойственности и для исследования свойств моделей потокораспределения.

1. *Неравенство Фенхеля-Юнга* [80, 111]. Для выпуклой функции $F(x)$ и её преобразования Лежандра-Фенхеля $\Phi(y)$ при любых x и y справедливо неравенство:

$$F(x) + \Phi(y) \geq xy. \quad (2)$$

Это неравенство, в случае строго выпуклой дифференцируемой $F(x)$, можно заменить парой условий [52]:

$$F(x) + \Phi(y) = xy, \text{ если } y = f(x),$$

$$F(x) + \Phi(y) > xy, \text{ если } y \neq f(x), \text{ где } f(x) \text{ – производная } F(x).$$

2. Функцию $F : X \rightarrow R$, $X \subset R$ называют *полунепрерывной снизу*, если для любого $\gamma \in R$ множество Лебега $X_\gamma = \{x \in X : F(x) \leq \gamma\}$ замкнуто.

Преобразование Лежандра-Фенхеля всегда является выпуклой полунепрерывной снизу функцией [111].

3. Результат применения преобразования Лежандра-Фенхеля к исходной функции дважды называется *повторным* преобразованием Лежандра-Фенхеля. Его обозначают $F^{**}(x)$.

Теорема Фенхеля-Моро [67, 80]. Для того, чтобы повторное преобразование Лежандра-Фенхеля $F^{**}(x)$ было тождественно исходной функции $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ была выпукла и полунепрерывна снизу.

Некоторые области применения преобразования Лежандра-Фенхеля

Преобразование Лежандра и преобразование Лежандра-Фенхеля имеют ряд применений в математике:

1) в теории дифференциальных уравнений для более простого интегрирования некоторых классов дифференциальных уравнений [5, 74],

2) в дифференциальной геометрии к кривым и поверхностям для построения огибающих их семейств касательных [6, 21],

3) в вариационном исчислении для перехода от системы уравнений Эйлера – Лагранжа к системе уравнений Гамильтона [4, 2],

4) в математическом программировании для построения двойственных экстремальных формулировок задач [16, 29, 50–53, 65].

В физике преобразование Лежандра применяется:

1) в термодинамике для перехода между термодинамическими потенциалами [11, 82],

2) в классической механике для перехода от Лагранжевой механики к Гамильтоновой и обратно [4].

Во второй главе данной диссертации преобразование Лежандра-Фенхеля используется при построении двойственных задач оптимизации с выпуклыми сепарабельными целевыми функциями и линейными ограничениями равенствами и неравенствами. Преобразование Лежандра-Фенхеля помогает получить в явном виде целевую функцию двойственной задачи.

§1.2. Модели потокораспределения и задачи оптимизации

Модели потокораспределения играют значительную роль при проектировании, построении сложных технических систем (в том числе транспортных системам) и оперативном управлении ими. Задачи и методы оптимизации служат инструментом для описания моделей потокораспределения. Развитие теории симметричной двойственности расширяет возможности описания и исследования таких систем. В данном параграфе выполнен обзор исследований различных авторов, посвященных изучению моделей потокораспределения.

Электрические и гидравлические цепи

К одним из первых моделей потокораспределения можно отнести модели в виде систем уравнений, описывающие распространение тока в электрической цепи и распределения жидкости в гидравлической системе. Физические основы электрических цепей были заложены в работах Г. Ома, Г. Кирхгофа, Д. Максвелла в XIX в. Первые методы расчета задач потокораспределения в гидравлической системе, основанные на решении системы нелинейных алгебраических уравнений, появились в 1930-х годах в работах М.М. Андрияшева [3], В.Г. Лобачева [79] и Х. Кросса [148].

Начиная с 1960-х годов в работах В.Я. Хасилева, А.П. Меренкова, М.Г. Сухарева были заложены основы теории гидравлических цепей [101], в которой рассматриваются модели и методы решения, связанные с произвольными трубопроводными и гидравлическими системами. Моделирование потокораспределения в трубопроводных системах основано на аналогах физических законов для электрических цепей. Поэтому при расчетах трубопроводных систем и электрических цепей используются общие методы их расчета. Значительную роль в развитии теории гидравлических цепей сыграли сотрудники Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (ранее СЭИ СО РАН).

Большой вклад в исследование гидравлических систем и разработку методов решения задач потокораспределения внесли: В.Я. Хасилев, А.П. Меренков [101, 102, 123], С.В. Сумароков, М.Г. Сухарев, А.Г. Евдокимов, А.Д. Тевяшев [22], Б.Н. Пшеничный, Б.М. Каганович, Е.В. Сеннова, В.Г. Сидлер [114], Н.Н. Новицкий [107], А.Г. Коваленко [73] и многие другие.

В работах С.П. Епифанова и В.И. Зоркальцева [28, 29, 50, 53] исследовались модели потокораспределения с линейными ограничениями-равенствами с помощью теории симметричной двойственности. Исходная задача оптимизации, используемая для описания модели потокораспределения гидравлической системы в [29], имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n F_j(x_j) - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4)$$

Здесь переменные составляют вектор $\mathbf{x} \in R^n$; задана матрица \mathbf{A} размера $m \times n$ и векторы $\mathbf{b} \in R^m$, $\mathbf{c} \in R^n$. Для $j = 1, \dots, n$ задан набор функций $F_j \in Z$, где Z – множество непрерывно дифференцируемых функций действительного аргумента, причем любая функция F_j из Z удовлетворяет условиям:

$$1) F_j(0) = 0 \text{ и } F_j'(0) = 0,$$

$$2) F'_j(\alpha) > F'_j(\beta), \text{ если } \alpha > \beta,$$

$$3) F'_j(\alpha) \rightarrow -\infty, \text{ если } \alpha \rightarrow -\infty \text{ и } F'_j(\alpha) \rightarrow +\infty, \text{ если } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Двойственная задача оптимизации в [29] имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n \Phi_j(y_j) - \mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}. \quad (6)$$

Здесь переменные составляют векторы $\mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$. Для $j = 1, \dots, n$ задан набор функций Φ_j из множества Z . Каждая функция Φ_j связана с функцией F_j преобразованием Лежандра-Фенхеля. В [29] обосновывается симметричная двойственность задач (3)–(4) и (5)–(6).

В упомянутых работах не проводились исследования моделей потокораспределения на базе симметричных двойственных задач с двусторонними ограничениями-неравенствами на переменные. Подобные задачи важны, они позволяют описывать гидравлические системы с наличием автоматических регуляторов. Исследования подобных систем до настоящего времени велись на базе моделей, построенных с использованием систем уравнений и неравенств [20, 107, 114, 123].

Линейные и нелинейные модели потокораспределения

Модели потокораспределения – достаточно универсальный класс моделей. С его помощью можно описать, кроме физических систем, также транспортные системы, возникающие в задачах экономики.

Первые постановки транспортных задач в экономике обычно связывают с работами А.Н. Толстого [117 – 119]. В [117] дается описание транспортной задачи, возникающей при планировании железнодорожных перевозок грузов между источниками и пунктами назначения. Там же предложено несколько подходов к решению, полученный в статье план перевозок действительно являлся оптимальным, однако строгих теорем и доказа-

тельств этого факта получено не было.

В 1941 г. Ф. Хичкоком была дана [162] оптимизационная постановка транспортной задачи, однако методы её решения не были предложены.

Серьезная попытка разработать математически обоснованные методы для широкого класса практических задач в экономике, в том числе транспортных, была сделана Л.В. Канторовичем в конце 1930-х годов. Транспортная задача рассматривалась им как оптимизационная. В работе [68] Канторовича с М. К. Гавуриным были в развернутой форме даны эффективные методы решения транспортной задачи.

Двойственные оценки получили различное толкование в работах самого Л.В. Канторовича [71] и западных ученых. Если в западной литературе наиболее популярны так называемые «теневые цены» на ресурсы, то Л.В. Канторович использовал понятие «объективно обусловленных оценок».

За рубежом первыми сформулировали задачу о максимальном потоке Т.Харрис и Ф.Росс [160]. Интерес Харриса и Росса, в этой работе, засекреченной до 1999 года Министерством ВВС США, заключался в поиске мест с наименьшей пропускной способностью с целью наиболее эффективного поражения сети железнодорожного сообщения вероятного противника.

В [166] под редакцией Тьялинга Купманса опубликованы труды конференции, посвященной вопросам оптимального использования транспортных систем. В [166] Купманс приводит транспортную модель. В статье [143] Г. Биркгоф и Дж. Диаз впервые предлагают использовать релаксационные методы для решения выпуклых задач оптимизации на сетях.

Комбинаторные методы решения целочисленных задач о потоках в сетях рассмотрены в книге Форда и Фалкерсона [155]. Авторы делают упор на линейные постановки задач о потоке в сети и среди них лишь на те, для которых из предположения о исходных данных вытекает существование и целочисленного решения.

В книге Т. Рокафеллара [177], посвященной моделям потокораспреде-

ления и задачам монотропного программирования (так автор назвал задачи оптимизации с выпуклой сепарабельной целевой функцией и линейными ограничениями), приводится обширный обзор особенностей потоковых задач: как линейных, так и нелинейных. Также в книге рассматриваются алгоритмы решения задач потокораспределения с линейными, а также с выпуклыми возможно недифференцируемыми целевыми функциями. Изучаются вопросы двойственности задач оптимизации, и ставится задача транспортного равновесия.

Исследованием нелинейных транспортных задач в нашей стране занимался В.Н. Лившиц. В ряде публикаций [8, 75 – 78] им и группой соавторов были рассмотрены вопросы моделирования, развития магистральной транспортной сети, алгоритмы оптимального распределения потоков на сети, модели системного прогнозирования перевозок, вопросы эффективности капитальных вложений на транспорте, проблемы государственного регулирования естественных монополий, вопросы реформирования железнодорожного транспорта. Лившиц, однако, не рассматривал двойственные постановки нелинейных транспортных задач.

В монографии Д. Бертсекаса [141] дан обзор задач «сетевой оптимизации» и методов их решения. В ней автор рассматривает задачи о потоке минимальной стоимости с линейной целевой функцией, одно- и многопродуктовые задачи потокораспределения с выпуклой целевой функцией (без требования строгой выпуклости) и класс дискретных задач оптимизации на сети. Предлагаются алгоритмы «аукциона», которые в процессе решения на любой итерации могут ухудшить значение как исходной, так и двойственной целевой функции, но в конце находят оптимальное решение исходной задачи и основывается на понятии приближенной дополняющей нежесткости.

В [106, 110] описываются модели (на основе задач линейного программирования), которые позволяют оценить величины дефицита газа, возникшего у отдельных потребителей в случае возможной реализации

крупномасштабного негативного возмущения в работе Единой системы газоснабжения (ЕСГ) или нефтеснабжения (ЕСН). В [113] исследуются вопросы определения и ранжирования «узких» места транспортной подсистемы, с целью выбора оптимального плана выхода из чрезвычайной ситуации. Газовый блок ПВК "Нефть и газ России", разработанный в ИСЭМ СО РАН [27], решает задачу нахождения максимального потока ресурса газовой сети при возможной минимизации стоимости этого потока. Для определения «узких» мест, ограничивающие возможности системы по удовлетворению потребителей требуемым ресурсом, а также ранжирования этих мест по значимости их влияния на работу системы, либо по приоритетности проведения мероприятий для рационального повышения производственных возможностей системы в [113] предлагается задача линейного программирования:

$$\sum_{(i,j)} (C_{ij}q_{ij} + A_{ij}y_{ij}) \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$h_{ij} = q_{ij} + y_{ij}, \quad (8)$$

$$\sum_{i \in N_j^+} h_{ij} - \sum_{i \in N_j^-} h_{ji} = \begin{cases} -v, & j = O, \\ 0, & j \neq O, j \neq S, \\ v, & j = S, \end{cases} \quad (9)$$

$$0 \leq q_{ij} \leq d_{ij} - x_{ij}, \quad (10)$$

$$0 \leq y_{ij} \leq Y_{ij}, \quad (11)$$

где v – величина суммарного дефицита ресурса у потребителей; d_{ij} – ограничение на поток по дуге (i, j) ; h_{ij} – приращение потока по дуге (i, j) ; q_{ij} – приращение потока по дуге (i, j) до d_{ij} ; y_{ij} – приращение пропускной способности (i, j) свыше d_{ij} ; Y_{ij} – ограничение на приращение пропускной способности по дуге (i, j) свыше d_{ij} ; C_{ij} – цена или удельные затраты на транспорт энергоресурса по дуге (i, j) в пределах d_{ij} ; A_{ij} – цена или удель-

ные затраты на транспорт энергоресурса по приращению y_{ij} ; N_j^+ – подмножество "входящих" в узел j дуг; N_j^- – подмножество "выходящих" дуг из узла j ; O – суммарный источник; S – суммарный сток; x_{ij} – значение потока по дуге (i, j) , полученное при решении задачи нахождения максимального потока минимальной стоимости.

Задача (7)–(11) позволяет оценить каким образом и где необходимо увеличить пропускные способности дуг, чтобы получить искомый увеличенный поток с минимальными на это затратами. Для ранжирования «узких» мест используются величины y_{ij} , показывающие необходимость увеличения пропускной способности дуг свыше d_{ij} .

Использование нелинейной целевой функции в (7) может повысить качество моделирования, поскольку нелинейная функция более реалистично описывает издержки, возникающие на практике в системах ЕСГ и ЕСН. Применение фактов двойственности в этой модели является одним из путей совершенствования методики решения проблемы ранжирования "узких" мест. Двойственные оценки позволяют выразить транспортные издержки и издержки от недопоставок в количественном выражении. Эту информацию можно использовать при проведении ранжирования.

Другие подходы к моделированию потокораспределения

Транспортные модели могут быть представлены в виде систем равенств и неравенств. Например, такой системой являются условия оптимальности Куна-Таккера для линейной или нелинейной транспортной задачи. В книге [108] Л.Д. Попова содержится обзор линейных и нелинейных задач о дополнителности, а также их обобщений в виде вариационных неравенств. Вариационные неравенства являются, кроме того, обобщением для задач нелинейного программирования. Рассматриваемые в [108] постановки могут быть применены к задачам общего экономическо-

го равновесия, прогнозирования транспортных потоков и тарифов на грузоперевозки, в том числе к игровым постановкам транспортных задач.

В монографии [53] делается обзор равновесного программирования – подхода, обобщающего технику решения вариационных неравенств. В рамках этого направления равновесие определяется как неподвижная точка экстремального отображения. Обычная задача математического программирования представляет собой частный случай задачи равновесного программирования. Кроме того этот подход позволяет объединить в рамках одной теории биматричные игры, многокритериальную оптимизацию, а также равновесные модели математической экономики.

Публикации [126, 149, 158, 161, 172, 181, 186] посвящены постановкам транспортных задач в виде вариационных неравенств, исследованию условий существования, единственности и устойчивости транспортного равновесия. Статьи содержат информацию о соотношениях между различными видами равновесий и связях между задачами оптимизации и вариационными неравенствами.

§1.3. Метод внутренних точек как способ расчета моделей

К эффективным и активно развиваемым методам решения задач оптимизации с ограничениями-неравенствами относятся алгоритмы методов внутренних точек. Первые алгоритмы метода внутренних точек появились в 1960-х. Алгоритмы этого класса, приближаются к оптимуму, находясь во внутренней части области допустимых по ограничениям неравенствам решений. В 1963 году А.В. Фиакко и Г.П. Мак-Кормик [120] описали метод внутренней точки для решения задачи нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами. В 1967 г. И.И. Дикин [17] предложил алгоритм внутренних точек для решения задач линейного программирования, в основе которого лежит идея Л.В. Канторовича оценки методом наимень-

ших квадратов множителей Лагранжа ограничений задачи при неоптимальном решении.

В работе [43] В.И. Зоркальцевым были предложены изменения вычислительного процесса алгоритма И.И. Дикина. Было предложено, в частности, при движении от точки текущего приближения вдоль направления улучшения не до границы эллипсоида, вписанного в допустимую область, как в методе внутренних точек Дикина, а на часть пути, определяемую коэффициентом $\gamma \in (0,1)$, до границы допустимой области.

В 1984 г. Н. Кармакар публикует статью [164], в которой описывает алгоритм на основе метода внутренних точек для решения задач линейного программирования, в котором увеличение времени счета с ростом размера задачи полиномиально. Эта статья привлекла повышенное внимание во всём мире к алгоритмам внутренних точек.

Вариант метода внутренних точек, предложенный Зоркальцевым в [43], был переоткрыт в конце 1980-х в нескольких работах [133, 182] как модификация алгоритма Кармакара. За ним закрепилось название *affine scaling method*.

Алгоритмы внутренних точек данного типа активно развивались в России – в ВЦ АН СССР в работах академика Ю.Г. Евтушенко, ныне директора ВЦ РАН и доктора физико-математических наук В.Г. Жадана [23, 24, 41] и в СЭИ СО АН СССР (ныне ИСЭМ СО РАН), где эти алгоритмы использовались для проведения расчетов по нескольким моделям энергетики [18, 19, 20, 45, 49].

С середины 1980-х годов интерес к алгоритмам внутренних точек возрос во всем мире благодаря работам над полиномиальными методами Л.Г. Хачияна, Н.З. Шора, Д.Б. Юдина, Н. Кармаркара, А.С. Немировского, Ю.Е. Нестерова [174]. Были опубликованы тысячи работ в разных странах. Определенный вклад в развитие алгоритмов внутренних точек внесли ученые: И. Адлер, Р. Вандербей, М. Коджима, Р. Монтейро, Ш. Мицуно,

М. Тодд, Т. Тсучия и др.

К настоящему времени получен ряд важных результатов в усовершенствовании и теоретическом обосновании алгоритмов внутренних точек, в частности, в ИСЭМ СО РАН [48, 58, 59]. Выявлены подмножества алгоритмов, имеющих линейную и сверхлинейную скорости сходимости [47, 48].

Можно выделить два подмножества из рассматриваемого в диссертации класса алгоритмов внутренних точек: прямые и двойственные алгоритмы внутренних точек. Эти алгоритмы осуществляют монотонное улучшение решений исходной или двойственной задачи оптимизации внутри допустимой области по ограничениям-неравенствам соответствующей задачи. Частным случаем рассматриваемых алгоритмов внутренних точек являются *affine scaling methods*, разработанные для задач линейного программирования.

При разработке алгоритмы внутренних точек могут сочетаться с другими методами, например, методом Ньютона. Поэтому прямой и двойственный алгоритмы исследуемого типа для реализации нелинейных моделей потокораспределения могут рассматриваться как обобщение известных в теории гидравлических цепей метода контурных расходов и метода узловых давлений на случай задач с ограничениями-неравенствами.

В работах В.И. Зоркальцева [44, 45, 58] обсуждаются правила задания весовых коэффициентов функций штрафа в алгоритмах внутренних точек, при которых можно доказать сходимость алгоритмов. В работах [9, 44, 45, 47, 121] проведены теоретические и экспериментальные исследования различных способов задания весовых коэффициентов в алгоритмах внутренних точек для задач линейного программирования.

Наиболее известными является квадратичными весовые коэффициенты. Алгоритм Дикина [17] использует данное правило задания весовых коэффициентов. Для них теоретически доказана возможность получения сверхлинейной скорости сходимости алгоритма [45, 58] при решении задач линейного программирования. Недостатком квадратичных весовых коэф-

фициентов является то, что они очень чувствительны к неизбежным погрешностям в решении вспомогательной задачи.

В [44, 45] был введен способ определения весовых коэффициентов с использованием множителей Лагранжа, вычисляемых на предыдущей итерации. Алгоритмы с такими весовыми коэффициентами более устойчивы к погрешностям решения вспомогательной задачи. В работах [9, 45, 47] была экспериментально подтверждена эффективность таких коэффициентов при решении задач линейного программирования. В [47] для алгоритмов с таким способом задания весовых коэффициентов была доказана возможность достижения сверхлинейной скорости сходимости в задачах ЛП.

Одной из задач диссертации являются экспериментальные исследования вариантов алгоритмов внутренних точек с различными видами весовых коэффициентов на задачах выпуклого программирования. Эти исследования позволяют провести сопоставление и выбрать наиболее перспективные варианты реализации алгоритмов. Также планируется осуществить практическую проверку свойств алгоритмов внутренних точек на задачах выпуклой оптимизации, в частности сравнить скорость сходимости по итерациям исходных переменных и двойственных оценок к своим оптимальным значениям.

§1.4. Выводы по главе

Одним из важных разделов теории оптимизации является теория двойственности. Она имеет множество приложений. Задачи линейного программирования обладают свойством симметричной двойственности. Задачи нелинейного программирования не всегда обладают свойством симметричной двойственности.

Для задач выпуклого программирования симметричную двойственность можно получить с использованием преобразования Лежандра-Фен-

хеля. В работах [16, 65] предложены постановки симметричных двойственных задач. В работах [28, 29, 31, 50–53] исследовалась симметричная двойственность задач оптимизации с сепарабельными дифференцируемыми строго выпуклыми целевыми функциями при ограничениях в виде равенств и односторонних неравенств для значений отдельных переменных. Естественным развитием этих исследований является формулировка и доказательство теорем симметричной двойственности для задач с двусторонними ограничениями-неравенствами.

Модели потокораспределения играют значительную роль при решении задач функционирования сложных технических систем, в частности транспортных систем. Теория симметричной двойственности расширяет возможности описания и исследования таких моделей.

Модели гидравлических и электрических цепей описывают распределение потоков (или токов) по дугам сети. В таких моделях двойственные оценки получают техническую интерпретацию (описывают давления или напряжения в узлах сети). В работах по теории гидравлических цепей системы с наличием автоматических регуляторов до настоящего времени исследовались на базе моделей, построенных с использованием систем уравнений и неравенств [20, 107, 114, 123]. В задачи диссертации входит исследование гидравлических систем с автоматическими регуляторами на базе симметричных двойственных задач с выпуклой сепарабельной целевой функцией и двусторонними ограничениями-неравенствами.

Транспортные модели в экономике (связанные с потокораспределением) [8, 68, 71, 76, 141, 143, 166, 177] зачастую сводятся к поиску минимума транспортных издержек при соблюдении ограничений на потоки. Некоторые постановки таких моделей исследованы в диссертации на базе теории симметричной двойственности. Важным с точки зрения моделирования здесь является содержательная экономическая интерпретация двойственных задач и двойственных оценок (с учетом различных постановок моде-

лей). Эта интерпретация полезна, например, для оценки эффективности способов назначения тарифов и цен в транспортных системах.

Важным подклассом транспортных потоковых моделей экономики, являются модели анализа живучести и надежности отраслевых систем энергетики [106, 110, 113]. Эти модели позволяют определить производственные возможности отраслевых систем ТЭК (в частности, ЕСГ и ЕСН) и проранжировать «узкие» места при наличии разного рода возмущений в системе. Существующие модели (например, [113]) могут быть улучшены посредством введения нелинейных целевых функций. Двойственные оценки могут быть использованы при анализе и ранжировании «узких» мест для оценки эффективности ранжирования.

К классу эффективных численных методов для решения задач оптимизации с ограничениями-неравенствами относятся алгоритмы внутренних точек. В настоящее время существует большое число работ, посвященных исследованию этих алгоритмов (например, [17, 18, 41, 43, 133, 164, 174, 182]). В работах [9, 44, 45, 47, 58, 121] проведены теоретические и экспериментальные исследования различных способов задания весовых коэффициентов в алгоритмах внутренних точек для задач линейного программирования. Актуальной задачей, решаемой в диссертации, являются экспериментальные исследования вариантов алгоритмов внутренних точек для отдельных классов задач нелинейного программирования.

Глава 2. Симметричная двойственность в задачах выпуклой оптимизации с ограничениями-неравенствами

В данной главе доказываются теоремы, обосновывающие симметричную двойственность задач оптимизации с сепарабельной строго выпуклой дифференцируемой целевой функцией и линейными ограничениями: равенствами и неравенствами. Здесь используется то же понятие симметричной двойственности, что и в [50–52, 152]. Обоснование теорем опирается на свойства преобразования Лежандра-Фенхеля [80, 111, 127, 144]. Формулируются теоремы о существовании и единственности решения исходной задачи, о связи между решениями двойственных задач оптимизации, об эквивалентных формах представления задач.

Доказательства теорем в первом параграфе являются развитием исследований, начатых в работах [28, 50–53]. Они обобщают упомянутые исследования на более широкий класс задач, поскольку здесь вводятся двусторонние ограничения-неравенства на значения переменных. Формулировка и обоснование условий оптимальности для двойственных задач с использованием кусочно-линейной функции-срезки (вместо использования билинейных условий дополняющей нежесткости) является развитием идей, предложенных научным руководителем в [52, 53].

Во втором параграфе обсуждаются свойства двойственных задач оптимизации с выпуклой сепарабельной целевой функцией, которая не является строго выпуклой.

§2.1. Двойственность задач оптимизации со строго выпуклой дифференцируемой целевой функцией

Обозначим Z – множество дифференцируемых функций одного вещественного аргумента такое, что функция Θ принадлежит Z тогда и только тогда, когда для функции Θ и её производной Θ' справедливы сле-

дующие условия:

- 1) $\Theta(0) = 0$ и $\Theta'(0) = 0$,
- 2) $\Theta'(\alpha) > \Theta'(\beta)$, если $\alpha > \beta$,
- 3) $\Theta'(\alpha) \rightarrow -\infty$, если $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\Theta' \rightarrow +\infty$, если $\alpha \rightarrow +\infty$.

Примером функций, связанных преобразованием Лежандра-Фенхеля и принадлежащих множеству Z , могут служить функции, полученные в результате монотонно возрастающих строго выпуклых дифференцируемых преобразований двойственных норм. Из двойственных гельдеровских норм получаем, в качестве примера, такие функции:

$$F_j(x_j) = \frac{1}{p} \alpha_j |x_j|^p, \text{ где } \alpha_j > 0, p > 1,$$

$$\Phi_j(y_j) = \frac{1}{q} \beta_j |y_j|^q, \text{ где } \beta_j > 0, q > 1 \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \alpha_j^{q-1} \beta_j = 1, \alpha_j \beta_j^{p-1} = 1.$$

Исходная задача оптимизации

Пусть задана матрица A размера $m \times n$ с элементами из R , и два множества индексов: $I = \{1, \dots, m\}$ и $J = \{1, \dots, n\}$, где m и n – натуральные числа. Множество J разбито на четыре непересекающиеся подмножества: $J^\infty, J^L, J^H, J^{LH}$. Также заданы: вектор $b \in R^m$, вектор $s \in R^n$, числа $\underline{x}_j, j \in J^L \cup J^{LH}$ и $\bar{x}_j, j \in J^H \cup J^{LH}$, при этом $\underline{x}_j < \bar{x}_j, j \in J^{LH}$.

Пусть задан набор функций $F_j(x_j), j \in J$ такой, что каждая из этих функций принадлежит множеству Z . Введем обозначение: $F(x) = \sum_{j \in J} F_j(x_j)$.

Обозначим через f_j производную функции F_j при $j \in J$.

Рассмотрим задачу минимизации выпуклой сепарабельной целевой функции при линейных ограничениях, переменными которой являются компоненты вектора $x \in R^n$:

$$F(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \quad (12)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (13)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j, \quad j \in J^L, \quad (14)$$

$$x_j \leq \bar{x}_j, \quad j \in J^H, \quad (15)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j \in J^{LH}. \quad (16)$$

Будем называть задачу (12)–(16) *исходной задачей оптимизации*

Теорема 1. *Для существования решения задачи (12)–(16) достаточно непротиворечивости ограничений (13)–(16). Если у данной задачи имеется оптимальное решение, то оно единственно.*

Доказательство. Введем обозначения: $P_j(x_j) \equiv F_j(x_j) + s_j x_j$ и $P(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^T \mathbf{x}$. Обозначим p_j – производную функции P_j для $j \in J$. Для функции $P(\mathbf{x})$ рассмотрим совокупность множеств Лебега, зависящих от вещественного параметра α :

$$X_\alpha = \{x \in R^n : P(\mathbf{x}) \leq \alpha\}.$$

Из условия $F_j \in Z$, $j \in J$ следует, что функции $P_j(x_j)$ – строго выпуклы, а также $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} p_j(x_j) = -\infty$, $\lim_{x_j \rightarrow +\infty} p_j(x_j) = +\infty$ при $j \in J$. Следовательно, $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} P_j(x_j) = +\infty$ и $\lim_{x_j \rightarrow +\infty} P_j(x_j) = +\infty$ при $j \in J$. Отсюда вытекает, что $\inf P(\mathbf{x}) > -\infty$. Если $\alpha < \inf P(\mathbf{x})$, то множество Лебега X_α , очевидно, пусто.

Покажем, что для любого вещественного α множество Лебега X_α ограничено, то есть для всякого $\alpha \in R$ существует число $M \in R$ такое, что $\|\mathbf{x}\| \leq M$ для всех $\mathbf{x} \in X_\alpha$, где $\|\cdot\|$ – векторная норма (любая, поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны).

Обозначим $PL_j^{-1}(y_j)$ – обратную функцию к функции $P_j(x_j)$, определенную при таких x_j , что $f_j(x_j) + s_j \leq 0$, а $PR_j^{-1}(y_j)$ – обратную функцию

к функции $P_j(x_j)$, определенную при таких x_j , что $f_j(x_j) + s_j \geq 0$.

Из условия $F_j \in Z$, $j \in J$ следует, что величины $PL_j^{-1}(\alpha)$ и $PR_j^{-1}(\alpha)$ определены и конечны при любом вещественном $\alpha > \inf P(\mathbf{x})$.

Искомое число M для любого вещественного α равно $\|\hat{\mathbf{x}}(\alpha)\|$, где $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ – вектор из R^n с компонентами: $\hat{x}_j(\alpha) = \max\{PL_j^{-1}(\alpha), PR_j^{-1}(\alpha)\}$. Ограниченность X_α доказана.

Если система ограничений (13)–(16) непротиворечива, то существует её решение $\tilde{\mathbf{x}}$. Непрерывность целевой функции $P(\mathbf{x})$ и ограниченность множества Лебега X_α при $\alpha = P(\tilde{\mathbf{x}})$ и означает, что у задачи существует оптимальное решение. Строгая выпуклость $P(\mathbf{x})$ и выпуклость множества допустимых по условиям (13)–(16) векторов означают, что оптимальное решение у задачи (12)–(16) может быть только единственным.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим систему уравнений и неравенств, переменные в которой – векторы $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^n$ и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$.

Система содержит условия (13)–(16), а также следующие условия:

$$y_j = f_j(x_j), \quad j \in J, \quad (17)$$

$$f_j(x_j) = [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j, \quad j \in J^\infty, \quad (18)$$

$$f_j(x_j) = \max\{f_j(\underline{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}, \quad j \in J^L, \quad (19)$$

$$f_j(x_j) = \min\{f_j(\bar{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}, \quad j \in J^H, \quad (20)$$

$$f_j(x_j) = \min\{f_j(\bar{x}_j), \max\{f_j(\underline{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}\}, \quad j \in J^{LH}, \quad (21)$$

$$l_j = (f_j(\underline{x}_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j)_+, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (22)$$

$$h_j = ([\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - f_j(\bar{x}_j) - s_j)_+, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (23)$$

Здесь символом $()_+$ обозначена функция неотрицательной срезки ве-

личины в скобках, т.е.: $(\alpha)_+ = \max\{0, \alpha\}$. Равенства (22), (23) являются правилами вычисления величин l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$, их можно исключить из системы вместе с переменными l_j и h_j .

Теорема 2. *Для того чтобы векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{u} и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ были решением системы (13)–(23) необходимо и достаточно, чтобы вектор \mathbf{x} являлся оптимальным решением задачи (12)–(16), вектор \mathbf{u} являлся вектором множителей Лагранжа ограничений (13), скаляры l_j , h_j являлись множителями Лагранжа ограничений (14)–(16), вектор \mathbf{y} вычислялся по правилу (17). Если оптимальное решение задачи (12)–(16) существует, то векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} единственны.*

Доказательство. Уравнения (19)–(23) при выполнении (13)–(16) эквивалентны следующим условиям:

$$f_j(x_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - l_j = 0, \quad j \in J^L, \quad (24)$$

$$f_j(x_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j + h_j = 0, \quad j \in J^H, \quad (25)$$

$$f_j(x_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - l_j + h_j = 0, \quad j \in J^{LH}, \quad (26)$$

$$l_j(x_j - \underline{x}_j) = 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH} \quad (27)$$

$$l_j \geq 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (28)$$

$$h_j(\bar{x}_j - x_j) = 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}, \quad (29)$$

$$h_j \geq 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (30)$$

Докажем эквивалентность условий (21)–(23) и (26)–(30) для $j \in J^{LH}$ при выполнении (16). Пусть для $j \in J^{LH}$ выполнены (21)–(23), тогда условия (28) и (30) очевидно выполняются для этих j . Если $[\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j < f_j(\underline{x}_j) + s_j$, то $[\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j < f_j(\bar{x}_j) + s_j$ (поскольку $\underline{x}_j < \bar{x}_j$ и $f_j(x_j)$ – строго возрастает), значит из (23) следует, что $h_j = 0$. Отсюда $h_j(\bar{x}_j - x_j) = 0$. Из (21) следует, что

$f_j(x_j) = f_j(\underline{x}_j)$, значит $x_j = \underline{x}_j$ с учетом свойств $f_j(x_j)$. Отсюда получаем для $j \in J^{LH}$ справедливость (27) и (с учетом (22)) справедливость условия (26). Если $[\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j > f_j(\bar{x}_j) + s_j$, то $[\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j > f_j(\underline{x}_j) + s_j$, значит из (22) следует, что $l_j = 0$. Отсюда $l_j(x_j - \underline{x}_j) = 0$. Из (21) следует, что $f_j(x_j) = f_j(\bar{x}_j)$, значит $x_j = \bar{x}_j$. Отсюда получаем для $j \in J^{LH}$ справедливость (29) и (с учетом (23)) справедливость условия (26). Если $f_j(\underline{x}_j) \leq [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j \leq f_j(\bar{x}_j)$, то из (22), (23) следует, что $l_j = 0$, $h_j = 0$. Из (21) следует, что $f_j(x_j) = [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j$, поэтому в этом случае также справедливы условия (26)–(30) для $j \in J^{LH}$.

Пусть теперь, наоборот, для $j \in J^{LH}$ при справедливости (16) выполнены (26)–(30). Возможны три случая: 1) $x_j = \underline{x}_j$, 2) $x_j = \bar{x}_j$, 3) $\underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j$. Если $x_j = \underline{x}_j$, тогда из (29) следует, что $h_j = 0$. Тогда согласно (26), (28) справедливо $l_j = f_j(\underline{x}_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j$, $f_j(\underline{x}_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j \geq 0$. Значит выполнено (22), а с учетом справедливости неравенства $f_j(\underline{x}_j) \leq f_j(\bar{x}_j)$ выполнены и (21), (23) для $j \in J^{LH}$. Если $x_j = \bar{x}_j$, тогда из (27) следует, что $l_j = 0$. В этом случае согласно (26), (30) справедливо $h_j = [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - f_j(\bar{x}_j) - s_j$ и $f_j(\bar{x}_j) + s_j \leq [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j$. Значит выполнено (23), а с учетом справедливости неравенства $f_j(\underline{x}_j) \leq f_j(\bar{x}_j)$ выполнены и (21), (22) для $j \in J^{LH}$. Если $\underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j$, то из (27), (29) следует, что $l_j = 0$, $h_j = 0$. В этом случае из (26) следует, что $f_j(x_j) = [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j$. Тогда с учетом свойств функции $f_j(x_j)$ получаем $f_j(\underline{x}_j) < [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j < f_j(\bar{x}_j)$. При этом верны условия (21)–(23) для $j \in J^{LH}$. Эквивалентность условий (21)–(23) и (26)–(30) для $j \in J^{LH}$ при выполнении (16) показана.

Эквивалентность условий (19), (22) и (24), (27), (28) для $j \in J^L$ при

выполнении (14) и эквивалентность условий (20), (23) и (25), (29), (30) для $j \in J^H$ при выполнении (15) доказывается по аналогии с доказанным выше случаем эквивалентности (21)–(23) и (26)–(30) при $j \in J^{LH}$.

Условия (13)–(16), (18), (24)–(30) являются условиями оптимальности Куна-Таккера для задачи (12)–(16), при этом они эквивалентны условиям (13)–(16), (18)–(23). В силу выпуклости целевой функции задачи (12)–(16) и линейности её ограничений условия оптимальности Куна-Таккера являются необходимыми и достаточными для того, чтобы вектор \mathbf{x} , составляющий их решение, являлся оптимальным решением исходной задачи, а вектор \mathbf{u} и скаляры $l_j, j \in J^L \cup J^{LH}, h_j, j \in J^H \cup J^{LH}$, составляющие их решение, являлись множителями Лагранжа ограничений исходной задачи.

Поскольку вектор \mathbf{x} , являющийся оптимальным решением задачи (12)–(16), единственный, то и в решении системы (13)–(16), (18)–(23) этот вектор единственный. С учетом условия (17) и свойств функций $f_j(x_j), j \in J$ вектор \mathbf{u} единственный в решении системы (13)–(23).

Теорема 2 доказана.

Двойственная задача оптимизации

Обратную функцию к функции $f_j(x_j), j \in J$ обозначим $\varphi_j(y_j)$. В силу свойств функции $f_j(x_j), j \in J$ обратная функция $\varphi_j(y_j)$ определена и при всех $x_j \in R, y_j \in R, j \in J$ выполняются условия:

$$f_j(\varphi_j(y_j)) = y_j, \varphi_j(f_j(x_j)) = x_j, j \in J. \quad (31)$$

Пусть для всех $j \in J$ функция Φ_j является преобразованием Лежандра-Фенхеля функции $F_j \in Z$. Из свойств преобразования Лежандра-Фенхеля и свойств функции F_j следует, что $\Phi_j \in Z$ и что для положительных u_j

$$\Phi_j(y_j) = \int_0^{y_j} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad j \in J. \quad (32)$$

Введем обозначение: $\Phi(\mathbf{y}) = \sum_{j \in J} \Phi_j(y_j)$. Рассмотрим задачу оптимизации, переменные которой – векторы $\mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$ и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$:

$$\Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j h_j \rightarrow \min \quad (33)$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j = 0, \quad j \in J^\infty, \quad (34)$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - l_j = 0, \quad j \in J^L, \quad (35)$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j + h_j = 0, \quad j \in J^H, \quad (36)$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - l_j + h_j = 0, \quad j \in J^{LH}, \quad (37)$$

$$l_j \geq 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (38)$$

$$h_j \geq 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (39)$$

Будем называть задачу (33)–(39) *двойственной задачей оптимизации*.

Теорема 3. *Для того, чтобы векторы \mathbf{y} , \mathbf{u} и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$, составляли оптимальное решение задачи (33)–(39), компоненты вектора \mathbf{x} являлись множителями Лагранжа ограничений (34)–(37), необходимо и достаточно, чтобы вектор \mathbf{x} являлся оптимальным решением задачи (12)–(16), компоненты вектора \mathbf{u} являлись множителями Лагранжа ограничений (13), скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ являлись множителями Лагранжа ограничений (14)–(16), а вектор \mathbf{y} был связан с вектором \mathbf{x} условиями (17).*

Доказательство. Запишем условия оптимальности Куна-Таккера для задачи (33)–(39). В связи со строгой выпуклостью и дифференцируемостью целевой функции двойственной задачи, а также линейностью её ог-

раничений эти условия будут необходимыми и достаточными для того, чтобы допустимое решение задачи (33)–(39) являлось оптимальным. В них войдут условия (34)–(39), а также:

$$\varphi_j(y_j) - x_j = 0, \quad j \in J, \quad (40)$$

$$b_i - [\mathbf{Ax}]_i = 0, \quad i \in I, \quad (41)$$

$$x_j - \underline{x}_j - \xi_j^L = 0, \quad \xi_j^L \geq 0, \quad \xi_j^L l_j = 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (42)$$

$$\bar{x}_j - x_j - \xi_j^H = 0, \quad \xi_j^H \geq 0, \quad \xi_j^H h_j = 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (43)$$

Из (31) следует, что условие (40) равносильно условию (17). С учетом (17), условия (34)–(37) равносильны (18), (24)–(26). Условие (41) совпадает с (13). Если исключить из условий (42), (43) переменные ξ_j^L , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и ξ_j^H , $j \in J^H \cup J^{LH}$, то получим условия (14)–(16) и (27), (29). Таким образом, условия (34)–(43) равносильны условиям (13)–(23), которые содержат условиями оптимальности Куна-Таккера для исходной задачи. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. (Условия существования решения двойственной задачи.) Двойственная задача всегда имеет допустимое решение. Например, если положить $\mathbf{y} = -\mathbf{s}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $l_j = 0$, $j \in J^L \cup J^{LH}$, $h_j = 0$, $j \in J^H \cup J^{LH}$, то очевидно получим допустимое решение.

Двойственная задача не имеет оптимального решения, только когда её целевая функция не ограничена снизу на области допустимых решений. А для этого, в связи со строгой выпуклостью $\Phi(\mathbf{y})$, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система линейных уравнений и неравенств относительно вектора $\hat{\mathbf{u}} \in R^m$ и скаляров \hat{l}_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и \hat{h}_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$:

$$[\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{u}}]_j = 0, \quad j \in J^\infty, \quad (44)$$

$$[\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{u}}]_j + \hat{l}_j = 0, \quad j \in J^L, \quad (45)$$

$$[\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{u}}]_j - \hat{h}_j = 0, \quad j \in J^H, \quad (46)$$

$$[\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{u}}]_j + \hat{l}_j - \hat{h}_j = 0, \quad j \in J^{LH}, \quad (47)$$

$$\hat{l}_j \geq 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (48)$$

$$\hat{h}_j \geq 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}, \quad (49)$$

$$\mathbf{b}^T \hat{\mathbf{u}} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j \hat{l}_j - \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j \hat{h}_j > 0. \quad (50)$$

Действительно, для допустимого решения \mathbf{y} , \mathbf{u} , l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ задачи (33)–(39) векторы \mathbf{y} , $\mathbf{u} + \lambda \hat{\mathbf{u}}$ и скаляры $l_j + \lambda \hat{l}_j$, $j \in J^L \cup J^{LH}$, $h_j + \lambda \hat{h}_j$, $j \in J^H \cup J^{LH}$ будут также составлять допустимое решение при всяком вещественном $\lambda \geq 0$. При возрастании λ целевая функция (33) будет неограниченно убывать, в соответствии с (50).

Согласно теории альтернативных систем линейных неравенств, система (44)–(50) имеет решение тогда и только тогда, когда не имеет решение система (13)–(16). Это подтверждает тот факт, что *исходная и двойственная задачи либо обе не имеют решения, либо обе имеют решения*.

Таким образом, *двойственная задача имеет решение тогда и только тогда, когда не имеет решение система (44)–(50) и имеет решение система (13)–(16) вместе с исходной задачей (12)–(16)*.

Замечание 2. (Условия единственности решения двойственной задачи.) Согласно теореме 1 если исходная задача имеет решение, то оно единственно. При этом решение двойственной задачи по переменным, составляющим вектор \mathbf{y} , также единственно, поскольку согласно теореме 3 оптимальный вектор \mathbf{y} связан с вектором \mathbf{x} условиями (17).

По переменным, составляющим вектор \mathbf{u} , и скалярам l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ решение двойственной задачи может быть неединственным. Так, если имеет нетривиальные решения система, содержащая усло-

вия (44)–(49) и равенство

$$\mathbf{b}^T \hat{\mathbf{u}} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j \hat{l}_j - \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j \hat{h}_j = 0, \quad (51)$$

то для некоторого оптимального решения \mathbf{y} , \mathbf{u} , l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ задачи (33)–(39) векторы \mathbf{y} , $\mathbf{u} + \lambda \hat{\mathbf{u}}$ и скаляры $l_j + \lambda \hat{l}_j$, $j \in J^L \cup J^{LH}$, $h_j + \lambda \hat{h}_j$, $j \in J^H \cup J^{LH}$ будут также составлять оптимальное решение при всяком вещественном $\lambda \geq 0$, поскольку согласно (51) при возрастании λ целевая функция (33) не будет изменяться.

Таким образом, двойственная задача имеет единственное решение по переменным составляющим вектор \mathbf{u} и скалярам l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$, если не имеет нетривиальных решений система, содержащая условия (44)–(49) и неравенство

$$\mathbf{b}^T \hat{\mathbf{u}} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j \hat{l}_j - \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j \hat{h}_j \geq 0. \quad (52)$$

Самосопряженная задача оптимизации

Рассмотрим задачу минимизации дифференцируемой выпуклой функции, переменными которой являются векторы $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$ и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$:

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) + \mathbf{s}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j h_j \rightarrow \min \quad (53)$$

при линейных ограничениях (13)–(16), (34)–(39).

Задачу (53), (13)–(16), (34)–(39) будем называть *самосопряженной* задачей оптимизации. Целевая функция (53) является суммой целевых функций (12) и (33). Ограничения представляют собой объединение ограничений исходной и двойственной задач оптимизации.

Замечание 3. Векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{u} и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j ,

$j \in J^H \cup J^{LH}$ составляют решение самосопряженной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда вектор \mathbf{x} является решением исходной задачи оптимизации, а векторы \mathbf{y} , \mathbf{u} и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ составляют решение двойственной задачи оптимизации. Двойственная задача к самосопряженной задаче оптимизации совпадает с ней же.

Действительно, целевая функция самосопряженной задачи получена суммированием целевых функций исходной и двойственной задач. Ограничения этой задачи представляют объединение ограничений исходной и двойственной задач. В рамках самосопряженной задачи переменные исходной задачи являются независимыми от переменных двойственной задачи оптимизации. Поэтому при таком формальном суммировании получаем те же решения, в качестве решения самосопряженной задачи, что получали при решении исходной задачи и двойственной задачи. А попытка построить двойственную к самосопряженной даст нам эту же задачу.

Замечание 4. Оптимальное значение целевой функции самосопряженной задачи равно нулю.

Действительно, при справедливости (13), (34)–(37) выполняется:

$$\mathbf{s}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} x_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} x_j h_j = -\mathbf{x}^T \mathbf{y}. \quad (54)$$

Согласно свойствам преобразования Лежандра-Фенхеля при выполнении $y_j = f_j(x_j)$, $j \in J$ справедливо равенство:

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0, \quad (55)$$

где $F_j(x_j) \in Z$ и $\Phi_j(y_j) \in Z$ – пара сопряженных функций при $j \in J$.

Поэтому на множестве оптимальных решений самосопряженной задачи (где, в частности, выполнены условия (17)) целевая функция примет вид:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} (x_j - \underline{x}_j) l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} (\bar{x}_j - x_j) h_j \rightarrow \min \quad (56)$$

Условия дополняющей нежёсткости (27), (29) справедливы в точке оптимума самосопряженной задачи. Следовательно, целевая функция (56)

равна нулю в этой точке.

Замечание 5. Самосопряженная задача равносильна задаче минимизации дифференцируемой выпуклой функции

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} (x_j - \underline{x}_j) l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} (\bar{x}_j - x_j) h_j \rightarrow \min \quad (57)$$

при линейных ограничениях (13)–(16), (34)–(39).

Действительно, равенство (54) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j h_j = \\ = -\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} (x_j - \underline{x}_j) l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} (\bar{x}_j - x_j) h_j. \end{aligned} \quad (58)$$

Равенство (58) справедливо при всех допустимых решениях задачи (57), (13)–(16), (34)–(39), поэтому целевая функция этой задачи совпадает с целевой функцией самосопряженной задачи на множестве допустимых решений. Ограничения этих задач также совпадают.

Эквивалентные формы представления условий оптимальности

Система уравнений и неравенств (13)–(18), (24)–(30) (или (13)–(17), (27), (29), (34)–(39)), а также система (13)–(23), (или (13)–(17), (34)–(39)), содержат условия оптимальности для исходной и двойственной задач оптимизации, а также для самосопряженной и симметричной задач.

Могут быть предложены и другие формы представления условий оптимальности для исходной, двойственной, самосопряженной и симметричной задач оптимизации. Приведем некоторые примеры других форм.

1. Согласно условию (31) уравнения (17) можно заменить следующими:

$$x_j = \varphi_j(y_j), \quad j \in J. \quad (59)$$

2. Из свойств преобразования Лежандра-Фенхеля следует, что условия (17) можно заменить набором условий:

$$F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) - x_j y_j = 0, \quad j \in J, \quad (60)$$

причем, поскольку для функций $F_j(x_j) \in Z$, $\Phi_j(y_j) \in Z$, $j \in J$, связанных преобразованием Лежандра-Фенхеля, справедливы неравенства (2), набор ограничений в (60) можно представить в виде одного ограничения

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \quad (61)$$

3. В системе (13)–(17), (27), (29), (34)–(39), условия (17) равносильны следующему ограничению:

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{b}^T \mathbf{u} + \mathbf{s}^T \mathbf{x} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} x_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} x_j h_j = 0. \quad (62)$$

4. В системе (13)–(17), (27), (29), (34)–(39), условия дополняющей нежесткости (27), (29) равносильны следующему ограничению:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} + \mathbf{s}^T \mathbf{x} - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j h_j = 0. \quad (63)$$

Действительно, при (13), (34)–(37) условие (63) равносильно условию

$$\sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} (x_j - \underline{x}_j) l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} (\bar{x}_j - x_j) h_j = 0, \quad (64)$$

которое при справедливости условий (14)–(16), (28), (30) равносильно набору условий (27), (29).

5. Используя специфику системы (13)–(23), её можно свести к проблеме решения системы уравнений с меньшим количеством переменных. Так, выразив из (17)–(21) вектор \mathbf{x} через вектор \mathbf{u} , приходим к системе из m нелинейных уравнений относительно вектора переменных $\mathbf{u} \in R^m$:

$$\mathbf{A} \varphi(\mathbf{y}(\mathbf{u})) = \mathbf{b}, \quad (65)$$

где $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ – n -компонентная вектор-функция:

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}) = (y_1(\mathbf{u}), \dots, y_n(\mathbf{u}))^T,$$

$\varphi(\mathbf{y}(\mathbf{u}))$ – n -компонентная вектор-функция:

$$\varphi(\mathbf{y}(\mathbf{u})) = (\varphi_1(y_1(\mathbf{u})), \dots, \varphi_n(y_n(\mathbf{u})))^T,$$

причем для компоненты вектор-функции $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ заданы условием:

$$y_j(\mathbf{u}) = \begin{cases} [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j, & j \in J^\infty, \\ \max \{f_j(\underline{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}, & j \in J^L, \\ \min \{f_j(\bar{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}, & j \in J^H, \\ \min \{f_j(\bar{x}_j), \max \{f_j(\underline{x}_j), [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j\}\}, & j \in J^{LH}. \end{cases}$$

Вычислив вектор \mathbf{u} в результате решения системы (65), затем прямым счетом найдем векторы \mathbf{y} , \mathbf{x} и скаляры l_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и h_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ используя равенство $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$, а также (59) и (22), (23).

Разные формы записи условий оптимальности (и самих задач оптимизации) можно использовать, например, при разработке алгоритмов поиска решения. Здесь их можно сравнивать по скорости счета или по удобству применения различных критериев для проверки оптимальности решения. Важны разные формы записи и при физической или экономической интерпретации решений, для лучшего понимания сути происходящих процессов в моделируемой системе.

§2.2. Обсуждение свойств двойственных задач оптимизации

Класс целевых функций двойственных задач оптимизации, который исследовался в предыдущем параграфе, выбран не случайно. Строгая выпуклость и дифференцируемость целевой функции исходной задачи и ограниченность множеств Лебега $X_\alpha = \{x \in R^n : P(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ при любом вещественном α гарантирует, что:

- 1) исходная задача оптимизации имеет единственное решение,
- 2) двойственная задача оптимизации имеет единственное решение по переменным, составляющим вектор \mathbf{y} .

Класс рассмотренных в §2.1 задач оптимизации прост в описании, при этом удобен для моделирования различных систем потокораспределения и

изучения их свойств.

Полученную теорию симметричной двойственности можно распространить на более широкий класс задач оптимизации с выпуклой целевой функцией без требований строгой выпуклости и дифференцируемости. Такой класс задач представляет интерес, в частности для исследования моделей потокораспределения. Тем не менее, распространение симметричной двойственности на этот класс не входило в цели диссертации.

В главе 4 исследуются свойства модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН по удовлетворению потребителей в чрезвычайных ситуациях. Эта модель описывается задачей оптимизации, в которой целевая функция выпукла и дифференцируема, но не является строго выпуклой. Это означает, что решение исходной задачи в общем случае неединственно.

Для модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН из главы 4 имеют большое значение двойственные оценки к ограничениям исходной задачи. Они могут быть найдены, в частности, на базе условий оптимальности Куна-Таккера для исходной задачи.

Глава 3. Реализация и исследование вариантов алгоритмов внутренних точек

Особенностью алгоритмов внутренних точек [17, 18, 19, 20, 44, 45, 47, 48, 58, 174] является то, что приближения к оптимальному решению задачи, итеративно генерируемые этим алгоритмом, лежат внутри области, задаваемой ограничениями-неравенствами. Этому эффекта добиваются различными способами. Например, используют идею барьеров или идею штрафов.

В этой главе приводится описание и результаты исследований нескольких вариантов реализации прямого и двойственного алгоритмов внутренних точек для решения задач оптимизации с выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями: равенствами и неравенствами. Исследуемые алгоритмы имеют в своей основе алгоритм внутренних точек [18], предложенный И.И. Дикиным [17] с изменениями вычислительного процесса, введенными В.И. Зоркальцевым [43].

Прямой алгоритм решает исходную задачу оптимизации вида (12)–(16), а двойственный алгоритм – двойственную задачу оптимизации вида (33)–(39). Оба алгоритма на каждой итерации решают вспомогательную задачу оптимизации для поиска направления корректировки текущего приближения. В её целевой функции используется квадратичная аппроксимация целевой функции решаемой задачи и квадратичные функции штрафа, заменяющие ограничения-неравенства, с меняющимися по итерациям весовыми коэффициентами. Весовые коэффициенты должны сходиться к нулю при приближении к равенству данного ограничения-неравенства. Вспомогательная задача поиска направления корректировки сводится в исследуемых алгоритмах к проблеме решения системы линейных уравнений. Для решения последней используется метод квадратного корня (называемый также методом Холецкого). Этот метод учитывает симметричность и положительную определенность матрицы системы линейных уравнений.

В работах [44, 45, 58] обсуждаются правила задания весовых коэффициентов функций штрафа в алгоритмах внутренних точек, которые позволяют обосновать сходимость целого семейства алгоритмов с различными способами задания весовых коэффициентов.

В этой главе сравниваются в экспериментальных расчетах два способа задания весовых коэффициентов: квадратичные весовые коэффициенты и линейные, деленные на множители Лагранжа, которые вычисляются на предыдущей итерации. Подобные способы задания весовых коэффициентов введены в [17, 44, 45] и исследовались на задачах линейного программирования [9, 44, 45, 47, 121]. Целью исследований данной главы является выявление наиболее эффективных способов задания весовых коэффициентов в алгоритмах для задач выпуклой оптимизации с линейными ограничениями, в том числе двусторонними неравенствами на переменные.

§3.1. Прямые алгоритмы внутренних точек

Описываемый далее алгоритм предназначен для решения исходной задачи оптимизации (12)–(16). Считаем, что матрица \mathbf{A} имеет ранг m (то есть \mathbf{A} – матрица полного ранга). Для реализации алгоритма необходимо, чтобы целевая функция в (12) была дважды дифференцируемой. Обозначим $f'_j(x_j)$ – вторую производную функции $F_j(x_j)$, $j \in J$.

Задан вектор начального приближения $\mathbf{x}^0 \in R^n$, удовлетворяющий ограничениям-неравенствам (14)–(16) в строгой форме.

Алгоритм итеративно будет повторять перечисленный в пунктах 1 – 6 набор действий. При этом алгоритм будет находиться на одном из двух этапов: на этапе ввода в область допустимых решений или на этапе оптимизации в области допустимых решений.

Пункт 1. Вычисление вектора невязки ограничений (13) для текущего k -го приближения $\mathbf{x}^k \in R^n$:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k. \quad (66)$$

Вычислим величину: $\pi_A^k = \max\{|r_i^k| : i \in I\}$. Задана величина $\delta > 0$ – параметр алгоритма, характеризующий максимальную допустимую невязку ограничений-равенств (13). Если для компонент вектора \mathbf{r}^k выполняется неравенство:

$$\pi_A^k < \delta, \quad (67)$$

то \mathbf{x}^k – принадлежит допустимой относительно ограничений-равенств (13) области. В этом случае алгоритм переходит на этап оптимизации в области допустимых решений. Если условие (67) не выполняется, то алгоритм находится на этапе ввода в область допустимых решений.

Пункт 2. Решение вспомогательной задачи поиска направления корректировки $\Delta\mathbf{x}$ текущего приближения \mathbf{x}^k . В зависимости от этапа, на котором находится алгоритм, эта задача записывается по-разному. Рассмотрим два случая.

I). Если алгоритм находится на этапе ввода в область допустимых решений, то вспомогательную задачу относительно $\Delta\mathbf{x}$ запишем в виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{(\Delta x_j)^2}{d_j^k} \rightarrow \min, \quad (68)$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{r}^k. \quad (69)$$

Величины d_j^k , $j \in J$ – положительные весовые коэффициенты, изменяющиеся по итерациям. Используется два способа их определения.

1) Квадратичные весовые коэффициенты:

$$d_j^k = (x_j^k - \underline{x}_j)^2, \text{ если } j \in J^L, \quad (70)$$

$$d_j^k = (\bar{x}_j - x_j^k)^2, \text{ если } j \in J^H, \quad (71)$$

$$d_j^k = (\min(x_j^k - \underline{x}_j, \bar{x}_j - x_j^k))^2, \text{ если } j \in J^{LH}. \quad (72)$$

2) Линейные весовые коэффициенты, деленные на множители Ла-

гранжа l_j^{k-1} , h_j^{k-1} , вычисляемые на предыдущей итерации:

$$d_j^k = (x_j^k - \underline{x}_j) / \max(\delta_2, l_j^{k-1}), \text{ если } j \in J^L, \quad (73)$$

$$d_j^k = (\bar{x}_j - x_j^k) / \max(\delta_2, h_j^{k-1}), \text{ если } j \in J^H, \quad (74)$$

$$d_j^k = \frac{\min(x_j^k - \underline{x}_j, \bar{x}_j - x_j^k)}{\max(\delta_2, l_j^{k-1}, h_j^{k-1})}, \text{ если } j \in J^{LH}. \quad (75)$$

Здесь δ_2 – параметр, представленный некоторым малым числом и позволяющий избежать деления на ноль; параметры l_j^{k-1} , h_j^{k-1} – это двойственные оценки, вычисляемые на предыдущей итерации алгоритма (если алгоритм на первой итерации, то кладем $l_j^0 = 0$, $h_j^0 = 0$).

При $j \in J^\infty$ слагаемые в целевой функции из (68) не являются штрафными, поскольку соответствуют переменным без ограничений сверху и снизу. Эксперименты показали, что ввод в область допустимых решений происходит быстрее, если в этих слагаемых брать коэффициенты d_j^k , $j \in J^\infty$ равными числу ω^k , рассчитываемому по формуле:

$$\omega^k = \max\{\omega^L, \omega^H, \omega^{LH}\}, \quad (76)$$

где $\omega^L = \max\{x_j^k - \underline{x}_j : j \in J^L\}$, $\omega^H = \max\{\bar{x}_j - x_j^k : j \in J^H\}$,

$$\omega^{LH} = \max\{\min\{x_j^k - \underline{x}_j, \bar{x}_j - x_j^k\} : j \in J^{LH}\}.$$

Найдем решение задачи (68), (69), используя правило множителей Лагранжа. Выразим компоненты вектора Δx из системы, полученной приравниванием производных функции Лагранжа нулю:

$$\Delta x_j = d_j^k [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j, \quad j \in J, \quad (77)$$

здесь $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор множителей Лагранжа ограничений (69).

Введем обозначение: $\mathbf{D}^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$ – диагональная матрица. Подставим полученные в (77) выражения для компонент вектора Δx в систему уравнений (69). Получаем систему линейных уравнений относитель-

но вектора \mathbf{u} :

$$\mathbf{A}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{r}^k. \quad (78)$$

Матрица $\mathbf{A}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^T$ – симметричная, положительно определенная. В этом случае используем для решения системы (78) метод Холецкого. Решив систему (78), получим вектор \mathbf{u}^k . Затем вычислим компоненты вектора $\Delta\mathbf{x}$, используя правило (77).

II). Если алгоритм находится на этапе оптимизации в области допустимых решений, то во вспомогательной задаче поиска направления корректировки текущего приближения будем использовать квадратичную аппроксимацию целевой функции (12) и квадратичные штрафные слагаемые за приближение к границе ограничений-неравенств:

$$\sum_{j \in J} (f_j(x_j^k) + s_j) \Delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} f_j'(x_j^k) (\Delta x_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{(\Delta x_j)^2}{d_j^k} \rightarrow \min, \quad (79)$$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = 0. \quad (80)$$

Здесь величины d_j^k при $j \in J \setminus J^\infty$ вычисляются также, как и на этапе ввода в область допустимых решений. При $j \in J^\infty$ коэффициенты d_j^k принимаются равными единице.

Найдем решение задачи (79), (80), используя правило множителей Лагранжа. Выразим компоненты вектора $\Delta\mathbf{x}$:

$$\Delta x_j = \frac{(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j - f_j(x_j^k) - s_j}{f_j'(x_j^k) + (d_j^k)^{-1}}, \quad j \in J, \quad (81)$$

Используем обозначения: \mathbf{G}^k – диагональная матрица с n элементами вида $(f_j'(x_j^k) + (d_j^k)^{-1})^{-1}$ на главной диагонали, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ – вектор с элементами $f_j(x_j^k)$, $j \in J$. Подставим полученные в (81) выражения для компонент вектора $\Delta\mathbf{x}$ в систему уравнений (80). Получим систему линейных уравнений относительно вектора \mathbf{u} :

$$\mathbf{A}\mathbf{G}^k\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{G}^k[\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{s}]. \quad (82)$$

Используем для решения системы (82) метод Холецкого. Получим вектор \mathbf{u}^k . Затем вычислим $\Delta \mathbf{x}$, используя (81).

Пункт 3. Проверка выполнения критерия остановки алгоритма. Проверим выполнение для задачи (12)–(16) условий оптимальности (13)–(18), (22), (23), (24)–(26), эквивалентных (13)–(23) (см. [60]). Рассчитаем следующие величины:

$$y_j^k = f_j(x_j^k), \quad j \in J,$$

$$\theta_j^k = y_j^k + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}^k]_j, \quad j \in J,$$

$$l_j^k = (\theta_j^k)_+, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad h_j^k = (-\theta_j^k)_+, \quad j \in J^L \cup J^{LH}.$$

Для найденных \mathbf{u}^k и $l_j^k, j \in J^L \cup J^{LH}, h_j^k, j \in J^L \cup J^{LH}$ найдем величину максимальной невязки условий (22), (23) для этого рассчитаем:

$$\pi_L^k = \max \{ |l_j^k - (f_j(\underline{x}_j) + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}^k]_j)_+| : j \in J^L \cup J^{LH}, \theta_j^k > 0 \},$$

$$\pi_H^k = \max \{ |h_j^k - ([\mathbf{A}^T \mathbf{u}^k]_j - f_j(\bar{x}_j) - s_j)_+| : j \in J^H \cup J^{LH}, \theta_j^k < 0 \}.$$

Для компонент вектора \mathbf{x} без ограничений-неравенств в задаче (12)–(16) найдем величину $\pi_\infty^k = \max \{ |\theta_j^k| : j \in J^\infty \}$.

Если справедливо условие $\max \{ \pi_L^k, \pi_H^k, \pi_\infty^k, \pi_A^k \} < \varepsilon$, где ε – параметр максимально допустимой погрешности вычислений, то условия оптимальности решаемой задачи оптимизации выполнены с требуемой точностью. В этом случае завершаем работу алгоритма, иначе переходим к пункту 4.

Пункт 4. Определение шага корректировки решения до ближайшей границы допустимой области, задаваемой ограничениями-неравенствами. Шаг до ближайшей границы определяется по формуле $\lambda_{LH} = \min(\lambda_L, \lambda_H)$, где

$$\lambda_L = \min \{ (\underline{x}_j - x_j^k)(\Delta x_j)^{-1} : j \in J^L \cup J^{LH}, \Delta x_j < 0 \},$$

$$\lambda_H = \min \{ (\bar{x}_j - x_j^k)(\Delta x_j)^{-1} : j \in J^H \cup J^{LH}, \Delta x_j > 0 \}.$$

Пункт 5. Выбор итоговой величины шага корректировки решения. Возможны два случая:

1) Алгоритм находится на этапе ввода в область допустимых решений.

Вычислим шаг λ корректировки:

$\lambda = \gamma\lambda_{LH}$, если $\lambda_{LH} \leq 1$, где $0 < \gamma < 1$, (например, $\gamma = 0,7$), или

$\lambda = 1$, если $\lambda_{LH} > 1$.

Здесь γ – параметр метода, который используется, чтобы после корректировки приближение к решению оставалось внутри допустимой области, задаваемой ограничениями-неравенствами.

2) Алгоритм на этапе оптимизации в области допустимых решений.

Найдем величину λ_p , решив задачу одномерной минимизации целевой функции (12) из точки \mathbf{x}^k по направлению $\Delta\mathbf{x}$:

$$\lambda_p = \arg \min_{\alpha \in R} \{F(\mathbf{x}^k + \alpha\Delta\mathbf{x}) + s^T(\mathbf{x}^k + \alpha\Delta\mathbf{x}) : 0 < \alpha \leq \lambda_{LH}\}.$$

Вычислим λ шаг корректировки:

$\lambda = \gamma\lambda_{LH}$, если $\min(\lambda_{LH}, \lambda_p) = \lambda_{LH}$, или

$\lambda = \lambda_p$, если $\min(\lambda_{LH}, \lambda_p) = \lambda_p$.

Пункт 6. Вычисление следующего приближения. Осуществим итеративный переход, используя направление корректировки $\Delta\mathbf{x}$ и шаг λ :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda\Delta\mathbf{x}.$$

Переходим к следующей итерации, начиная с пункта 1.

§3.2. Двойственные алгоритмы внутренних точек

В [44, 48] введены и подробно рассмотрены двойственные варианты алгоритмов внутренних точек для задач линейного программирования. Вначале эмпирически была замечена, а затем теоретически доказана [58] (на задачах линейного программирования) интересная особенность: при использовании прямого алгоритма двойственные переменные быстрее сходятся к оптимальным значениям, чем исходные переменные. Отсюда вытекает гипотеза, что лучше воспользоваться двойственным алгоритмом

внутренних точек, решающим двойственную задачу оптимизации, если требуется быстрее получить решение исходной задачи оптимизации с заданной точностью. В диссертации верность этой рекомендации проверяется на классе задач оптимизации с выпуклой целевой функцией.

Описываемый далее алгоритм предназначен для решения двойственной задачи оптимизации (33)–(39). Для реализации алгоритма необходимо, чтобы целевая функция в (33) была дважды дифференцируемой. Обозначим $\varphi'_j(y_j)$ – вторую производную функции $\Phi_j(y_j)$, $j \in J$.

Зададим начальное приближение искомых векторов $\mathbf{y}^0 \in R^n$, $\mathbf{u}^0 \in R^m$ и скаляров l_j^0 , $j \in J^L \cup J^{LH}$, h_j^0 , $j \in J^H \cup J^{LH}$, таким образом, чтобы векторы начального приближения удовлетворяли равенствам (34)–(37) и неравенствам (38), (39) в строгой форме. Из вида системы (34)–(39) заключаем, что нет необходимости итерационными методами решать эту систему поскольку, задав значения компонент вектора \mathbf{u}^0 и скаляров l_j^0 , h_j^0 для соответствующих j найдем компоненты вектора \mathbf{y}^0 из (34)–(39) прямым счетом. Таким образом, алгоритм будет работать на одном этапе – этапе оптимизации в области допустимых решений.

Пункт 1. Поиск направления корректировки текущего приближения. Найдем векторы $\Delta \mathbf{y}$, $\Delta \mathbf{u}$ и скаляры Δl_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$, Δh_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$, являющиеся оптимальным решением задачи:

$$\sum_{j \in J} \varphi_j(y_j^k) \Delta y_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} (\varphi'_j(y_j^k) + \delta_1) (\Delta y_j)^2 - \sum_{i \in I} b_i \Delta u_i - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \bar{x}_j \Delta l_j + \quad (83)$$

$$+ \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j \Delta h_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \frac{(\Delta l_j)^2}{q_j^k} + \frac{1}{2} \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \frac{(\Delta h_j)^2}{p_j^k} \rightarrow \min,$$

$$\Delta y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u}]_j = 0, \quad j \in J^\infty, \quad (84)$$

$$\Delta y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u}]_j - \Delta l_j = 0, \quad j \in J^L, \quad (85)$$

$$\Delta y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u}]_j + \Delta h_j = 0, \quad j \in J^H, \quad (86)$$

$$\Delta y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u}]_j - \Delta l_j + \Delta h_j = 0, \quad j \in J^{LH}. \quad (87)$$

Здесь δ_1 – параметр, представленный некоторым малым числом.

Для вычисления знаменателей q_j^k и p_j^k функций штрафа в целевой функции (83) при экспериментальных расчетах использовались два способа.

1) Квадратичные весовые коэффициенты:

$$q_j^k = (l_j^k)^2, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (88)$$

$$p_j^k = (h_j^k)^2, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (89)$$

2) Линейные весовые коэффициенты, деленные на множители Лагранжа:

$$q_j^k = l_j^k / \xi_j^{k-1}, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (90)$$

$$p_j^k = h_j^k / \psi_j^{k-1}, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (91)$$

Здесь величины ξ_j^{k-1} , ψ_j^{k-1} являются приближениями к множителям Лагранжа ограничений-неравенств (38), (39) задачи (33)–(39). Причем, $\xi_j^k = x_j^{k-1} - \underline{x}_j$, $j \in J^L \cup J^{LH}$, а $\psi_j^k = \bar{x}_j - x_j^{k-1}$, $j \in J^H \cup J^{LH}$. Величина x_j^{k-1} – это компонента вектора множителей Лагранжа \mathbf{x}^{k-1} ограничений-равенств (34)–(37). Вектор \mathbf{x}^{k-1} вычисляется на предыдущей (т.е. на $k-1$) итерации алгоритма (для первой итерации алгоритма зададим $\xi_j^0 = 1$, $\psi_j^0 = 1$).

Найдем решение задачи (83), (84), используя правило множителей Лагранжа. Запишем систему уравнений, содержащую условия оптимальности для задачи (83), (84). В неё войдут условия (84)–(87), а также:

$$\varphi_j(y_j^k) + (\varphi_j'(y_j^k) + \delta_1) \Delta y_j - x_j = 0, \quad j \in J, \quad (92)$$

$$x_j - \underline{x}_j + \Delta l_j / q_j^k = 0, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (93)$$

$$\bar{x}_j - x_j + \Delta h_j / p_j^k = 0, \quad j \in J^H \cup J^{LH}, \quad (94)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (95)$$

Выразим компоненты вектора $\Delta \mathbf{u}$ и скаляры Δl_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ и Δh_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$ из уравнений (92)–(94), подставим полученные выражения в

систему (84)–(87), выразим из получившихся уравнений вектор двойственных оценок \mathbf{x} и подставим в уравнение (95). Получим систему линейных уравнений относительно вектора $\Delta \mathbf{u}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{H}^k \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{H}^k \mathbf{\Pi}^k. \quad (96)$$

Здесь \mathbf{H}^k – диагональная $n \times n$ матрица, на главной диагонали которой записаны величины вида $((\varphi'_j(y_j^k) + \delta_1)^{-1} + q_j^k + p_j^k)^{-1}$, $j \in J$; $\mathbf{\Pi}^k$ – диагональная $n \times n$ матрица с величинами $(s_j - \varphi'_j(x_j^k)(\varphi'_j(x_j^k) + \delta_1)^{-1} - \underline{x}_j q_j^k + \bar{x}_j p_j^k)$, $j \in J$ на главной диагонали. Здесь для q_j^k , p_j^k справедливы соотношения:

$$q_j^k = 0, \text{ если } j \in J \text{ и } j \notin J^L \cup J^{LH}, \quad (97)$$

$$p_j^k = 0, \text{ если } j \in J \text{ и } j \notin J^H \cup J^{LH}. \quad (98)$$

Матрица $\mathbf{A}\mathbf{H}^k \mathbf{A}^T$ – симметричная, положительно определенная (напомним, что матрица \mathbf{A} имеет полный ранг). Используем для решения системы (96) метод Холецкого.

Решив систему (96), получим вектор $\Delta \mathbf{u}$. Затем вычислим вектор двойственных переменных \mathbf{x} , по правилу:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^k (\mathbf{A}^T \Delta \mathbf{u} - \mathbf{\Pi}^k). \quad (99)$$

А компоненты вектора $\Delta \mathbf{u}$ и скаляры Δl_j , $j \in J^L \cup J^{LH}$ Δh_j , $j \in J^H \cup J^{LH}$

вычислим по правилам:

$$\Delta y_j = (x_j - \varphi_j(y_j^k)) / (\varphi'_j(y_j^k) + \delta_1), \quad j \in J, \quad (100)$$

$$\Delta l_j = (\underline{x}_j - x_j) q_j^k, \quad j \in J^L \cup J^{LH}, \quad (101)$$

$$\Delta h_j = (x_j - \bar{x}_j) p_j^k, \quad j \in J^H \cup J^{LH}. \quad (102)$$

Пункт 2. Проверка выполнения критерия остановки алгоритма.

Проверим выполнение для задачи (33)–(39) условий оптимальности Куна-Таккера. Рассчитаем следующую величину:

$$\pi_R^k = \max \{ |y_j^k + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}^k]_j - l_j^k + h_j^k| : j \in J \},$$

где для l_j^k , h_j^k справедливы соотношения: 1) $l_j^k = 0$, если $j \in J$ и $j \notin J^L \cup J^{LH}$, 2) $h_j^k = 0$, если $j \in J$ и $j \notin J^H \cup J^{LH}$.

Вычислим:

$$\pi_{XY}^k = \max \{ | \varphi_j(y_j^k) - x_j | : j \in J \},$$

$$\pi_L^k = \max \{ \max \{ (x_j - \underline{x}_j)_+, |l_j^k(x_j - \underline{x}_j)| \} : j \in J^L \cup J^{LH} \},$$

$$\pi_H^k = \max \{ \max \{ (x_j - \bar{x}_j)_+, |h_j^k(\bar{x}_j - x_j)| \} : j \in J^H \cup J^{LH} \},$$

$$\pi_A^k = \max \{ | [\mathbf{Ax}]_i - b_i | : i \in I \}.$$

Если справедливо условие $\max \{ \pi_R^k, \pi_{XY}^k, \pi_L^k, \pi_H^k, \pi_A^k \} < \varepsilon$, где ε – параметр допустимой погрешности вычислений, то условия оптимальности решаемой задачи оптимизации выполнены с требуемой точностью. В этом случае завершаем работу алгоритма, иначе переходим к пункту 3.

Пункт 3. Определение шага корректировки до ближайшей границы допустимой области, задаваемой ограничениями-неравенствами. Шаг до ближайшей границы определяется по формуле $\lambda_{LH} = \min(\lambda_L, \lambda_H)$, где:

$$\lambda_L = \min \{ (-l_j^k) / \Delta l_j : j \in J^L \cup J^{LH}, \Delta l_j < 0 \},$$

$$\lambda_H = \min \{ (-h_j^k) / \Delta h_j : j \in J^H \cup J^{LH}, \Delta h_j < 0 \}.$$

Пункт 4. Выбор итоговой величины шага корректировки. Найдем величину λ_p , решив задачу одномерной минимизации целевой функции (33) по направлению, задаваемому векторами $\Delta \mathbf{y}$, $\Delta \mathbf{u}$ и скалярами Δl_j , Δh_j :

$$\begin{aligned} \lambda_p = \arg \min_{\alpha \in R} \{ & \Phi(\mathbf{y}^k + \alpha \Delta \mathbf{y}) - \mathbf{b}^T (\mathbf{u}^k + \alpha \Delta \mathbf{u}) - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j (l_j^k + \alpha \Delta l_j) + \\ & + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j (h_j^k + \alpha \Delta h_j) : 0 < \alpha \leq \lambda_{LH} \}. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициент λ шага корректировки решения по правилу:

$$\lambda = \gamma \lambda_{LH}, \text{ если } \min(\lambda_{LH}, \lambda_p) = \lambda_{LH}, \text{ где } 0 < \gamma < 1, \text{ (например, } \gamma = 0,7),$$

$$\lambda = \lambda_p, \text{ если } \min(\lambda_{LH}, \lambda_p) = \lambda_p.$$

Пункт 5. Вычисление следующего приближения. Осуществим итера-

тивный переход, используя шаг корректировки λ :

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \lambda \Delta \mathbf{y}; \quad \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \lambda \Delta \mathbf{u};$$

$$l_j^{k+1} = l_j^k + \lambda \Delta l_j^k, \quad j \in J^L \cup J^{LH}; \quad h_j^{k+1} = h_j^k + \lambda \Delta h_j^k, \quad j \in J^H \cup J^{LH}.$$

Переходим к следующей итерации, начиная с пункта 1.

§3.3. Численные эксперименты на задачах потокораспределения

Было выполнено несколько программных реализаций алгоритмов внутренних точек на языке C++. В том числе, двух вариантов прямого алгоритма, описываемого в §3.1, и двух вариантов двойственного алгоритма, описываемого в §3.2 (с квадратичными и линейными весовыми коэффициентами). Реализованные алгоритмы адаптированы для расчета модели гидравлической системы с автоматическими регуляторами расхода, а также для расчета нелинейной модели оценки возможностей отраслевых систем ТЭК в чрезвычайных ситуациях. Далее приводятся результаты численных экспериментов, проведенных с полученными реализациями алгоритмов.

Исследование зависимости скорости счета от размера входных данных для одного вида весовых коэффициентов. С помощью прямого алгоритма внутренних точек для нелинейной модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях (описание модели – в главе 4) было проведено несколько серий расчетов. В каждой серии были рассчитаны задачи различного размера. В алгоритме использовались видоизмененные квадратичные весовые коэффициенты, вычисляемыми по правилам:

$$d_j^k = \nu^k (x_j^k - \underline{x}_j)^2, \quad \text{если } j \in J^L, \quad (103)$$

$$d_j^k = \nu^k (\bar{x}_j - x_j^k)^2, \quad \text{если } j \in J^H, \quad (104)$$

$$d_j^k = \nu^k (\min(x_j^k - \underline{x}_j, \bar{x}_j - x_j^k))^2, \quad \text{если } j \in J^{LH}, \quad (105)$$

где $\nu^k = 1$, если $k \leq p$; $\nu^k = k - p + 1$, если $k > p$. Здесь k – номер итерации, p – число итераций на этапе ввода в область допустимых решений.

При таком способе задания весовых коэффициентов, они уменьшаются по итерациям не так быстро как при способе (70)–(72), поэтому погрешности вычислений, возникающие при решении вспомогательной задачи, будут меньше. Это подтверждается в проведенных экспериментах.

Исходные данные задач формировались случайным образом с использованием разработанной автором программной среды EasyLink. Эта среда позволяет, кроме случайного формирования векторов исходных данных, сформировать матрицу инцидентий графа сети при помощи визуальных инструментов. Расчеты производились на ПК с процессором Intel Pentium-4 2 ГГц. Результаты численных экспериментов приведены в таблице 1. Допустимая погрешность условий оптимальности ε равна 0.01.

Таблица 1. Результаты вычислений для рассчитанных серий задач

Число узлов, m	Число дуг, n	Кол-во решенных однотипных задач	Среднее по серии число итераций алгоритма	Среднее затрачиваемое время, сек
7	10	11	14,00	0,02
21*	28*	15	34,87	0,11
50	67	17	42,00	0,44
75	109	16	59,44	0,21
100	116	16	67,88	0,46
150	186	16	81,44	1,71
200	218	17	85,59	3,57
200	240	20	87,80	3,71
337*	589*	21	119,19	21,26
360	618	23	121,00	24,73

В серии задач, помеченных в таблице 1 звездочкой, входят два реальных примера для нелинейной модели оценки возможностей ЕСГ по снабжению потребителей в чрезвычайных ситуациях. По результатам расчетов можно построить два графика, которые представлены на рисунке 1. На рисунке символом y обозначены формулы трендов; R^2 – корреляция между точками тренда и расчетными данными.

Проведенные расчеты показали, что время работы алгоритма с квадратичными коэффициентами функций штрафа с ростом числа переменных

задачи увеличивается полиномиально.

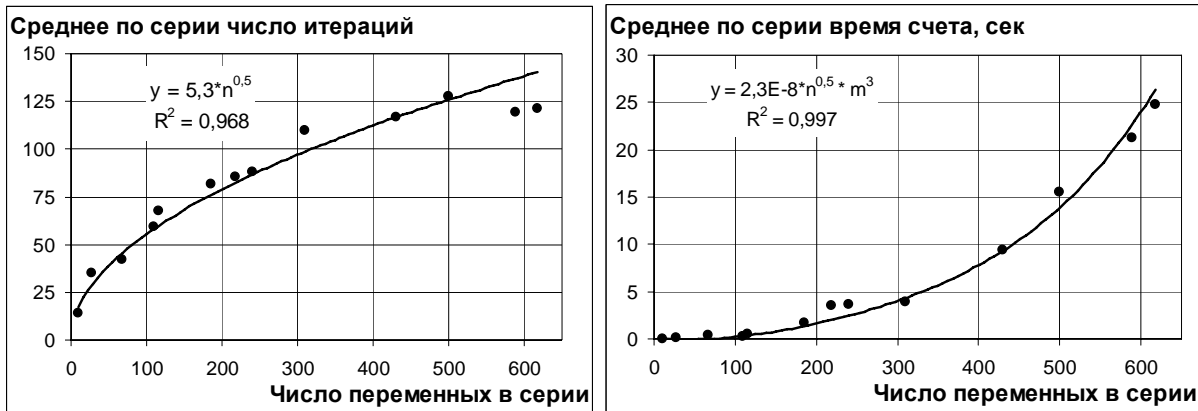


Рисунок 1. Зависимость числа итераций и времени счета алгоритмом внутренних точек от числа переменных задачи

Зависимость числа итераций от числа переменных можно представить в виде функции $\alpha \sqrt{n}$, где n – число переменных задачи, α – константа. Увеличение времени счета с ростом числа переменных можно аппроксимировать функцией $\beta n^{1/2} m^3$, где β – константа, m – число ограничений-равенств задачи.

Сравнение различных способов задания весовых коэффициентов функций штрафа во вспомогательной задаче. Были выполнены расчеты задач потокораспределения с двусторонними ограничениями на потоки по некоторым дугам с использованием прямого алгоритма внутренних точек. Для дуг с ограничениями-неравенствами использовались два вида весовых коэффициентов: квадратичные коэффициенты, вычисляемые по правилу (70)–(72) и линейные коэффициенты, деленные множители Лагранжа, которые вычисляются по правилу (73)–(75). Кроме того, для дуг без ограничений-неравенств на этапе ввода в область допустимых решений использовались два вида коэффициентов d_j^k при $j \in J^\infty$: равные единице и равные величине ω^k , вычисляемой по правилу (76). В таблице 2 приведены характеристики задач.

Таблица 2. Номер задачи потокораспределения и его характеристики

Номер задачи	Число узлов	Число ветвей	Число двусторонних ограничений
1	10	14	12
2	10	24	12
3	25	39	35
4	25	48	30
5	50	60	25
6	50	136	88
7	100	116	81
8	100	195	79
9	200	300	150
10	338	712	500

В таблице 3 приводятся результаты тестирования прямого алгоритма с квадратичными коэффициентами функций штрафа вида (70)–(72). Номера задач соответствуют номерам в таблице 2. Допустимая погрешность ε равна 0.01. Сравниваются два варианта задания коэффициентов d_j^k при $j \in J^\infty$ в целевой функции вспомогательной задачи на этапе ввода в область допустимых решений. Расчеты производились на ПК с процессором Intel Core-i5 3,2 ГГц.

Таблица 3. Результаты расчетов задач прямым алгоритмом с квадратичными коэффициентами функций штрафа

№ задачи	Квадратичные коэффициенты функций штрафа					
	Единичн. коэффиц. d_j^k при $j \in J^\infty$			Коэф. d_j^k , равные ω^k , при $j \in J^\infty$		
	Кол. итер. (этап ввода в доп. обл.)	Кол-во итерац. всего	Время, сек	Кол итер. (этап ввода в доп. обл.)	Кол-во итерац. всего	Время, сек
1	5	24	0,008	2	19	0,007
2	10	125	0,016	4	37	0,010
3	10	52	0,012	6	48	0,011
4	18	63	0,020	6	58	0,018
5	31	49	0,030	11	47	0,022
6	14	208	0,075	5	137	0,053
7	29	285	0,350	7	98	0,147
8	59	147	0,182	9	85	0,111
9	62	133	1,055	16	114	0,892
10	19	139	5,381	4	96	3,688

Сравнивая число итераций, выполненных алгоритмом на этапе ввода в область допустимых решений, приходим к выводу, что коэффициенты d_j^k , при $j \in J^\infty$, равные величине ω^k , вычисляемой по правилу (76), использовать предпочтительней, чем равные единице.

Далее в таблице 4 приводятся результаты тестирования прямого алгоритма с линейными коэффициентами функций штрафа, деленными на множители Лагранжа. Эти коэффициентами вычислялись по правилу (73)–(75). Номера задач соответствуют номерам в таблице 2. Допустимая погрешность ε равна 0.01. Также как и в предыдущей таблице сравниваются два варианта задания коэффициентов d_j^k , $j \in J^\infty$.

Таблица 4. Результаты расчетов задач прямым алгоритмом с линейными коэффициентами функций штрафа

№ задачи	Линейные коэффициенты функций штрафа, использующие множители Лагранжа					
	Единичн. весовые коэф. при $j \in J^\infty$			Весов. коэф., равные ω^k при $j \in J^\infty$		
	Кол. итер. (этап ввода в доп. обл.)	Кол-во итерац. всего	Время, сек	Кол итер. (этап ввода в доп. обл.)	Кол-во итерац. всего	Время, сек
1	6	20	0,009	1	16	0,008
2	6	32	0,016	2	18	0,010
3	24	41	0,022	18	38	0,018
4	9	36	0,016	6	34	0,015
5	5	25	0,018	2	31	0,016
6	18	66	0,031	1	25	0,015
7	6	29	0,068	1	24	0,038
8	100	238	0,290	2	25	0,039
9	19	51	0,409	6	36	0,291
10	21	54	2,109	12	40	1,556

Из таблицы 4 видно, что коэффициенты d_j^k при $j \in J^\infty$, вычисляемые по правилу (76), использовать в этом случае, также как и в предыдущем, предпочтительней.

Сравнивая результаты расчетов в таблицах 3 и 4 приходим к выводу, что количество итераций, выполненных алгоритмом, с квадратичными коэффициентами функций штрафам вида (70)–(72) значительно превосходит

на абсолютном большинстве примеров задач число итераций, выполненных алгоритмом, с линейными коэффициентами функций штрафа, деленных на множители Лагранжа (вида (73)–(75)).

Одной из причин, по которой алгоритм с квадратичными функциями штрафа сходится за большее число итераций, чем с линейными, является то, что последовательности значений квадратичных функций штрафа быстрее сходятся к нулю, чем последовательности значений линейных функций штрафа при стремлении их аргументов по итерациям к нулю. В первом случае возникает больше ошибок округлений при решении вспомогательной задачи поиска направления корректировки, что в некоторых случаях ведет к очень большому числу итераций в алгоритмах с квадратичными функциями штрафа.

Для рассмотренных вариантов реализации алгоритма время, затрачиваемое алгоритмом на одну итерацию, находится в зависимости от числа ограничений-равенств в задаче (12)–(16). Это связано с тем, что на каждой итерации решается система линейных уравнений относительно вектора двойственных переменных $\mathbf{u} \in R^m$. Отметим, что в двойственном алгоритме на каждой итерации решается система линейных уравнений относительно вектора $\Delta \mathbf{u} \in R^m$, поэтому указанное свойство для него также выполняется.

Сравнение по числу итераций прямого и двойственного алгоритмов с разными весовыми коэффициентами

В таблице 5 приведены результаты численных расчетов с использованием четырех вариантов алгоритмов внутренних точек: прямых и двойственных с двумя видами весовых коэффициентов. Использовались квадратичные весовые коэффициенты: (70)–(72) и (88), (89), а также линейные, деленные на множители Лагранжа (73)–(75) и (90), (91). Критерием остановки алгоритмов было выполнение условий оптимальности (13)–(23) с максимальной невязкой 0,1.

Таблица 5. Результаты расчетов задач потокораспределения с использованием четырех вариантов алгоритмов внутренних точек

Характеристики задач			Количество итераций для вариантов алгоритма внутренних точек			
Узлов	Ветвей	Двустор. ограничен.	Прямой	Двойств.	Прямой	Двойств.
			Квадратичные весовые коэффиц.		Линейные весовые коэффиценты	
25	39	25	30	47	24	16
25	39	35	63	42	38	20
25	48	40	25	24	15	15
25	48	40	112	46	60	20
50	60	25	47	35	37	23
50	60	50	83	41	74	24
50	136	88	118	64	25	31
50	136	100	70	34	25	21
100	116	20	64	15	42	24
100	116	81	70	39	24	22
100	195	79	65	250	32	27
100	195	90	44	28	32	26
200	300	150	56	31	26	18
200	300	150	121	39	39	23
338	712	500	108	86	27	23
338	712	500	96	79	39	31
среднее геометрическое:			66,7	44,4	32,5	22,3

Расчеты показывают, что прямой и двойственный алгоритмы с линейными весовыми коэффициентами в среднем в два раза быстрее (по числу итераций) своих аналогов с квадратичными коэффициентами. Двойственные алгоритмы в среднем в полтора раза быстрее своих прямых аналогов. Число итераций для двойственного алгоритма меньше, чем во всех остальных алгоритмах для примерно 90% решенных примеров.

Сравнение скорости сходимости исходных и двойственных переменных к оптимальным значениям. Далее приводятся результаты вычислений для прямого и двойственного алгоритма внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами, использующими множители Лагранжа. Критерием остановки алгоритмов было выполнение условий оптимальности (13)–(23) с максимальной невязкой 0,01.

В таблице 6 приводятся результаты для прямого алгоритма. Норма отклонения приближенного решения от точного по переменным исходной

задачи вычислялась по формуле: $\max_{j=1,\dots,n} |x_j^k - x_j^*|$, где x_j^* – j -ая компонента вектора-решения задачи (12)–(16), вычисленного заранее; x_j^k – j -ая компонента вектора-приближения к решению на последней итерации. Норма отклонения по переменным двойственной задачи вычислялась по формуле: $\max_{i=1,\dots,m} \{|u_i^k - u_i^*|\}$, где u_i^* – i -ая компонента вектора множителей Лагранжа ограничений (13), вычисленного заранее; u_i^k – i -ая компонента вектора приближения к вектору множителей Лагранжа на последней итерации. Значения векторов \mathbf{x}^* и \mathbf{u}^* вычислялись заранее тем же алгоритмом, при этом критерий останова для них устанавливался строже.

Таблица 6. Результаты расчетов прямым алгоритмом

Число узлов, число ветвей	Кол-во итераций	Норма отклонения по переменным исходной задачи	Норма отклонения по перем. двойственной задачи
25, 39	29	8,04E-06	2,85E-08
25, 48	29	1,04E-05	7,91E-07
50, 60	34	7,95E-05	3,11E-07
50, 136	32	2,26E-05	1,83E-07
100, 116	31	1,51E-05	4,70E-07
100, 195	30	4,05E-06	4,19E-08

В таблице 7 приводятся результаты вычислений при использовании двойственного алгоритма внутренних точек для тех же примеров.

Таблица 7. Результаты расчетов двойственным алгоритмом

Число узлов, число ветвей	Кол-во итераций	Норма отклонения по переменным исходной задачи	Норма отклонения по перем. двойственной задачи
25, 39	20	2,85E-08	1,20E-03
25, 48	21	2,90E-08	2,60E-03
50, 60	24	1,27E-08	1,59E-03
50, 136	25	4,21E-06	1,07E-03
100, 116	32	1,26E-09	1,53E-03
100, 195	24	2,00E-06	1,81E-03

Норма отклонения приближенного решения от точного по переменным двойственной задачи вычислялась по формуле:

$$\max \left\{ \max_{i=1,\dots,m} \{|u_i^k - u_i^*|\}, \max_{j=1,\dots,n} \{|y_j^k - y_j^*|\}, \max_{t \in J^{LH}} \{|l_t^k - l_t^*|, |h_t^k - h_t^*|\} \right\},$$

где u_i^* , y_t^* , l_t^* , h_t^* , – компоненты векторов, составляющих решение задачи (33)–(39), вычисленные заранее; u_i^k , y_t^k , l_t^k , h_t^k – компоненты векторов-приближений на k -ой итерации. Норма отклонения приближенного решения от точного по переменным исходной задачи вычислялась по формуле: $\max_{j=1, \dots, n} |x_j^k - x_j^*|$, где x_j^* – j -ая компонента вектора множителей Лагранжа ограничений (34)–(37), вычисленного заранее; x_j^k – j -ая компонента вектора-приближения к вектору множителей Лагранжа.

Из этих таблиц можно сделать вывод, что в прямом алгоритме норма отклонения приближенного решения от точного сходится к нулю быстрее по двойственным переменным, чем по исходным. Для двойственного алгоритма, норма отклонения приближенного решения от точного сходится к нулю быстрее по переменным исходной задачи оптимизации, чем по переменным двойственной. Данное свойство алгоритмов внутренних точек было ранее замечено в эмпирических наблюдениях для задач линейного программирования, а затем доказано теоретически [58]. Проведенные в диссертации эксперименты подтверждают наличие данного свойства алгоритмов и на задачах с выпуклой целевой функцией.

В связи с отмеченным свойством, можно дать рекомендацию: для того, чтобы быстрее получать заданную точность решения по переменным исходной задачи, лучше использовать двойственный алгоритм, чем прямой.

Численные эксперименты с реализацией алгоритма внутренних точек, учитывающей свойства разреженности матрицы системы линейных уравнений при разложении Холецкого

Вычислительная схема метода внутренних точек включает решение на каждой итерации системы линейных алгебраических уравнений (СЛУ) с симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов. Для таких матриц можно применять метод Холецкого, скорость сходимости

которого выше, чем у метода Гаусса. Однако стандартная схема реализации метода Холецкого не учитывает, что время счета можно значительно сократить для матриц с большим количеством нулей (т.е. для разреженных матриц). К таким матрицам относится матрица коэффициентов СЛУ, получаемая из матрицы инцидентий для задач потокораспределения.

При разложении произвольной положительно определенной матрицы Ω в произведение треугольных матриц LL^T множитель Холецкого L претерпевает заполнение ненулями (то есть возникают ненули на местах, где в матрице Ω были нули). Процесс заполнения ненулями увеличивает объем памяти, необходимый для хранения матрицы L и усложняет процедуры разложения и решения.

Для того, чтобы минимизировать заполнение ненулями множителя L , применяют специальные алгоритмы. Предлагаемый в этих алгоритмах подход состоит в решении вместо исходной системы линейных уравнений $\Omega x = b$ эквивалентной $P\Omega P^T (Px) = Pb$, где P – матрица перестановки.

При разработке конкретных численных алгоритмов решения СЛУ с разреженными матрицами обычно реализуют следующие подпрограммы:

- 1) Процедура упорядочивания (т.е. перестановки) матрицы СЛУ, позволяющие уменьшить число нулей в разложении LLT;
- 2) Процедура символического разложения, в котором определяется расположение нулей в будущем разложении LLT, определяется структура данных для хранения, выделяется необходимая память;
- 3) Процедура численного разложения, в котором непосредственно ищется разложение;
- 4) Процедура решения систем с треугольными матрицами, содержащая прямой и обратный ход (т.е. прямую и обратную подстановку).

Задачи поиска наилучшего переупорядочивания (максимально сохраняющие разреженность) относятся к классу NP-полных задач. Тем не менее, существуют достаточно эффективные эвристические алгоритмы, по-

звolyающие получить переупорядоченную матрицу $P\Omega P^T$, разложение Холецкого которой обладает малым заполнением ненулями.

При реализации автором алгоритма внутренних точек, учитывающего свойства разреженности матрицы СЛУ, для переупорядочивания симметричной разреженной матрицы был использован алгоритм приближенной минимальной степени – AMD (Approximate Minimum Degree ordering algorithm) [130, 131]; авторы Timothy A. Davis, Patrick R. Amestoy, Iain S. Duff. Этот алгоритм обычно намного быстрее, чем другие методы упорядочивания и алгоритм минимальной степени, которые рассчитывают точную степень [156]. Программная реализация AMD на языке ANSI C доступна для скачивания в интернете по адресу: <http://www.suitesparse.com>. Этот пакет распространяется под лицензией GNU Lesser General Public License, предоставляющей свободный доступ для его использования.

Методы численного разложения разреженных матриц являются аналогами методов разложения для плотных матриц, которые стремятся оперировать только с ненулевыми элементами. Программный пакет CHOLMOD (a sparse CHOLesky MODification package), открытый для свободного доступа по адресу <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/cholmod/>, предлагает набор необходимых для реализации численного разложения разреженной матрицы (а также для реализации прямого и обратного хода метода Холецкого) процедур. Авторскими правами на пакет CHOLMOD обладает Университет Флориды (University of Florida), а также авторы Timothy A. Davis и William W. Hager. Алгоритмы из этого пакета были внедрены в программную реализацию алгоритма внутренних точек, разработанную автором диссертационной работы.

В таблице 8 приводятся результаты расчетов численных экспериментов на задачах потокораспределения с двумя реализациями двойственного алгоритма внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами (90), (91): реализации, не учитывающей разреженность СЛУ при разложении

Холецкого и реализации, учитывающей такую разреженность. Расчеты проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core-i5 3,2ГГц. В обоих случаях критерием остановки алгоритма было условие, что максимальная невязка (13)–(23) меньше 10^{-3} .

Таблица 8. Результаты расчетов для вариантов реализации алгоритма

№ при- при- мера	Характеристики задач			Число итера- ций	Время без учета раз- реж., сек	Время с учетом раз- реж., сек	Ускоре- ние, разы
	уз- лов	вет вей	двусторонних ограничений				
1	10	24	22	28	0,001	0,001	1,00
2	25	39	25	20	0,001	0,001	1,00
3	25	39	32	19	0,001	0,001	1,00
4	25	39	35	26	0,001	0,001	1,00
5	25	48	20	21	0,001	0,001	1,00
6	25	48	30	27	0,001	0,001	1,00
7	25	48	40	26	0,001	0,001	1,00
8	50	60	20	24	0,015	0,004	3,75
9	50	60	25	27	0,015	0,004	3,75
10	50	60	50	28	0,015	0,004	3,75
11	50	136	100	28	0,031	0,015	2,07
12	50	136	100	25	0,031	0,015	2,07
13	100	116	20	27	0,031	0,015	2,07
14	100	195	79	40	0,047	0,016	2,94
15	100	195	90	25	0,031	0,008	3,88
16	100	195	90	30	0,031	0,015	2,07
17	200	300	150	22	0,187	0,016	11,69
18	200	300	150	25	0,203	0,016	12,69
19	200	300	150	27	0,203	0,016	12,69
20	338	712	500	51	1,950	0,062	31,45

Эксперименты показывают ускорение до ~30 раз в реализации алгоритма с учётом разреженности по сравнению с реализацией без учета разреженности на сетевых задачах с числом узлов и дуг от 10x14 до 338x712.

Были выполнены расчеты (тех же задач, что представлены в табл. 8) с использованием 8 решателей оптимизационной среды TOMLAB (<http://tomopt.com/tomlab/>), лицензию для расчетов в которой предоставил Marcus M. Edvall из Tomlab Optimization. Время решения для примера №20 из таблицы 8 на решателях ConSolve, NlpSolve составило 11,9 и 1068,7 секунд соответственно. Остальные результаты расчетов приводятся в табли-

це 9. Максимальная невязка условий оптимальности (13)–(23) для полученных в оптимизационной среде TOMLAB решений более 10^{-3} . В табл. 9 приводится минимальное (по всем решателям TOMLAB) время расчета указанных задач и время расчета этих задач при использовании разработанного автором двойственного алгоритма внутренних точек с внедренными процедурами обработки разреженных матриц.

Таблица 9. Сравнение результатов расчетов в оптимизационной среде TOMLAB и для алгоритма внутр. точек, учитывающего разреженность

№ прим	Время расчетов решателями оптимизационной среды TOMLAB, сек							Время для алгор. внутр. точек, учитывающего разреж., сек	Ускорение, разы
	MINOS	KNITRO	CONOPT	SNOPT	NPSOL	PDCO	Мин. время		
1	0,016	0,016	0,016	0,001	0,001	0,094	0,001	0,001	1,00
2	0,031	0,016	0,016	0,016	0,016	0,047	0,016	0,001	15,60
3	0,016	0,031	0,031	0,031	0,001	0,031	0,001	0,001	1,00
4	0,016	0,016	0,031	0,016	0,001	0,031	0,001	0,001	1,00
5	0,031	0,016	0,016	0,031	0,016	0,062	0,016	0,001	15,60
6	0,031	0,016	0,016	0,016	0,016	0,078	0,016	0,001	15,60
7	0,047	0,016	0,031	0,094	0,016	0,062	0,016	0,001	15,60
8	0,004	0,016	0,004	0,004	0,031	0,078	0,004	0,004	1,00
9	0,004	0,016	0,031	0,016	0,016	0,187	0,004	0,004	1,00
10	0,016	0,031	0,004	0,004	0,031	0,078	0,004	0,004	1,00
11	0,187	0,140	0,125	0,031	0,452	0,250	0,031	0,015	2,08
12	0,203	0,187	0,125	0,078	0,234	0,281	0,078	0,015	5,20
13	0,031	0,203	0,031	0,031	0,062	24,820	0,031	0,015	2,08
14	0,156	0,296	0,218	0,031	0,094	1,778	0,031	0,016	1,95
15	0,218	0,328	0,218	0,062	0,624	0,655	0,062	0,008	7,80
16	0,203	0,281	0,218	0,094	0,530	0,764	0,094	0,015	6,24
17	0,250	0,671	0,343	0,031	2,153	5,413	0,031	0,016	1,95
18	0,250	0,577	0,281	0,047	3,401	8,159	0,047	0,016	2,93
19	0,234	0,640	0,071	0,140	2,465	13,400	0,071	0,016	4,44
20	1,950	3,994	5,179	0,390	52,151	27,940	0,390	0,062	6,29

Эксперименты показывают, что реализованный двойственный алгоритм внутренних точек, учитывающий разреженность, имеет меньшее время счета (по сравнению с решателями оптимизационной среды TOMLAB) на приведенных примерах. Среднее ускорение по приведенным примерам составило 5,5 раза.

§3.4. Расчеты на задачах проекции точки на политоп

Были выполнены численные эксперименты с алгоритмами внутренних точек на классе задач о проекции точки (начала координат) на политоп. Этот класс задач принципиально отличается от задач потокораспределения тем, что матрица системы линейных ограничений не обязательно разрежена. Рассмотрим задачу о проекции точки на политоп [63]:

$$\frac{1}{2} x^T Hx \rightarrow \min \quad (106)$$

$$x - A\lambda = 0, \quad (107)$$

$$e^T \lambda = 1, \quad (108)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (109)$$

Заданы матрица $A \in R^{n \times m}$; вектор $h \in R^n$, $h > 0$; диагональная матрица $H \in R_{\oplus}^{n \times n}$, $H = \text{diag}\{h_j\}$; вектор $e \in R^m$, $e = (1, \dots, 1)^T$. Переменными задачи являются векторы $x \in R^n$, $\lambda \in R^m$.

Двойственную задачу о проекции точки на политоп с использованием преобразования Лежандра можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{u_j^2}{h_j} - w \rightarrow \min, \quad (110)$$

$$A^T u - we - l = 0, \quad (111)$$

$$l \geq 0. \quad (112)$$

Переменными этой задачи являются векторы: $u \in R^n$, $w \in R$, $l \in R^m$.

Условия оптимальности для исходной и двойственной задачи будут содержать условия (107)–(109), (111), (112), а также:

$$Hx - u = 0, \quad (113)$$

$$l_i \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (114)$$

Описание прямого алгоритма внутренних точек для задачи о проекции точки на политоп

Для решения задачи (106)–(109) на языке C++ был реализован прямой алгоритм внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами, деленными на множители Лагранжа предыдущей итерации. Методика, применяемая для построения этого алгоритма совпадает с описанной в §3.1., но применяется она не для задачи (12)–(16), а для задачи (106)–(109).

Построим начальное приближение удовлетворяющее (107), (108), а также в строгом виде (109). Такое приближение задается, например, следующим образом:

$$\lambda_i^0 = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x^0 = A\lambda^0.$$

Сразу со стартовой точки начинается процесс оптимизации в области допустимых решений.

Алгоритм состоит в итеративном выполнении пунктов 1-4.

Пункт 1. Поиск направления корректировки текущего приближения.

Найдем векторы Δu^k , Δl^k и скаляр Δw^k , являющиеся решением задачи:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} h_j (x_j^k + \Delta x_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(\Delta \lambda_i)^2}{d_i^k} \rightarrow \min \quad (115)$$

$$\Delta x - A\Delta \lambda = 0, \quad (116)$$

$$e^T \Delta \lambda = 0. \quad (117)$$

Для вычисления весовых коэффициентов d_i^k в целевой функции при реализации алгоритма использовались два вида функций:

1) квадратичная по λ_i^k функция

$$d_i^k = (\lambda_i^k)^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (118)$$

2) линейная по λ_i^k функция с множителями Лагранжа:

$$d_i^k = \lambda_i^k / \max(\varepsilon, l_i^{k-1}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (119)$$

Здесь величины λ_i^{k-1} являются приближениями к множителям Лагранжа ограничений-неравенств (112) задачи (110)–(112), которые вычисляются на предыдущей итерации алгоритма.

Найдем решение задачи (83)–(117). Условия оптимальности этой задачи включают, (116), (117), а также:

$$H(x^k + \Delta x) - u = 0, \quad (120)$$

$$A^T u - we + (D^k)^{-1} \Delta \lambda = 0, \quad (121)$$

где D^k – диагональная матрица с элементами d_i^k , $i = 1, \dots, m$ на диагонали.

Выразим вектор $\Delta \lambda$ из (121) и вектор Δx (120):

$$\Delta \lambda = -D^k (A^T u - we), \quad (122)$$

$$\Delta x = H^{-1} u - x^k. \quad (123)$$

Подставим выражения для вектора $\Delta \lambda$ и Δx в (116), (117) получим систему линейных уравнений с $n + 1$ переменными (вектором u и скаляром w):

$$H^{-1} u - x^k + AD^k (A^T u - we) = 0, \quad (124)$$

$$-e^T D^k (A^T u - we) = 0. \quad (125)$$

Решим полученную систему линейных уравнений (124), (125). Найдем векторы $\Delta \lambda$ и Δx с использованием (122), (123). Таким образом, получим векторы Δx^k , $\Delta \lambda^k$, вектор множителей Лагранжа u^k и множитель Лагранжа w^k . Вектор множителей Лагранжа l^k вычисляется с использованием (111).

Пункт 2. Проверка выполнения критерия останова. Найдем максимальную невязку условий оптимальности (107)–(109), (111)–(114) для текущего приближения к решению. (107)–(109),

Если максимальная невязка условий оптимальности меньше заданной допустимой погрешности вычислений, завершаем работу алгоритма, иначе переходим к пункту 3.

Пункт 3. Выбор шага корректировки текущего приближения. Сначала

определим шаг корректировки до ближайшей границы допустимой области, задаваемой ограничениями-неравенствами:

$$\mu_L = \min\{(-\lambda_j^k)/\Delta\lambda_j^k : j \in L, \Delta\lambda_j^k < 0\},$$

Найдем величину λ_p , решив задачу одномерной минимизации целевой функции (110) по направлению, задаваемому векторами переменных :

$$\mu_p = \arg \min\left\{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} h_j(x_j^k + \alpha \Delta x_j^k)^2 : 0 < \alpha \leq \mu_L\right\}. \quad (126)$$

Вычислим итоговый шаг λ_k корректировки решения:

$$\mu_k = \min(\gamma\mu_L, \mu_p), \text{ где } 0 < \gamma < 1, \text{ (например, } \gamma = 0,7\text{)}.$$

Пункт 4. Вычисление следующего приближения. Осуществим итеративный переход, используя шаг корректировки μ_k :

$$x^{k+1} = x^k + \mu_k \Delta x^k;$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \mu_k \Delta \lambda^k.$$

Описание двойственного алгоритма

На C++ был также реализован двойственный алгоритм внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами, деленными на множители Лагранжа предыдущей итерации. Этот алгоритм построен по методике, аналогичной описанной в §3.2., но применяется не к задаче (33)–(39), а к задаче (110)–(112).

Для двойственной задачи можно построить начальное приближение удовлетворяющее (111), а также в строгом виде (112). Такое приближение задается, например, следующим образом:

$$\lambda_i^0 = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$u^0 = HA\lambda^0,$$

$$w^0 = \min\{[A^T u^0]_i, \quad i = 1, \dots, m\} - 1,$$

$$l_i^0 = [A^T u^0]_i - w^0.$$

Сразу со стартовой точки начинается процесс оптимизации в области допустимых решений.

Алгоритм состоит в итеративном выполнении пунктов 1-4.

Пункт 1. Поиск направления корректировки текущего приближения.

Найдем векторы Δu^k , Δl^k и скаляр Δw^k , являющиеся решением задачи:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{(u_j^k + \Delta u_j)^2}{h_j} - \Delta w + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(\Delta l_i)^2}{q_i^k} \rightarrow \min \quad (127)$$

$$A^T \Delta u - \Delta w e - \Delta l = 0 \quad (128)$$

Для вычисления весовых коэффициентов q_j^k в целевой функции при реализации алгоритма использовались два вида функций:

1) квадратичная по l_i^k функция:

$$q_i^k = (l_i^k)^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (129)$$

2) линейная по l_i^k функция с множителями Лагранжа:

$$q_i^k = l_i^k / \max(\varepsilon, \lambda_i^{k-1}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (130)$$

Здесь величины λ_i^{k-1} являются приближениями к множителям Лагранжа ограничений-неравенств (112) задачи (110)–(112), которые вычисляются на предыдущей итерации алгоритма.

Найдем решение задачи (83), (87). Условия оптимальности этой задачи включают (108), (87), а также:

$$H^{-1}(u^k + \Delta u) - A\lambda = 0, \quad (131)$$

$$\lambda = -(Q^k)^{-1} \Delta l, \quad (132)$$

где Q^k – диагональная матрица с элементами q_i^k , $i = 1, \dots, m$ на диагонали.

Подставим выражения для вектора Δl из (87) и вектора λ из (121) в (120), а также для λ в (108) и получим равенства:

$$H^{-1}(u^k + \Delta u) + A(Q^k)^{-1}(A^T \Delta u - \Delta w e) = 0, \quad (133)$$

$$e^T (Q^k)^{-1} (-A^T \Delta u + \Delta w e) = 1. \quad (134)$$

Решим полученную систему линейных уравнений (124), (125) относительно вектора Δu и скаляра Δw . Найдем векторы Δl и λ с использованием (87) и (121). Таким образом, получим векторы Δu^k , Δl^k , скаляр Δw^k и вектор множителей Лагранжа λ^k .

Пункт 2. Проверка выполнения критерия останова. Найдем максимальную невязку условий оптимальности (107)–(109), (111)–(114) для текущего приближения к решению.

Если максимальная невязка условий оптимальности меньше заданной допустимой погрешности вычислений, завершаем работу алгоритма, иначе переходим к пункту 3.

Пункт 3. Выбор шага корректировки текущего приближения. Сначала определим шаг корректировки до ближайшей границы допустимой области, задаваемой ограничениями-неравенствами:

$$\lambda_L = \min \{ (-l_j^k) / \Delta l_j^k : j \in L, \Delta l_j^k < 0 \},$$

Найдем величину λ_p , решив задачу одномерной минимизации целевой функции (110) по направлению, задаваемому векторами переменных :

$$\lambda_p = \arg \min \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{(u_j^k + \alpha \Delta u_j^k)^2}{h_j} - \alpha \Delta w : 0 < \alpha \leq \lambda_L \right\}. \quad (135)$$

Вычислим итоговый шаг λ_k корректировки решения:

$$\lambda_k = \min(\gamma \lambda_L, \lambda_p), \text{ где } 0 < \gamma < 1, \text{ (например, } \gamma = 0,7 \text{).}$$

Пункт 4. Вычисление следующего приближения. Осуществим итеративный переход, используя шаг корректировки λ_k :

$$u^{k+1} = u^k + \lambda_k \Delta u^k ;$$

$$l^{k+1} = l^k + \lambda_k \Delta l^k ;$$

$$w^{k+1} = w^k + \lambda_k \Delta w^k .$$

Вектор переменных x исходной задачи рассчитывается после завершения итеративного процесса описанного выше с использованием (107) и λ^k .

Результаты экспериментальных расчетов

Были проведены экспериментальные расчеты на нескольких задачах о проекции точки на политоп с матрицей A размером от 10×5 до 1000×800 . Исходные данные формировались случайным образом. Элементы матрицы A ($n \times m$) лежат в диапазоне от -50 до 50 . Компоненты вектора h – в диапазоне от 0 до 10 . Расчеты проводились на компьютере с процессором Intel Core-i5 3,2 ГГц. Критерием останова служило достижение максимальной невязки условий оптимальности (называемой в таблице погрешностью) меньше 10^{-2} (а также ещё 10^{-1} для квадратичных весовых коэффициентов).

Таблица 10. Результаты экспериментальных расчетов для задачи проекции точки на политоп

Характеристики задачи		Число итерации алгоритма внутренних точек					
		Прямой алгоритм			Двойственный алгоритм		
		квадратичные весовые коэффициенты		линейные весовые коэф. с множ. Лагр.	квадратичные весовые коэф.		линейные весовые коэф. с множ. Лагр.
погр. 0,01	погр. 0,1	погр. 0,01	погр. 0,1				
строка (n)	столбцов (m)						
10	5	19	9	12	21	15	11
10	8	14	12	13	20	16	11
20	15	30	12	13	34	28	13
20	15	20	12	15	36	26	13
50	30	40	15	16	41	29	13
50	35	30	18	21	40	22	13
50	40	88	18	22	40	24	12
50	45	64	15	26	118	22	12
50	45	216	65	33	42	24	13
100	75	40	28	28	41	21	12
100	80	129	29	32	50	28	13
100	90	62	23	36	85	23	13
150	25	20	14	18	46	40	13
150	140	485	40	45	96	20	13
200	100	70	28	22	41	27	13
200	180	>500	47	42	50	20	13
250	100	97	49	27	46	22	13
250	200	>500	294	41	38	20	13
400	300	>500	>500	31	37	19	13
400	350	>500	>500	61	143	16	14
500	400	>500	295	53	58	16	13
500	450	>500	>500	57	98	16	14
1000	200	60	20	20	50	22	11
1000	700	>500	>500	54	31	13	13
1000	800	>500	>500	61	147	13	14

Экспериментальные расчеты показывают, что на рассмотренном классе задач о проекции точки на политоп алгоритмы внутренних точек обладают следующими свойствами:

1) При использовании линейных весовых коэффициентов, деленных на множители Лагранжа (как в прямом, так и в двойственном алгоритмах внутренних точек), приближенное решение с заданной точностью находится за меньшее число итераций, чем при использовании квадратичных весовых коэффициентов (на решенных примерах в среднем более чем в 2 раза для прямого и более чем в 1,8 раза для двойственного алгоритма).

2) Двойственный алгоритм приводит к приближенному решению за меньшее число итераций, чем прямой (на решенных примерах для квадратичных коэффициентов двойственный алгоритм быстрее в среднем в 2,3 раза; для линейных весовых коэффициентов быстрее в среднем в 3,9 раза).

3) Величина максимальной невязки условий оптимальности в критерии останова сильно сказывается на числе итераций для алгоритмов с квадратичными весовыми коэффициентами. При увеличении погрешности вычислений количество итераций до остановки расчетов резко снижается.

4) Число итераций для двойственного алгоритма внутренних точек с линейными весовыми коэффициентами, использующими множители Лагранжа, практически не увеличивается с ростом размера задачи на рассмотренных примерах и слабо зависит от заданной погрешности (при снижении величины максимальной невязки условий оптимальности с 10^{-2} до 10^{-1} число итераций уменьшается в среднем на 2 итерации на рассмотренных примерах).

Полученные результаты на данном классе задач подтверждают рекомендации по выбору вариантов алгоритмов внутренних точек, сделанные ранее для задач потокораспределения.

Глава 4. Нелинейные модели потокораспределения в экономике и энергетике

В этой главе исследуются свойства моделей потокораспределения, которые описывают системы, служащие для транспортировки различных видов продукции и ресурсов между источниками и потребителями. При формулировке и анализе моделей используются двойственные задачи выпуклой оптимизации и алгоритмы внутренних точек, свойства которых исследовались во второй и третьей главах. Большое значение для анализа свойств моделей имеют интерпретации, получаемые с использованием двойственных постановок задач оптимизации.

§4.1. Модель гидравлической системы с автоматическими регуляторами расхода

При эксплуатации трубопроводных систем часто возникает необходимость в установке на них автоматических регулирующих устройств, позволяющих обеспечивать требуемые параметры (расходы на участках трубопроводов, давление в узлах и у потребителей, перепады давления на участках трубопроводов) без оперативного вмешательства. Установка автоматических регуляторов в таких системах позволяет существенно снизить эксплуатационные расходы и повысить надежность функционирования как системы в целом, так и отдельных ее элементов.

Для решения задачи потокораспределения в системах с автоматическими регуляторами ранее применялись модели на основе систем уравнений и неравенств [20, 107, 114, 123], в которых переменными были гидравлические сопротивления регуляторов. Это приводило к необходимости введения в модель нелинейных зависимостей между гидравлическими сопротивлениями регуляторов и потерями напора в них. Такие зависимости усложняли модель и, в частности, затрудняли исследование вопросов су-

существования и единственности решения, а так же теоретическое обоснование используемых алгоритмов. Теоретическое исследование свойств решения такой задачи может быть получено на основе сведения её к задаче выпуклого программирования. Такой приём ранее применялся для исследования классической задачи потокораспределения (без регуляторов расхода и давления) [31] и позволил доказать существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

В данном параграфе предлагается модель гидравлической системы с автоматическими регуляторами расхода, отличием которой от существующих моделей является следующее. Во-первых, в рассматриваемой здесь постановке задачи отыскиваются не значения гидравлических сопротивлений регуляторов, а только потери напора, обусловленные работой регулятора. Во-вторых, модель представляется в виде системы уравнений и неравенств, использующей функции-срезки, а также в виде двойственных задач оптимизации, соответствующих постановкам из главы 2.

Гидравлической системе соответствует ориентированный граф. Пусть m – число узлов, n – число дуг этого графа, \mathbf{A} – матрица инцидентности графа размера $m \times n$ с элементами: $a_{ij} = 1$, если дуга j выходит из узла i ; $a_{ij} = -1$, если дуга j входит в узел i ; $a_{ij} = 0$, если дуга j не инцидентна узлу i . Далее считаем, что рассматриваемый граф связный. Тогда ранг матрицы \mathbf{A} равен $m - 1$. Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ – множество всех узлов, $J = \{1, \dots, n\}$ – множество всех дуг сети. Пусть J^{LH} – множество дуг с регуляторами расхода, а J^∞ – множество остальных дуг. Эти множества являются разбиением множества номеров всех дуг: $J^{LH} \cup J^\infty = J$ и $J^{LH} \cap J^\infty = \emptyset$.

Задача потокораспределения в гидравлических системах с автоматическими регуляторами расхода сводится к решению системы уравнений и неравенств (13)–(23) из второй главы, в которой:

$$\underline{x}_j = 0, \quad j \in J^{LH}, \quad \text{и} \quad J^L = J^H = \emptyset, \quad \text{и} \quad \mathbf{s} = -\mathbf{c}. \quad (136)$$

Систему уравнений и неравенств (13)–(23) можно переписать в виде:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (137)$$

$$0 \leq x_j \leq \bar{x}_j \quad j \in J^{LH}, \quad (138)$$

$$y_j = f_j(x_j), \quad j \in J, \quad (139)$$

$$y_j = c_j + (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j, \quad j \in J^\infty, \quad (140)$$

$$y_j = \min\{f_j(\bar{x}_j), (c_j + (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j)_+\}, \quad j \in J^{LH}, \quad (141)$$

$$l_j = (-c_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j)_+, \quad j \in J^{LH}, \quad (142)$$

$$h_j = (c_j + [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - f_j(\bar{x}_j))_+, \quad j \in J^{LH}. \quad (143)$$

Заданными являются векторы: $\mathbf{b} \in R^m$, $\mathbf{c} \in R^n$ и величины максимально допустимых расходов транспортируемой среды \bar{x}_j по дугам $j \in J^{LH}$.

Компоненты вектора \mathbf{b} – расходы среды из системы либо в систему (потребление из трубопроводной системы или поставки в неё транспортируемой жидкости) для узлов $i = 1, \dots, m$. Причём $\sum_{i=1}^m b_i = 0$. Если $b_i > 0$, то величина b_i является расходом среды в систему в узле i . Если $b_i < 0$, то величина $|b_i|$ задает расход среды из системы в узле i . Компоненты вектора \mathbf{c} (величины c_j) – заданные приращения напора (в результате работы насосов) на дугах $j = 1, \dots, n$.

Искомыми величинами являются компоненты векторов: $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{y} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$. Величины x_j , $j \in J$ – расходы транспортируемой среды на дугах. Величины y_j , $j \in J$ – потери напора на дугах. Величины u_i , $i \in I$ – пьезометрические напоры (или просто напоры) в узлах. Вычисляемые по правилам (142), (143) величины l_j и h_j , $j \in J^{LH}$ показывают насколько потеря напора на дугах с регуляторами больше или меньше разности напоров в концевых узлах этих дуг (если $c_j = 0$ для дуг $j \in J^{LH}$).

Уравнение (137) выражает баланс расходов транспортируемой жидкости в узлах. Ограничения-неравенства $x_j \leq \bar{x}_j$ для $j \in J^{LH}$ в условии (138) означают, что искомые расходы на дугах с регуляторами не могут превышать максимально допустимого расхода на каждой из этих дуг. Для дуг с регуляторами расхода, в силу их конструктивных особенностей, не допускается движение потока в обратном направлении. Это условие отражено в ограничении $x_j \geq 0$ для $j \in J^{LH}$. Далее считаем, что $\bar{x}_j > 0$, $j \in J^{LH}$.

Условие (139) характеризует взаимосвязь между расходами транспортируемой среды x_j и потерями напора y_j на всех дугах $j = 1, \dots, n$. В теории гидравлических цепей [101] это условие принято называть «замыкающим соотношением». При расчётах трубопроводных систем, по которым транспортируется несжимаемая среда, обычно используется квадратичная зависимость потери напора от расхода транспортируемой среды

$$f_j(x_j) = \alpha_j x_j^2 \text{sign}(x_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

где α_j – заданный положительный коэффициент, называемый гидравлическим сопротивлением.

Уравнения (140) и (141) выражают баланс потерь, приращений и разности напоров на дугах. Так, согласно (140), для дуг, где нет регуляторов расхода, потеря напора y_j на дуге j представляется в виде суммы заданного приращения напора c_j и разности напоров $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ в концевых узлах дуги.

Для дуг с регуляторами расхода потеря напора определяется по более сложному правилу, выраженному условием (141). Если $c_j + (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j \leq 0$, $j \in J^{LH}$, то согласно (141), полагаем $y_j = 0$, $j \in J^{LH}$.

Такая величина потери напора будет соответствовать согласно условию (139) нулевому расходу, $x_j = 0$. В этом случае согласно (142), (143) справедливо: $l_j = -c_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j$ и $h_j = 0$. Таким образом, $l_j > 0$ – величина

превышения напора в конечном узле дуги j над напором в начальном узле (за вычетом величины действующего напора c_j). Поскольку $y_j = 0$, то превышение напора l_j , не создает потока по дуге j , то есть превышение напора «запирается» регулятором.

Согласно (141), если величина $c_j + (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$, $j \in J^{LH}$ положительная и превосходит значение $f_j(\bar{x}_j)$, то $y_j = f_j(\bar{x}_j)$. Это означает, что регулятор расхода дросселирует величину напора $c_j + (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ до значения $f_j(\bar{x}_j)$, при котором расход по дуге будет равен максимально допустимому расходу \bar{x}_j . В этом случае согласно (142), (143) справедливо: $l_j = 0$ и $h_j = c_j + [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - f_j(\bar{x}_j)$, то есть переменная $h_j > 0$ отражает величину дросселируемого напора в регуляторе.

Присутствие нелинейных ограничений в системе (137)–(143) затрудняет исследование вопросов существования и единственности решений непосредственно из анализа этой системы. Исследование этих вопросов облегчается при использовании представления системы в виде экстремальных задач. Подобный подход применялся в работе [31] для задачи потокораспределения без ограничений-неравенств, к которой сводится система (137)–(143) при $J^{LH} = \emptyset$ (то есть при отсутствии ограничений-неравенств). Согласно теоремам из §1 второй главы системе (137)–(143) при $J^{LH} \neq \emptyset$ (при наличии ограничений-неравенств) также соответствуют двойственные задачи выпуклого программирования. Это позволяет эффективно использовать развитую теорию выпуклой оптимизации (в том числе алгоритмы внутренних точек) для исследования и решения системы (137)–(143), которые позволяют эффективно учитывать при решении ограничения-неравенства.

Компоненты вектора \mathbf{u} имеют неединственные значения в решении системы (137)–(143). Это связано, в том числе, с тем, что ранг матрицы \mathbf{A}

равен $m - 1$. Для того, чтобы однозначно определить компоненты вектора \mathbf{u} необходимо зафиксировать одну из его компонент. Если система уравнений и неравенств (44)–(49), (51) имеет нетривиальные решения, то фиксации одной из компонент вектора \mathbf{u} может оказаться не достаточно, чтобы однозначно определить все его компоненты. В этом случае часть переменных $l_j, h_j, j \in J^{LH}$ также будут иметь неединственные значения.

В диссертационной работе [29] было показано, что в случае, когда в системе (137)–(143) нет ограничений-неравенств на переменные, решение исходной задачи (12), (13) с использованием метода Ньютона (после сведения ее к задаче безусловной оптимизации), равносильно использованию хорошо известного в теории гидравлических цепей метода контурных расходов для «контурной» системы уравнений. Решение же двойственной задачи (33), (34) с использованием метода Ньютона (после сведения ее к задаче безусловной оптимизации), равносильно использованию хорошо известного метода узловых давлений для «узловой» системы уравнений.

Алгоритмы внутренних точек, применяемые к исходной и двойственной задачам (при выполнении (136)), можно по аналогии считать обобщением (или адаптацией) методов контурных расходов и узловых давлений на задачи потокораспределения с ограничениями-неравенствами. В этих алгоритмах, как и в методе Ньютона, используется квадратичная аппроксимация целевой функции. Отличительной чертой, алгоритмов внутренних точек являются правила, применяемые для учета ограничений-неравенств.

Часть приведенных в третьей главе экспериментов с использованием алгоритмов внутренних точек была выполнена на исходных данных для описанной выше модели.

Пример для гидравлической сети с регуляторами

Рассмотрим гидравлическую цепь из 11 узлов и 18 дуг, схема которой представлена на рисунке 2. Притоки и стоки отсутствуют, т.е. $\mathbf{b} = 0$. Пье-

зометрический напор u_{11} равен 30 м. Компоненты вектора \mathbf{c} приращений напора на дугах равны нулю, кроме $c_{18} = 100$ м. Автоматические регуляторы расхода присутствуют на дугах $j \in J^{LH}$, где $J^{LH} = \{4, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.

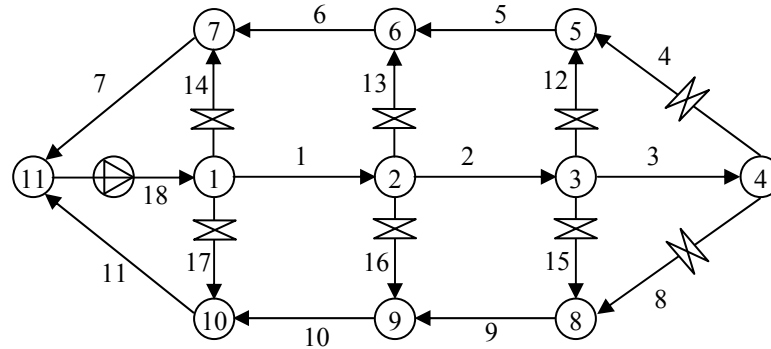


Рисунок 2. Схема гидравлической цепи

Множество дуг без регуляторов задано: $J^\infty = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 18\}$.

В рассматриваемом примере использовалась квадратичная зависимость потери напора от расхода транспортируемой среды по дугам сети. В таблице 11 приведены исходные значения гидравлического сопротивления α_j и максимально допустимого расхода \bar{x}_j для всех дуг схемы.

№ дуги, j	α_j	\bar{x}_j	№ дуги, j	α_j	\bar{x}_j
1	6.5E-6	-	10	3E-5	-
2	7E-6	-	11	2E-5	-
3	8E-6	-	12	2E-4	200
4	5E-6	200	13	2E-4	200
5	4E-5	-	14	2E-4	200
6	3E-5	-	15	3E-4	200
7	2E-5	-	16	3E-4	200
8	5E-5	200	17	3E-4	200
9	4E-5	-	18	6E-6	-

Таблица 11. Исходные данные

Запишем исходную задачу оптимизации для данного примера:

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{18} \alpha_j |x_j|^3 - \sum_{j=1}^{18} c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad 0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j \in J^{LH},$$

и двойственную задачу оптимизации:

$$\frac{2}{3} \sum_{j=1}^{18} \sqrt{\frac{|y_j|^3}{\alpha_j}} - \sum_{i=1}^{11} b_i u_i + \sum_{j \in J^{LH}} \bar{x}_j h_j \rightarrow \min,$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j = 0, \quad j \in J^\infty,$$

$$y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - l_j + h_j = 0, \quad j \in J^{LH},$$

$$l_j \geq 0, \quad h_j \geq 0, \quad j \in J^{LH}.$$

Для получения решения исходной задачи прямым алгоритмом внутренних точек, описываемом в главе 3, потребовалось 14 итераций. Погрешность решения, т.е. максимальная невязка среди условий оптимальности составила менее 0.01. Результаты расчета приведены в таблице 12. Из таблицы видно, что все регуляторы осуществляют регулирование расхода до максимально допустимого, т.к. для всех дуг, на которых установлены регуляторы, $h_j > 0$, $j \in J^{LH}$. Соответственно, $l_j = 0$ для этих же номеров дуг, так как ни на одной из дуг с регулятором расход не равен нулю.

Номер дуги, j	Расход, x_j , т/ч	Потеря напора, y_j , м	Напор, теряемый в регуляторе, h_j , м	Номер узла, i	Напор в узле, u_i , м
1	1200	9,36	–	1	114.64
2	800	4,48	–	2	105.28
3	400	1,28	–	3	100.8
4	200	0,2	39.32	4	99.52
5	400	6,4	–	5	60.0
6	600	10,8	–	6	53.6
7	800	12,8	–	7	42.8
8	200	2	37.52	8	60.0
9	400	6,4	–	9	53.6
10	600	10,8	–	10	42.8
11	800	12,8	–	11	30.0
12	200	8	32.8		
13	200	8	43.68		
14	200	8	63.84		
15	200	12	28.8		
16	200	12	39.68		
17	200	12	59.84		
18	1600	15,36	–		

Таблица 12. Результаты расчета для примера гидравлической сети

Напор c_{18} , создаваемый насосами на дуге 18 больше, чем тратится в контурах системы на сопротивление при передаче по замкнутому циклу. Излишки напора дросселируются в результате работы регуляторов на дугах $j \in J^{LH}$. Если снизить напор на дуге 18 на величину не большую, чем $\min\{h_j : j \in J^{LH}\}$, то расходы и потери напора в системе не изменятся, а напоры, теряемые в регуляторах уменьшаться на эту величину.

§4.2. Нелинейная транспортная модель (экономическая интерпретация; варианты потокораспределения и тарифообразования)

В параграфе исследуются свойства модели потокораспределения, описывающей транспортную систему, в которой однородный продукт передается из пунктов производства в пункты потребления по сети транспортных связей. При построении модели используется строго выпуклая функция издержек на передачу. Это несколько упрощает реальную ситуацию. Однако исследование свойств такой модели является важным и, в т.ч., для прояснения более общих ситуаций.

Подход, основанный на использовании теории симметричной двойственности для исследования свойств моделей потокораспределения, уже применялся ранее, например, в работах [29, 53]. Отличием приводимых здесь исследований является введение в модель ограничений сверху и двусторонних ограничений, а также доработкой экономической интерпретации.

Модель может быть полезна для изучения проблем и механизмов управления транспортом общего пользования, системами транспорта тепла, электроэнергии, воды, природного газа. Особенно в связи с осуществляемыми в этих системах реформами. В частности, важной проблемой для этих систем является формирование рациональных транспортных тарифов, которые должны с одной стороны покрывать издержки и, с другой стороны, стимулировать пользователей трубопроводных, электрических сетей и

железных дорог к оптимизации издержек на перевозки.

Описание и экономическая интерпретация модели

Направленный граф, описывающий транспортную сеть, имеет m узлов, и n дуг. Положительная по объему транспортировка продукта должна осуществляться в направлении дуг графа. Матрицу инцидентий узлов и дуг графа размера $m \times n$ обозначим \mathbf{A} , её элементы имеют значения:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если узел } i \text{ не связан с дугой } j, \\ -1, & \text{если узел } i \text{ является началом дуги } j, \\ +1, & \text{если узел } i \text{ является концом дуги } j. \end{cases}$$

Обозначим $I = \{1, \dots, m\}$ – множество номеров всех узлов, $J = \{1, \dots, n\}$ – множество номеров всех дуг, $I^S \subset I$ – множество номеров узлов-источников, $I^C \subset I$ – множество номеров узлов-потребителей. Зададим множества $J^\infty, J^L, J^H, J^{LH}$, являющиеся разбиением множества J .

Для каждого узла i сети известен объем b_i , входящего в сеть или выходящего из сети ресурса. Если $b_i > 0$, то в узле потребитель и ресурс выходит из сети. Если $b_i < 0$, то в узле источник и ресурс входит в сеть в количестве $|b_i|$. Суммарный объем поставляемого в сеть ресурса должен быть равен суммарному объему ресурса, выходящего из сети.

Требуется найти вектор $\mathbf{x} \in R^n$ объемов передачи ресурса по дугам сети. Заданы предельные объемы передачи $\underline{x}_j, j \in J^L \cup J^{LH}$ и $\bar{x}_j, j \in J^H \cup J^{LH}$.

Считаем, что функция переменных издержек на передачу ресурса по дуге j представима в виде суммы нелинейной и линейной функций:

$$VC_j(x_j) = F_j(x_j) + s_j x_j \quad (144)$$

где F_j – заданная функция, s_j – заданный коэффициент, $j \in J$.

В данной модели ограничимся случаем, когда все функции F_j принадлежат множеству Z , введенному в главе 2. Это, в частности, означает,

что предельные издержки на передачу $f_j(x_j) + s_j$ (определяемые согласно экономической теории как производные функции $VC_j(x_j)$) будут строго возрастающими функциями.

Постоянные издержки на передачу ресурса в модели не учитываются. Величина s_j может иметь отрицательные значения для некоторых $j \in J$. Это означает, что вместо издержек на соответствующих дугах имеем доплаты за перевозку продукции. Такой случай может иметь место, например, при субсидировании перевозчика или иной форме ведения политики протекционизма в рамках внешнеторговой политики государства [72].

Исходная задача оптимизации (12)–(16), двойственная задача (33)–(39), самосопряженная задача (53), (13)–(16), (34)–(39), система уравнений и неравенств (13)–(23), введенные во второй главе, являются равносильными способами описания модели. Проведем их интерпретацию.

Исходная задача описывает потокораспределение ресурса по сети, при котором суммарные переменные издержки минимальны. Ограничения-равенства (13) выражают баланс входящих и выходящих потоков в каждом узле. Условия (14)–(16) содержат ограничения-неравенства на объемы передачи по дугам сети.

Отметим, что для существования допустимого решения исходной задачи необходимо, чтобы граф транспортной сети являлся связным.

Для решений системы (13)–(23) на дуге j без ограничений на объем передачи с учетом специфики матрицы \mathbf{A} справедливо равенство:

$$f_j(x_j) + s_j = (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j = u_{end(j)} - u_{beg(j)}, \quad (145)$$

где $beg(j)$ – номер конечного узла дуги j , $end(j)$ – номер конечного узла.

Вектор \mathbf{u} имеет смысл вектора цен на продукт в узлах. Эти цены являются относительными, поскольку лишь отражают факт увеличения стоимости транспортируемого продукта. Начальная стоимость продукта (в одном из узлов сети) должна быть зафиксирована априори.

Величина $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ описывает приращение цены ресурса при передаче по дуге j . Величину в левой части равенства (145) назовем тарифом на передачу по дуге j . Если (145) выполнено, то тариф равен предельным издержкам. Возможны и другие правила задания тарифа, например, по средним издержкам на передачу по дуге. Тарифы, получаемые по предельным издержкам, связаны с оптимальными (относительно суммарных издержек) объемами передачи по дугам сети. Такие тарифы в определенных случаях являются стимулирующими к оптимизации перевозок [55, 56].

На рисунке 3 изображен график предельных издержек на дуге j без ограничений на объем передачи.

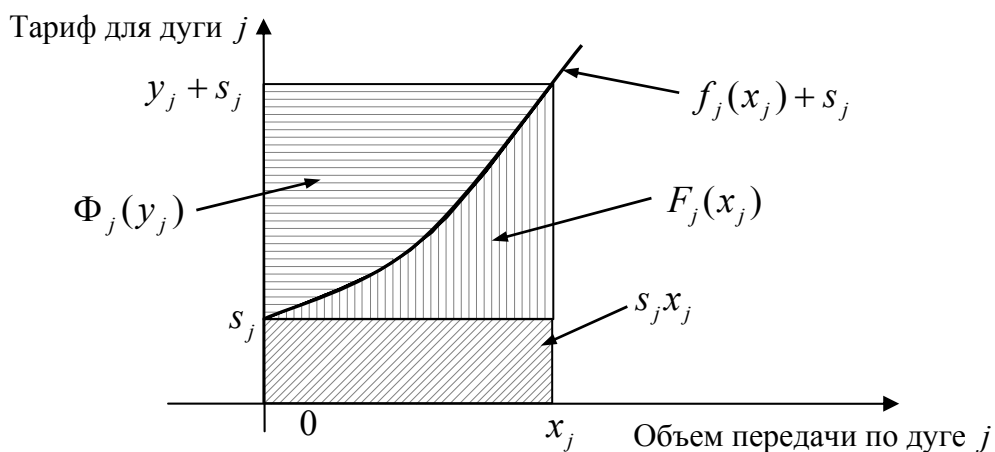


Рисунок 3. Переменные издержки передачи и излишек перевозчика

Величина $x_j(y_j + s_j)$ соответствует плате транспортировщику за передачу продукта в объеме x_j по дуге j . Величина $F_j(x_j) + s_j x_j$ соответствует переменным издержкам на передачу по дуге j . Для решений системы (13)–(23) справедливо равенство $F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) - x_j y_j = 0$ (см. формулу (55)). Поэтому площадь фигуры, расположенной над кривой предельных издержек, равна величине $\Phi_j(y_j)$. Эту величину, в соответствии с экономической теорией [46], назовем излишком перевозчика (producer surplus).

В случае, когда на дуге j есть ограничения сверху и снизу, для решенной системы (13)–(23) справедливо равенство:

$$f_j(x_j) + s_j - l_j + h_j = (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j, \quad (146)$$

которое показывает, что в этом случае приращение цены происходит за счет предельных издержек $f_j(x_j) + s_j$ и дополнительных слагаемых $-l_j$ и $+h_j$. Согласно (13)–(18), (24)–(30) при $\underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j$ выполняется: $l_j = 0$, $h_j = 0$; при $x_j = \underline{x}_j$ выполняется: $l_j \geq 0$, $h_j = 0$; при $x_j = \bar{x}_j$ выполняется: $l_j = 0$, $h_j \geq 0$. То есть дополнительные слагаемые l_j и h_j в (146) могут быть отличны от нуля только при достижении верхних или нижних ограничений на объем передачи по дуге j . В этом случае тарифом на передачу будет величина $f_j(x_j) + s_j - l_j + h_j$, которая может отличаться от предельных издержек на дуге.

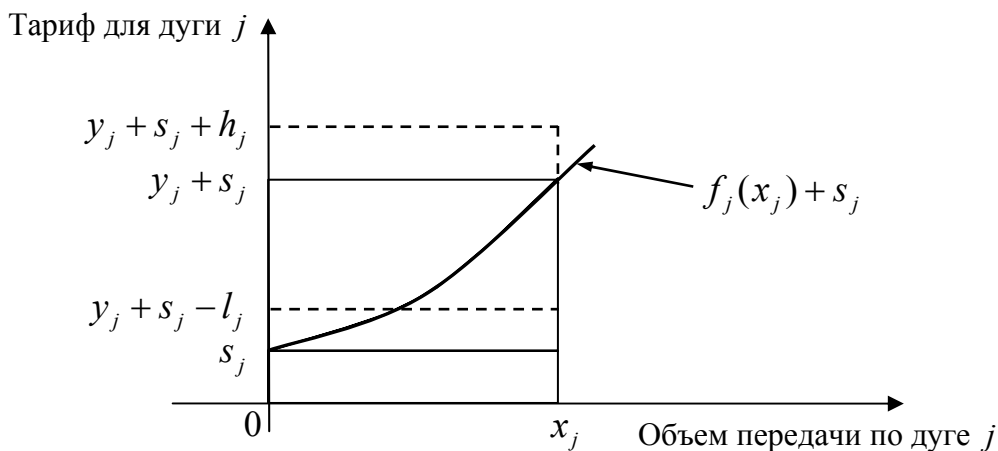


Рисунок 4. Тарифы на передачу по дуге j при достижении верхнего или нижнего ограничений

На рисунке 4 представлены предельные издержки и тарифы на дуге j для двух случаев: 1) когда $l_j = 0$, $h_j > 0$, а тариф равен $y_j + s_j + h_j$, и 2) когда $l_j > 0$, $h_j = 0$, а тариф равен $y_j + s_j - l_j$.

В обоих случаях приращение цены $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ по дуге j должно быть

равно приращению цены по альтернативному маршруту (набору путей на графе, отличных от дуги j , по которым можно передавать ресурс из начального в конечный узел дуги j). Причем, если на альтернативном маршруте не достигнуты (по совокупности путей) ограничения на поток сверху и снизу, то приращение цены $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ будет равно предельным издержкам на передачу по этому маршруту. А на дуге j предельные издержки будут отличаться от приращение цены $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ на величину дополнительных слагаемых $-l_j$ и $+h_j$.

Рисунок 4 демонстрирует, что плата за передачу по тарифу $y_j + s_j - l_j$ может не покрывать транспортные издержки на дуге j . В случае, когда на дуге j есть ограничения сверху и снизу (т.е. $j \in J^{LH}$), излишек перевозчика на дуге равен $\Phi_j(y_j) - \underline{x}_j l_j + \bar{x}_j h_j$.

Ситуация ограничения на поток снизу $x_j > \underline{x}_j$, где $\underline{x}_j > 0$, возможна в реальных транспортных системах. Например, в системах газоснабжения для нормальной работы перекачивающих агрегатов давление газа в трубопроводе не должно опускаться ниже определенного значения [66].

Интерпретация двойственной и самосопряженной задачи

Двойственная задача (33)–(39) позволяет сформировать рациональную систему тарифов на передачу. В ней в явном виде никак не используются значения оптимальных объемов передачи продукта.

Двойственная задача позволяет определить тарифы на передачу $y_j + s_j - l_j + h_j$ по дугам $j \in J$ и цены u_i в узлах $i \in I$ такие, что тарифы по всем дугам равны приращению цены $(\mathbf{A}^T \mathbf{u})_j$ по ним, при этом максимизируется величина выручки перевозчика $\mathbf{b}^T \mathbf{u}$ без излишка перевозчика

$$\sum_{j \in J} \Phi_j(y_j) - \sum_{j \in J^L \cup J^{LH}} \underline{x}_j l_j + \sum_{j \in J^H \cup J^{LH}} \bar{x}_j h_j.$$

Самосопряженная задача оптимизации (53), (13)–(16), (34)–(39) объединяет в себе исходную и двойственную задачи. Она позволяет найти объемы передачи, тарифы и цены такие, что с одной стороны издержки на передачу минимальны, с другой стороны максимальна выручка перевозчика без излишка перевозчика. Поскольку значение целевой функции самосопряженной задачи в точке оптимума равно нулю, получаемая для оптимального решения выручка равна издержкам плюс излишек перевозчика.

Модель потокораспределения и тарифообразования с использованием средних издержек

Будем рассматривать случай, когда постоянные издержки при перевозке отсутствуют (например, при краткосрочном планировании перевозок). Функция переменных издержек на перевозку по j дуге задана в виде

$$VC_j(x_j) = g_j(x_j)x_j + s_jx_j, \quad (147)$$

где $g_j(x_j)$ – такая функция, что $g_j(x_j)x_j = F_j(x_j)$ и $F_j(x_j) \in Z$.

Величина $g_j(x_j) + s_j$ задает средние издержки на перевозку по дуге j .

Обозначим $G_j(x_j) = \int_0^{x_j} g_j(\tau) d\tau$. Определенный интеграл $G_j(x_j)$ не является несобственным (поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} g_j(x_j) = \lim_{x \rightarrow 0} F_j(x_j)/x_j = \lim_{x \rightarrow 0} f_j(x_j)/1 = 0$).

Рассмотрим задачу оптимизации:

$$\sum_{j=1}^n G_j(x_j) + \sum_{j=1}^n s_jx_j \rightarrow \min, \quad (148)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (149)$$

Эту задачу будем называть *задачей потокораспределения по средним издержкам*. Условия оптимальности для этой задачи будут содержать ограничения (149), а также условия:

$$g_j(x_j) = ([\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j)_+, \quad j \in J. \quad (150)$$

Согласно (149), (150) если $\tilde{x}_j > 0$ – решение задачи (148)–(149) на дуге j , то $g_j(\tilde{x}_j) + s_j = [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j$, т.е. средние издержки на дуге j равны приращению цены на этой дуге. То есть, тариф на перевозку по дуге j формируется на основе средних, а не предельных издержек.

Построим двойственную задачу к (148)–(149):

$$\sum_{i=1}^m b_i u_i - \sum_{j=1}^n \Theta_j(y_j) \rightarrow \max, \quad (151)$$

$$\mathbf{y} + \mathbf{s} \geq \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (152)$$

Здесь $\Theta_j(y_j)$ – это преобразование Лежандра-Фенхеля функции $G_j(x_j)$.

Эту задачу назовем *задачей тарифообразования по средним издержкам*.

Обозначим $\theta_j(y_j)$ обратную функцию к $g_j(x_j)$, $j \in J$. Условия оптимальности для задачи (151), (152) будут содержать (149), а также:

$$y_j = ([\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j - s_j)_+, \quad j \in J, \quad (153)$$

$$x_j = \theta_j(y_j), \quad j \in J, \quad (154)$$

Если условия (154) представить в виде $y_j = g_j(x_j)$ и исключить из системы (149), (153), (154) переменные y_j , $j \in J$, то получим условия (149), (150). Таким образом, скаляры x_j , $j \in J$ и u_i , $i \in I$, составляющие решение и множители Лагранжа задач (148), (149) и (151), (152), совпадают.

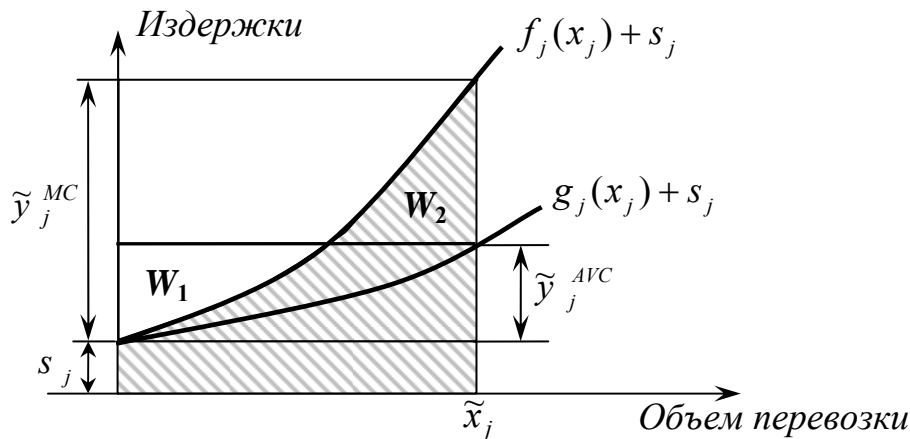


Рисунок 5. График предельных и средних издержек для дуги j .

Рассмотрим график предельных и средних издержек для дуги j . На рисунке 5 площадь заштрихованной фигуры равна транспортным издержкам VC_j по дуге j . Произведение $(g_j(\tilde{x}_j) + s_j)\tilde{x}_j$ соответствует плате за перевозку ресурса по дуге. Площадь W_1 на рисунке равна площади W_2 , поскольку $(g_j(\tilde{x}_j) + s_j)\tilde{x}_j = g_j(\tilde{x}_j)\tilde{x}_j + s_j\tilde{x}_j = VC_j(\tilde{x}_j)$. Это означает, что плата за перевозку продукта по дуге j равна транспортным издержкам. То есть излишек перевозчика на дуге j в данном случае равен нулю.

Рассмотрим пример сети, схема которой представлена на рисунке 6.

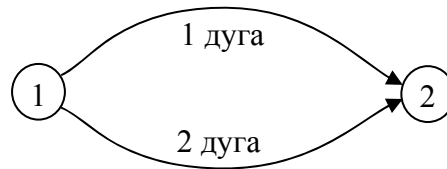


Рисунок 6. Транспортная сеть с двумя узлами и двумя дугами

Необходимо из узла 1 в узел 2 перевезти ресурс объемом 12 единиц. Пусть x_1 и x_2 – объемы перевозок по дугам сети. Затраты на перевозки выражаются квадратичными зависимостями:

$$VC_1(x_1) = 0,2x_1^2 + 2x_1, \quad VC_2(x_2) = 0,5x_2^2 + 4x_2.$$

Пусть $J^\infty = J^H = J^{LH} = \emptyset$, $J^L = J$ и $\underline{x}_j = 0$, $j \in J^L$. В таблице 13 представлены оптимальные объемы перевозок \tilde{x}_j для задачи (12)–(16), предельные издержки $MC_j = dVC_j(\tilde{x}_j)/dx_j$, средние издержки $AC_j = VC_j(\tilde{x}_j)/\tilde{x}_j$, переменные издержки $VC_j(\tilde{x}_j)$, плата за перевозки при тарифах по предельным издержкам $PM_j = MC_j \cdot \tilde{x}_j$, избыток перевозчика $\Phi(\tilde{y}_j) = PM_j - VC_j$, $j \in J$.

Из таблицы 13 видно, что плата за перевозки при тарифах по предельным издержкам (равная 72 денежным единицам) существенно превышает величину издержек (равную 50 единицам). Это превышение совпадает с суммой избытка перевозчика $\Phi_j(\tilde{y}_j)$.

Таблица 13. Оптимальные по затратам перевозки при тарифах по предельным издержкам

Дуга, j	\tilde{x}_j	MC_j	AC_j	VC_j	PM_j	$\Phi_j(\tilde{y}_j)$
1	10	6	4	40	60	20
2	2	6	5	10	12	2
Всего	12	–	–	50	72	22

В таблице 14 представлены результаты решения задачи (148)–(149). Плата за перевозки в данном случае выражается величиной $PM_j = AC_j \cdot \tilde{x}_j$, поэтому решение \tilde{x} названо равновесным при тарифообразовании по средним издержкам.

Таблица 14. Равновесные перевозки при тарифообразовании по средним издержкам

Дуга, j	\tilde{x}_j	MC_j	AC_j	VC_j	PM_j	$\Phi(\tilde{y}_j)$
1	11,43	6,57	4,29	49	49	0
2	0,57	4,57	4,29	2,44	2,44	0
Всего	12	–	–	51,44	51,44	0

Плата за перевозки существенно ниже, чем для варианта из таблицы 13. Эта плата совпадает с издержками, и поэтому избыток перевозчика – нулевой. При этом общие издержки на перевозку выше, чем при векторе перевозок из табл. 13, поскольку в данном случае решается задача не минимизации суммарных издержек, а минимизации суммы интегралов от функции средних издержек по всем дугам.

Обсуждение возможных вариантов тарифообразования для транспортных монополий

Рассмотренная в 2.1 сетевая модель позволяет формировать систему тарифов, "зовущих к оптимуму". Получаемые в результате решения двойственной задачи оптимизации (33)–(39), тарифы по предельным издержкам позволяют оценивать, к каким приращениям затрат приведут измене-

ния в небольших масштабах заданий на перевозки (т. е. небольшие изменения компонент вектора **b**). Принципиально важно, что эти тарифы могут использоваться самими клиентами для выбора ими маршрутов перевозок дополнительных объемов ресурса. Минимизация платы за перевозки дополнительных объемов ресурса будет соответствовать минимизации полных издержек транспортной системы.

Многие транспортные системы являются естественными монополиями, тарифы для которых должны устанавливаться директивно государственными органами. По сложившейся в России и других странах практике установление цен и тарифов на продукцию или услуги естественных монополий осуществляется на основе не предельных, а средних издержек. Недостатком этого подхода является то, что объемы перевозок, формируемые по таким тарифам, не соответствуют (в отличие объемов перевозок формируемым по предельным издержкам) минимуму суммарных издержек транспортной системы.

Формирование тарифов по предельным издержкам, однако, тоже имеет некоторые недостатки.

1. Указанная стимулирующая роль тарифов по предельным издержкам действует лишь для относительно малых изменений объемов перевозимого продукта с малыми изменениями самих предельных издержек. При больших изменениях изначальные предельные издержки уже не будут играть роль цен, "зовущих к оптимуму". В этом случае требуется пересмотр тарифов.

2. Предельные издержки гораздо труднее подсчитывать на практике, чем средние издержки. Только в математических условно-иллюстративных моделях можно легко определять затраты на дополнительную единицу продукции. В бухгалтерской практике выделение такого показателя является сложным делом. Подсчет же средних затрат путем деления всех понесенных затрат на объем перевозок – более простая и более естественная для бухгалтерских расчетов операция.

3. Плата за перевозки по тарифам, отражающим предельные издержки, может существенно отличаться от величины затрат, понесенных на эти перевозки транспортной компанией. В частности, в приведенном выше в §4.2 примере, затраты меньше платы за перевозки. Государство должно принимать дополнительные меры, способствующие минимизации излишка перевозчика, являющегося монополистом. Минимизация излишка перевозчика считается важнейшей целью антимонопольного регулирования [1].

Транспортная модель с переменным спросом и предложением

На практике объемы входящего в сеть ресурса через узлы-источники, а также выходящего из сети в узлах-потребителях не всегда фиксированы априори. Они могут меняться в зависимости от внешних условий, например от предложения или спроса при данной цене. Рассмотрим модель транспортной системы, в которой объем входящего в сеть ресурса через узлы-источники есть функция предложения, зависящая от цены на ресурс в данном узле. Объем выходящего из сети ресурса через узлы-потребители есть функция спроса, зависящая от цены.

Будем считать, что для каждого узла, в котором есть источник или потребитель задана соответственно функция предложения или спроса.

Обозначим $b_i(u_i)$ – функцию предложения (или спроса) в узле i . Пусть эта функция задана при $u_i \geq 0$ в виде:

$$b_i(u_i) = b_i^0 - q_i(u_i), \quad (155)$$

здесь b_i^0 – спрос или предложение при нулевой цене, $q_i(u_i)$ – монотонно-возрастающая функция. Будем считать, что в источнике $b_i^0 = 0$.

На рисунке 7 изображена функция $b_i(u_i)$ в узле i . Если $b_i^0 = 0$, то $b_i(u_i) \leq 0$ при $u_i \geq 0$. В узле расположен источник и задана функция предложения. Если $b_i^0 > 0$, то $b_i(u_i) > 0$ при $u_i \in [0; u_i^0)$ и на этом интервале це-

ны задана функция спроса. При $u_i \geq u_i^0$ выполняется $b_i(u_i) \leq 0$. Это значит, что функция спроса переходит в функцию предложения. Цена в узле настолько велика, что выгоднее создать локальный источник и поставлять ресурс в сеть.

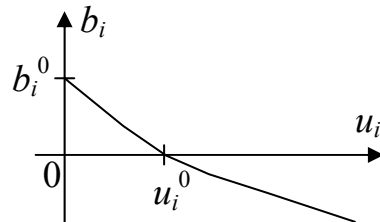


Рисунок 7. Функция спроса-предложения в узле

Опишем модель следующей системой уравнений и неравенств:

$$[\mathbf{Ax}]_i = b_i(u_i), \quad u_i \geq 0, \quad i \in I, \quad (156)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (157)$$

$$\mathbf{y} + \mathbf{s} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad (158)$$

$$x_j(y_j + s_j - [\mathbf{A}^T \mathbf{u}]_j) = 0, \quad j \in J, \quad (159)$$

$$y_j = f_j(x_j), \quad j \in J. \quad (160)$$

Модель транспортной сети с переменными объемами спроса и предложения в узлах, описываемую системой (156) – (160), формально можно свести к модели с фиксированными объемами спроса и предложения рассматриваемой в §4.1. В [87] приводится описание способа такого сведения, основанного на использовании фиктивного узла, соединенного фиктивными дугами со всеми узлами-источниками и узлами-потребителями. Этот способ использует известную в теории гидравлических цепей идею о соединении всех узлов-источников и узлов-потребителей фиктивными дугами с фиктивным узлом. Потоки по фиктивным дугам соответствуют объемам спроса и предложения в узлах-источниках и потребителях. Такое сведение позволяет проводить расчеты по модели с переменными объемами спроса и предложения с использованием алгоритмов, пригодных для модели с фиксированными объемами спроса и предложения.

Одной особенностью данной модели является то, что вектор узловых

цен u в решении (156)–(160) единственный при условии, что заданы все функции предложения (спроса) $b_i(u_i)$ в узлах сети. Таким образом, модель описывает ситуацию, когда цены в узлах устанавливаются согласно равновесию между спросом и предложением на рынке однородного ресурса с сетевым расположением узлов-источников и потребителей. При этом учитываются транспортные издержки на передачу по дугам, увеличивающие цену, по которой поставщик готов поставлять ресурс потребителю.

Рассмотренная модель может быть полезна, например, при расчете оптимальных потоков и равновесных цен в газотранспортной сети при условии наличия известных функций спроса и предложения в узлах-источниках и потребителях.

§4.3. Нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях

Состояние энергетической безопасности характеризует уровень защищенности граждан, общества, государства, экономики от угроз дефицита в обеспечении их обоснованных потребностей в энергии экономически доступными энергетическими ресурсами приемлемого качества, от угроз бесперебойности питания. На эффективность функционирования и развития отраслевых систем газо- и нефтеснабжения в настоящее время серьезное влияние оказывают факторы как технического (безотказность оборудования, техническая надежность, живучесть систем энергетики и т.п.), так и экономического (дефицит инвестиционных ресурсов, финансовая дестабилизация и др.) и социально-политического характера (национальные и региональные конфликты, забастовки и пр.) [106, 26, 105].

Надежность систем энергетики является комплексным свойством, характеризующим способность системы выполнять заданные функции в заданном объеме при определенных условиях функционирования. Одним из

свойств, составляющих понятие надежности отраслевых систем газо- и нефтеснабжения является живучесть – способность системы противостоять возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым нарушением питания потребителей [103, 104, 105, 106].

Анализ надежности топливо- и энергоснабжения страны и живучести систем энергетики включает учет межотраслевых аспектов надежности топливно-энергетического комплекса (ТЭК). В [106, 110] описывается двухуровневая схема исследований энергетической безопасности, которая на нижнем уровне иерархии использует модели, описывающие процессы внутри отдельных отраслевых систем энергетики, а на верхнем – модели территориально-производственной структуры ТЭК, учитывающие межотраслевые аспекты. Все отраслевые модели связаны между собой и с моделями ТЭК балансовыми и технологическими соотношениями.

Комплексная системная оценка энергетической безопасности [110] включает анализ последствий реализации возможных возмущений в системах энергетики и ТЭК (с учетом межотраслевых связей), выявление слабых мест в системе топливо- и энергоснабжения потребителей. Также в рамках данных исследований производится оценка различных вариантов развития энергетики и экономики, выбор оптимальных стратегий с позиций энергетической безопасности и обоснование мероприятий по их реализации.

В [25, 103, 106, 110] дано описание моделей, с математической точки зрения являющихся задачами линейного программирования, для поиска максимального потока минимальной стоимости в сети [122, 124]. Эти модели позволяют оценить производственные возможности ЕСГ или ЕСН по топливо- и энергоснабжению и рассчитать возможные дефициты в системе при разного рода возмущениях. Также в [25, 106, 110] описываются модели (на основе задач линейного программирования), которые позволяют не только оценить производственные возможности ЕСГ или ЕСН, но и определить, а также с некоторых позиций проранжировать «узкие» места

транспортной подсистемы. Под узкими местами в данном случае понимаются транспортные связи, ограничивающие возможности системы по удовлетворению потребителей требуемым количеством ресурса. Ранжирование необходимо для выбора наиболее эффективных способов «расширки» связей транспортной системы (т.е. увеличения их пропускной способности). «Расширка» нужна для устранения существующих дефицитов поставок и для повышения надежности поставок.

Далее описывается нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях, которая позволяет рассчитать потокораспределение и дефициты в системе, а также определить и проранжировать «узкие» места транспортной подсистемы. Модель рассматривает ситуацию, когда передача ресурса по любой транспортной связи может осуществляться в двух режимах: в нормальном режиме и в режиме повышенной нагрузки. В использовании нелинейной функции издержек в режиме повышенной нагрузки заключается основное отличие данной модели (и модели, описываемой в [92, 94]) от модели для определения и ранжирования «узких» мест, рассматриваемой в [106, 110].

Описание модели

Транспортная сеть задана направленным графом. Множество номеров узлов I состоит из m элементов (источники, потребители или узлы разветвления), множество J содержит номера n дуг (транспортные связи). Матрица инцидентий A определяется так же как в §4.2.

Если в i -м узле расположен потребитель, то задана его потребность $\bar{b}_i > 0$ и требуется найти величину b_i удовлетворения потребности узла. Если в i -м узле расположен источник, то задана его максимальная производительность, равная $|\underline{b}_i|$, где $\underline{b}_i < 0$. Требуется найти величину $|\underline{b}_i|$ загрузки i -го источника. В узлах разветвления обмен ресурсом с внешней средой в узле отсутствует. Множества индексов узлов-

потребителей, узлов-источников и узлов разветвления обозначим соответственно I^C , I^S и I^T . Эти множества составляют разбиение множества I .

Обозначим $\mathbf{x} \in R^n$ вектор, содержащий объемы передачи по дугам сети. Для каждой дуги $j \in J$ заданы \underline{x}_j , \tilde{x}_j и \bar{x}_j , где $0 \leq \underline{x}_j < \tilde{x}_j < \bar{x}_j$. Если $\underline{x}_j \leq x_j < \tilde{x}_j$, то дуга j работает в нормальном режиме, а если $\tilde{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j$ – то в режиме повышенной нагрузки. Режим $x_j > \bar{x}_j$ недопустим.

Переменные издержки на передачу ресурса по дуге j представлены в виде суммы линейной и нелинейной функций от объема передачи:

$$s_j x_j + \tilde{F}_j(x_j), \quad (161)$$

где $s_j > 0$ – коэффициент линейной составляющей издержек, а функция $\tilde{F}_j(x_j)$ задана кусочно:

$$\tilde{F}_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \underline{x}_j \leq x_j < \tilde{x}_j, \\ F_j(x_j - \tilde{x}_j), & x_j \geq \tilde{x}_j, \end{cases} \quad (162)$$

где F_j – функция из множества Z , введенного в §2.1 второй главы.

Модель представлена задачей минимизации выпуклой сепарабельной функции относительно вектора $\mathbf{x} \in R^n$ и переменных b_i , $i \in I^S \cup I^C$:

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{F}_j(x_j) + s_j x_j) + \sum_{i \in I^C} r_i (\bar{b}_i - b_i) \rightarrow \min \quad (163)$$

$$[\mathbf{Ax}]_i - b_i = 0, \quad i \in I^S \cup I^C, \quad (164)$$

$$[\mathbf{Ax}]_i = 0, \quad i \in I^T, \quad (165)$$

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, \quad (166)$$

$$\underline{b}_i \leq b_i \leq 0, \quad i \in I^S, \quad (167)$$

$$0 \leq b_i \leq \bar{b}_i, \quad i \in I^C. \quad (168)$$

Целевая функция задачи (163)–(168) содержит суммарные издержки от передачи ресурса по всем дугам $\sum_{j=1}^n s_j x_j$, ущерба от возможного выхода из

строю оборудования $\sum_{j=1}^n \tilde{F}_j(x_j)$ и суммарный штраф $\sum_{i \in I^C} r_i(\bar{b}_i - b_i)$ за неполное удовлетворение потребности. Здесь $r_i > 0$, $i \in I^C$ – коэффициент штрафа за неполное удовлетворение потребности в узле i . Условия (164), (165) описывают материальный баланс входящих и выходящих потоков во всех узлах. Условия (166) задают ограничения на объемы передачи ресурса по каждой дуге. Условия (167), (168) накладывают ограничения на объемы поставок в узлах-источниках в сеть и в узлах-потребителях из сети.

Поскольку целевая функция (163) не строго выпукла, решение задачи (163)–(168) может быть неединственным.

Для всех $j \in J$ обозначим f_j производную функции F_j , а \tilde{f}_j – производную функции \tilde{F}_j . Заметим, что для $j \in J$

$$\tilde{f}_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \underline{x}_j \leq x_j < \tilde{x}_j, \\ f_j(x_j - \tilde{x}_j), & x_j \geq \tilde{x}_j. \end{cases} \quad (169)$$

В статье [94] приводится постановка модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях. Приводятся формулировка и условия оптимальности Куна-Таккера для задачи оптимизации (163)–(168), в которой отсутствуют верхние ограничения \bar{x} на объем передачи.

На основе условий оптимальности Куна-Таккера для формулируемой здесь задачи (163)–(168) можно рассчитать вектор $\mathbf{u} \in R^m$ множителей Лагранжа ограничений (164), (165), вектор $\mathbf{l} \in R^n$ множителей Лагранжа ограничений $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}$ из (166) и вектор $\mathbf{h} \in R^n$ множителей Лагранжа ограничений $\mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}$ из (166).

Проверка выполнения с заданной точностью условий оптимальности Куна-Таккера для текущего приближения к решению исходной задачи оптимизации и к множителям Лагранжа её ограничений может служить критерием остановки в алгоритмах численного расчета по модели.

Экономическая интерпретация модели

Интерпретация двойственных переменных, заданных векторами $\mathbf{u} \in R^m$ и $\mathbf{l} \in R^n$, $\mathbf{h} \in R^n$, в данной модели подобна интерпретации этих оценок в нелинейной транспортной модели, обсуждаемой в §4.1.

Вектор \mathbf{u} есть вектор (относительных) цен на ресурс в узлах сети. Величину $\tilde{f}_j(x_j) + s_j - l_j + h_j$ назовем тарифом на передачу ресурса по дуге j . Этот термин отражает тот факт, что в плату пользователей за ресурс будет включена составляющая, покрывающая транспортные издержки. В нормальном режиме на дуге j тариф на передачу фиксирован (равен s_j). В режиме повышенной нагрузки составляющая тарифа равная $f_j(x_j - \tilde{x}_j)$ растет с приближением объема передачи к максимально допустимому. Можно сказать, что с ростом тарифа растет напряженность дуги. Увеличенная нагрузка (напряженность) в данном режиме увеличивает вероятность возникновения экстремальной ситуации (поломка оборудования, разрыв связи). То есть, тариф есть индикатор напряженности дуги.

Слагаемые тарифа l_j и h_j нулевые в нормальном режиме и могут быть положительны только, когда достигнуто ограничение сверху или снизу на поток по дуге j . В модели величина \underline{x}_j обычно принимается равной нулю, однако может быть положительной. Последнее отражает возможную необходимость поддерживать в отраслевой системе ТЭК некоторый минимально допустимый уровень передачи по дуге для того, чтобы система оставалась в рабочем режиме.

Для более точной интерпретации u_i как цены (когда $\underline{b}_i < b_i < 0$ или $0 < b_i < \bar{b}_i$), необходимо вводить фиктивный узел, соединенный фиктивными дугами с узлами-источниками и фиктивный узел, соединенный с узлами-потребителями. Издержки на фиктивных дугах для узлов-потребителей должны быть равны функциям штрафов за недопоставку из целевой функции.

Практические расчеты с использованием программной реализации алгоритма внутренних точек

На языке программирования С++ автором был реализован алгоритм внутренних точек решения исходной задачи оптимизации для нелинейной модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН по снабжению потребителей ресурсом в экстремальных ситуациях. Данная реализация алгоритма совместно с к.т.н. Еделевым А.В. (лаб. №33 ИСЭМ СО РАН) был внедрен в программный комплекс «Нефть и газ России» (отдел «Живучести и безопасности систем энергетики» ИСЭМ СО РАН). В программном комплексе были проведены расчеты с использованием двух алгоритмов: внедренного алгоритма для нелинейной модели и существовавшего в программный комплекс реализации алгоритма для линейной модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН.

Таблица 15. Результаты расчетов по нелинейной модели для ЕСГ

Федеральный округ	Потребность, млн. куб м./сут.	Поставка, млн. куб. м/сут	Дефицит, млн. куб. м/сут	Удовл., %
Северо-западный ФО	214.69	196.15	18.54	91.37
Центральный ФО	543.52	543.52	0.00	100.00
Приволжский ФО	568.30	568.30	0.00	100.00
Южный ФО	130.15	130.15	0.00	100.00
Уральский ФО	633.53	621.55	11.99	98.11
Сибирский ФО	65.81	65.41	0.40	99.39
Дальневосточный ФО	10.92	10.92	0.00	100.00
Сев-Кавказский ФО	91.20	91.20	0.00	100.00
Дал.Зарубежье	434.83	410.25	24.58	94.35
Бл.Зарубежье(запад)	194.42	194.42	0.00	100.00
Бл.Зарубежье(Кавказ)	7.67	7.67	0.00	100.00
Бл.Зарубежье(СрАзия)	2.23	2.23	0.00	100.00
АТР	12.33	12.33	0.00	100.00

Исходные данные по газотранспортной подсети единой системы газоснабжения России за 2009 г. были взяты из ПК «Нефть и газ России». В частности, производился расчет по подсети размером 344 узла и 636 ветвей. В таблицах 15 и 16 приведены агрегированные по федеральным округам ре-

зультаты расчетов. Приводятся данные по потребности в газе, объемы поставок, дефициты и уровень удовлетворенности федеральных округов.

Таблица 16. Результаты расчетов по линейной модели для ЕСГ

Федеральный округ	Потребность, млн. куб м./сут.	Поставка, млн. куб. м/сут	Дефицит, млн. куб. м/сут	Удовл., %
Северо-западный ФО	214.69	189.72	24.97	88.37
Центральный ФО	543.52	543.52	0.00	100.00
Приволжский ФО	568.30	568.30	0.00	100.00
Южный ФО	130.15	130.15	0.00	100.00
Уральский ФО	633.53	628.06	5.47	99.14
Сибирский ФО	65.81	65.41	0.40	99.39
Дальневосточный ФО	10.92	10.92	0.00	100.00
Сев-Кавказский ФО	91.20	91.20	0.00	100.00
Дал.Зарубежье	434.83	410.25	24.58	94.35
Бл.Зарубежье(запад)	194.42	194.42	0.00	100.00
Бл.Зарубежье(Кавказ)	7.67	7.67	0.00	100.00
Бл.Зарубежье(СрАзия)	2.23	2.23	0.00	100.00
АТР	12.33	12.33	0.00	100.00

Расчеты показывают, что потокораспределение для нелинейной модели отличается от потокораспределения для линейной модели. Так в Северо-западном ФО дефицит в нелинейной модели уменьшился, а в Уральском ФО дефицит увеличился по сравнению с линейной моделью. При этом поток из Уральского ФО в Северо-западный ФО увеличился. Это связано с тем, что в линейной модели целевая функция убывает по x_j при $x_j < \tilde{x}_j$ и возрастает по x_j при $x_j > \tilde{x}_j$, где x_j – поток из Уральского ФО в Северо-западный ФО. Минимум линейной модели находится в \tilde{x}_j . В нелинейной модели целевая функция убывает по x_j при $x_j < \tilde{x}_j$, а при $x_j > \tilde{x}_j$ сначала убывает, а затем возрастает по x_j (подобно тому, как это происходит с функцией $x^2 - x$, при $x > 0$). Поэтому минимум нелинейной модели находится правее \tilde{x}_j . Таким образом, удовлетворенность Северо-западного ФО возросла на 3% (с 88,37% до 91,37%) в нелинейной модели, а удовлетворенность Уральского ФО уменьшилась на 1% (с 99.14% до 98.11%).

В нелинейной модели по сравнению с линейной объемы поставок газа более равномерно распределились по узлам, дефициты поставок газа в отдельных узлах стали ближе к своему среднему значению, максимальный дефицит уменьшился.

Ранжирование узких мест

В программном комплексе «Нефть и газ России» используется классификация «узких» мест, включающая два вида дуг относящихся к узким местам: 1) дуги с отсутствием резерва по пропускной способности в нормальном режиме (случай, когда $x_j = \tilde{x}_j$); 2) дуги в режиме повышенной нагрузки (случай, когда $\tilde{x}_j < x_j \leq \bar{x}_j$). Ранжирование «узких» мест проводится с учетом величины $\tilde{x}_j - x_j$, характеризующей объем передачи при повышенной нагрузке.

Приоритет «узких» мест зависит от влияния, которое оказывает расшивка данного узкого места на величину суммарных издержек в системе, т.е. на целевую функцию (163). Поэтому можно рекомендовать при ранжировании учитывать значение функции $\tilde{F}_j(x_j)$, отражающей ущербы, которые могут возникнуть от выхода из строя оборудования в режиме повышенной нагрузки. Дуги с большими значениями функции $\tilde{F}_j(x_j)$ должны иметь больший приоритет при «расшивке» узких мест (т.е. при увеличении их пропускной способности).

Двойственные оценки дают дополнительную информацию о модели, полезную при ранжировании «узких» мест. Например, чем выше двойственная оценка $h_j > 0$ для дуги j , тем больше издержки на передачу по альтернативному маршруту. Чем больше h_j , тем к большему уменьшению целевой функции (163) приведет увеличение пропускной способности \bar{x}_j на дуге j . Поэтому приоритет дуги j при ранжировании «узких» мест должен быть тем выше, чем выше величина двойственной оценки h_j .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Теория симметричной двойственности распространена на новый класс задач оптимизации с выпуклой сепарабельной целевой функцией и линейными ограничениями, в т.ч. двусторонними неравенствами. Доказаны теоремы об эквивалентности сформулированных взаимно двойственных задач оптимизации, о существовании и единственности их решения. Сформулированы условия оптимальности в виде системы нелинейных уравнений и неравенств с использованием вместо билинейных условий дополняющей нежесткости равенств нулю кусочно-линейной функции-срезки.

2. С использованием теории симметричной двойственности изучены свойства и дана интерпретация нелинейных моделей потокораспределения.

Распространение теории симметричной двойственности на класс задач оптимизации с ограничениями-неравенствами позволяет описывать с их помощью гидравлические системы с автоматическими регуляторами расхода. Для модели такой системы с учетом свойств разреженности матрицы инцидентий выполнена программная реализация двойственного алгоритма внутренних точек, дающая выигрыш в скорости счета по сравнению с некоторыми коммерческими решателями.

Предложена новая нелинейная модель для оценки возможностей ЕСГ или ЕСН по снабжению потребителей в чрезвычайных ситуациях. Эта модель позволяет более реалистично (по сравнению с линейными моделями) описывать функционирование таких систем в режиме повышенной нагрузки на дугах. Двойственные оценки дают дополнительную информацию о потокораспределении. Описаны способы использования этой информации при ранжировании «узких» мест в системе.

Проведено сравнение двух постановок нелинейной транспортной модели оптимизации перевозок: с тарифами по предельным издержкам и по *средним* издержкам (без учета постоянных издержек). В случае тарифов по *средним* издержкам потоки распределяются не оптимально (т.е. не соответствуют минимуму суммарных издержек транспортной компании), зато выручка перевозчика равна транспортным издержкам. В случае тарифов по предельным издержкам потоки распределяются оптимально, но выручка, получаемая перевозчиком, больше, чем транспортные издержки.

Показано, что модель с переменным спросом и предложением товаров в узлах описывает равновесие между спросом и предложением на рынке однородного продукта с сетевым расположением пунктов источников и потребителей при условии минимизации транспортных издержек.

3. Для решения задач потокораспределения разработано программное обеспечение, реализующее прямой и двойственный алгоритмы внутренних точек. Реализовано несколько вариантов прямого и двойственного алгоритма с разными способами задания весовых коэффициентов. С учетом свойств разреженности матрицы инцидентий для задач потокораспределения получены эффективные конкурентноспособные программные реализации алгоритмов внутренних точек.

Программный модуль, реализующий прямой алгоритм внутренних точек для модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях был внедрен (совместно с к.т.н. Еделевым А.В.) в программный комплекс «Нефть и газ России» (разработанный под руководством д.т.н. С.М. Сендерова в отделе «Живучести и безопасности систем энергетики» ИСЭМ СО РАН) и апробирован на подсети ЕСГ (344 узла и 636 дуг) с исходными данными за 2009 г. из базы данных этого комплекса. Проведенные расчеты показали, что предложенная нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ или ЕСН позволяет более равномерно распределить дефициты по узлам, чем существующая линейная модель. Внедрение этой мо-

дели расширяет возможности моделирования и анализа живучести систем ЕСГ и ЕСН.

Разработан программный модуль, реализующий графический интерфейс для создания и редактирования исходных данных задач потокораспределения. Эта среда позволяет, кроме случайного формирования векторов исходных данных, сформировать матрицу инцидентий графа сети при помощи визуальных инструментов.

Разработаны варианты реализации прямого и двойственного алгоритма внутренних точек для расчетов задач о проекции точки на политоп.

4. Проведены экспериментальные исследования вариантов прямых и двойственных алгоритмов внутренних точек на задачах потокораспределения. Выявлены наиболее эффективные способы выбора весовых коэффициентов. В результате экспериментальных исследований на задачах потокораспределения показано, что при использовании в алгоритмах внутренних точек данного класса линейных весовых коэффициентов, учитывающих множители Лагранжа, вместо традиционных квадратичных весовых коэффициентов число итераций уменьшается в среднем в два раза. При использовании двойственного алгоритма вместо исходного число итераций уменьшается в среднем в полтора раза (для обоих видов весовых коэффициентов).

В численных экспериментах показано, что число итераций и время счета для алгоритма с квадратичными весовыми коэффициентами находятся в полиномиальной зависимости от размера задачи. Экспериментально подтверждено, что при использовании двойственного алгоритма норма отклонения приближенного решения от точного по переменным исходной задачи сходится по итерациям к нулю быстрее, чем при использовании прямого алгоритма. Для двойственного алгоритма указанная норма быстрее сходится по исходным переменным.

5. Проведены экспериментальные расчеты на задачах проекции точки на политоп с использованием нескольких вариантов реализации алгорит-

мов внутренних точек. Выявлены следующие свойства. При использовании линейных весовых коэффициентов, деленных на множители Лагранжа, приближенное решение с заданной точностью находится за меньшее число итераций, чем при использовании квадратичных весовых коэффициентов (на решенных примерах в среднем более чем в 2 раза для прямого и более чем в 1,8 раза для двойственного алгоритма).

Двойственный алгоритм приводит к приближенному решению за меньшее число итераций, чем прямой (на решенных примерах для квадратичных коэффициентов двойственный алгоритм быстрее в среднем в 2,3 раза; для линейных весовых коэффициентов быстрее в среднем в 3,9 раза).

Направления дальнейших исследований

Можно выделить следующие направления дальнейших исследований:

1. Исследование моделей с невыпуклой функцией транспортных издержек. Этот случай позволяет описать многие постановки практических задач, поскольку в транспортных системах может присутствовать эффект «экономии от масштаба», когда средние издержки убывают с ростом объема передачи. Эффект прекращается при загруженности транспортных линий. Невыпуклость целевой функции усложняет исследование [115, 179].

2. Исследование задач транспортного равновесия, в которых все водители автомашин, перевозящие груз от источника к потребителю, выбирают пути, вдоль которых их индивидуальные затраты на перевозку груза минимальны. При решении таких задач могут использоваться методы теории вариационных неравенств [126, 149, 158, 161, 172, 178, 181, 186].

3. Актуальным направлением является исследование моделей потоко-распределения, учитывающих потери ресурса при передаче, поскольку в реальных транспортных системах происходят потери ресурса при переда-

че: в электрических цепях происходят потери мощности, в газораспределительных сетях до 7% газа тратится на транспортировку, при железнодорожных перевозках выветривается до 8% угля.

4. Интересной темой для исследований является симметричная двойственность на классе задач оптимизации с выпуклой целевой функцией без требований строгой выпуклости и дифференцируемости.

5. Требуется провести теоретическое обоснование рассмотренных в диссертации вариантов алгоритмов внутренних точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Н. И. Теоретические основы регулирования естественных монополий. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2006. – 29 с.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление – М.: Наука. – Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 430 с., ил.
3. Андрияшев М. М. Техника расчета водопроводной сети. – М.: Сов. Законодательство, 1932. – 62 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики: Учеб. пособие для вузов. – М: Наука, 1989 г. – 472 с.
5. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Ижевск: Иж. респ. типогр., 2000. – 400 с.
6. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 262 с., ил.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. – 824 с.
8. Васильева Е.М., Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. Нелинейные транспортные задачи на сетях. – М: Финансы и статистика, 1981. – 105 с.
9. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. Определение допустимых режимов электроэнергетических систем алгоритмами внутренних точек. // “Сибирский журнал индустриальной математики”, том 3, №1(5), 2000. – С.57-65.
10. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. – М: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 419 с.
11. Глаголев К.В., Морозов А.Н. Физическая термодинамика – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 269 с.
12. Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем”, Известия высших учебных заведений. Математика, 2001, № 12. – С. 21–31.
13. Гольштейн Е. Г. Выпуклое программирование (элементы теории).–

М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1970. – 68 с. – (Серия «Экономико-математическая библиотека»)

14. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции лангража: Теория и методы оптимизации. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 400 с. – (Серия «Экономико-математическая библиотека»)

15. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966.

16. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961, – 216 с.

17. Дикин И.И. Итеративное решение задач линейного программирования. // Доклады АН СССР, т. 174, 1967.

18. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 144 с.

19. Дикин И.И. Применение метода внутренних точек при решении прикладных оптимизационных задач // Методы оптимизации и их приложения. – Иркутск: СЭИ СО РАН, 1988. – С. 14-17.

20. Дикин И.И., Попова О.М., Елифанов С.П. Применение методов вспомогательных функций и внутренних точек при расчетах потокораспределения в гидравлических системах. – Иркутск, 1999. – 25 с. (Препринт ИСЭМ СО РАН; – № 10).

21. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – Том I. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Изд. 4-е, исправл. и дополн. – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – 336 с.

22. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. – М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.

23. Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г. Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования // Журнал вычисл. математики и матем.

физики. 1977. – Том. 17. №4. – С. 890-904.

24. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.

25. Еделев А. В. Разработка специализированной инструментальной среды для исследования проблем живучести больших трубопроводных систем: Дисс... канд. техн. наук: 05.13.18. – Иркутск, 2001. – 107с.

26. Еделев А.В., Пяткова Н.И., Рабчук В.И., Чельцов М.Б., Сендеров С.М. Методические основы выбора направлений корректировки решений по развитию энергетики государства с позиций энергетической безопасности. – Известия РАН. Энергетика, 2006, № 3, – С. 21–27."

27. Еделев А.В., Еникеева С.М., Сендеров С.М. Информационное обеспечение при исследовании больших трубопроводных систем // Вычислительные технологии, 1999, т. 4, № 5, с. 30-35.

28. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность и гидравлические цепи // Моделирование технических и природных систем: Труды XIII Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Том 5: Иркутск, ИСЭМ СО РАН.– 2005. – С. 119–123.

29. Епифанов С. П. Приложение теории двойственности к моделям потокораспределения: Дисс... канд. физико-математических наук: 05.13.18. – Иркутск, 2006. – 97с.

30. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения // III Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: Материалы конференции (Омск, 11-15 июля 2006) / Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. – С. 26-27.

31. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Приложение теории двойственности к моделям потокораспределения // Вычислительные технологии. – 2009. – Т.14, № 1. – С. 67-80.

32. Епифанов С. П., Зоркальцев В. И., Медвежонков Д. С. Модель гидравлической сети с регуляторами расхода / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". – М.: ИПУ РАН, 2010. С.286-299.
33. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – Москва: Наука, 1976. – 192с.
34. Еремин И.И. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
35. Еремин И.И., Вл.Д.Мазуров, Н.Н.Астафьев, Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983, 336 с.
36. Еремин И.И. Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1045–1048.
37. Еремин И.И. Двойственность для парето-последовательных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т 3. С. 245–260.
38. Еремин И.И. Двойственность для несобственных задач паретовской и лексикографической линейной оптимизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 322–336.
39. Еремин И.И., Теория двойственности в линейной оптимизации. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005, 195 с.
40. Еремин И.И. Системы линейных неравенств и линейная оптимизация. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2007, 338 с.
41. Жадан В.Г. Метод Ньютона с наискорейшим спуском для задач линейного программирования. – М.: ВЦ РАН, 1997.
42. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. 1969г. Пер. с англ., под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: «Сов. радио», 1973. – 312 с.
43. Зоркальцев В.И. Итеративный алгоритм решения задачи линейного программирования. // Алгоритмы и программы решения задач линейной

алгебры и математического программирования. – Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 1978, – С.77-89.

44. Зоркальцев В.И. Метод относительно внутренних точек. Сыктывкар: Коми фил. АН СССР РАН, 1986.

45. Зоркальцев В.И. Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. – М.: Наука, 1988.

46. Зоркальцев В. И. Модели рыночной экономики: Учеб. пособие. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1993. – 144 с.

47. Зоркальцев В.И. Проективные алгоритмы оптимизации, использующие множители предыдущей итерации. // Журнал вычисл. Математики и матем физики. – 1994. – Т. 34, №7. – С. 943–950.

48. Зоркальцев В.И. Алгоритмы внутренних точек в линейном программировании // Оптимизация, управление, интеллект. 1995. №1.–С. 20-37.

49. Зоркальцев В.И., Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М. Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем. / Препринт. - Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. – с. 17-22.

50. Зоркальцев В. И. Симметричная двойственность. Приложения к моделям электрических и гидравлических цепей. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. – 40 с. – Препринт №6.

51. Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность в оптимизации при сепарабельных целевых функциях // «Оптимизация, управление, интеллект», №9, 2005, с. 72-83.

52. Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность в оптимизации и ее приложения. // Известия высших учебных заведений. Математика, 2006, №2, с. 53–59.

53. Зоркальцев В. И., Хамисов О. В. Равновесные модели в экономике и энергетике. – Новосибирск: Наука, 2006. – 221 с.

54. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Нелинейная транспортная модель. // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследо-

вание операций»: Материалы конференции (Владивосток, 7 – 14 сентября 2007). – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. – С. 161.

55. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Нелинейная транспортная модель // Труды Всероссийской конференции «Равновесные модели экономики и энергетики» и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2 – 8 июля 2008 года.: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. – С. 586-600.

56. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Транспортная модель с нелинейными затратами на перевозку // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС. – №3 (19), 2008. – С. 87–97.

57. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С., Пержабинский С.М. Опыт использования алгоритмов внутренних точек в моделях энергетики. // Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления», посвященная 60-летию д.т.н., профессора, академика Национальной инженерной академии Биярова Т.Н.: Материалы конференции (19–20 ноября 2009 года, Алматы, Казахстан). – С. 158-166.

58. Зоркальцев В.И. Класс алгоритмов внутренних точек // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – № 12. – С. 3-28.

59. Зоркальцев В.И. Двойственные алгоритмы внутренних точек // Известия высших учебных заведений. Математика, 2011. – С. 1-27.

60. Зоркальцев В.И., Елифанов С.П., Медвежонков Д.С. Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения при ограничениях неравенствах на переменные // Математическое моделирование трубопроводных систем энергетики / Тр. XII Всеросс. научного семинара с международным участием «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». – Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2010. – С. 123-139.

61. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Симметричная двойственность в задачах выпуклой оптимизации и модели потокораспределения // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования №12. (Тезисы докладов 14-ой Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения») Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. – С. 43-44.

62. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек на задачах потокораспределения // Научный журнал «Вестник университета «Туран». – Казахстан, Алматы: Университет Туран. – 2011. – № 4 (52) – С. 127–133.

63. Зоркальцев В.И. , Медвежонков Д.С. , Пержабинский С.М. Проекция точки на политоп. // Тезисы Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация», посвященной 100-летию С.Н.Черникова, Екатеринбург, 14 – 19 мая 2012 г. – Екатеринбург: изд-во «УМЦ-УПИ», 2012. – С. 77 – 78.

64. Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С. Численные эксперименты с вариантами алгоритмов внутренних точек на нелинейных задачах потокораспределения // Управление большими системами: электрон. журн. 30.11.2013. URL: <http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS4602.pdf> (дата обращения: 30.11.2013).

65. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1967. – 460 с. – (Серия «Экономико-математическая библиотека»)

66. Илькевич Н.И. Сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2007. – 95 с.

67. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. // Успехи математических наук, Т. 23, вып. 6 (144), 1968. – С. 51-116.

68. Канторович Л.В. Математические методы организации и планиро-

вания производства. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1949. – 68 с.

69. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. – М.; Л.: Издательство АН СССР, 1949, с. 110-138.

70. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН СССР, (1959) 1960. – 347 с.

71. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 232 с.

72. Киреев А.П. Международная экономика: Учебное пособие: В 2 ч. Ч.1: Международная микроэкономика: движение товаров и факторов производства. – 2001. – 416 с.

73. Коваленко А.Г. О математическом моделировании рассредоточенного рынка // Экономика и математические методы.–1999.–Т. 35.–№ 3.–С.108-115.

74. Курант Р. Уравнения с частными производными.–М.: Мир, 1964. – 830с.

75. Лившиц В.Н. Михайлова В.П., Хранович И.Л. О возможности решения транспортной задачи выпуклого программирования с помощью электрического моделирования // «Вопросы радиоэлектрон.». – Сер.7 – 1965.

76. Лившиц В.Н., Левит Б.Ю. Оценка эффективности некоторых алгоритмов оптимального распределения потоков на сети // Труды симпозиума «Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов». – Киев. – 1969. – №4.

77. Лившиц В.Н. Определение эффективности капитальных вложений на транспорте // Сб. трудов ВНИИСИ. – М., 1982, вып.8.

78. Лившиц В.Н., Браславский А.Л., Позамантир Э.И. Реформирование железнодорожного транспорта. Либерально-рыночный или социально-рыночный вариант? //«Бюллетень транспортной информации». №5. 2001.

79. Лобачев В. Г. Вопросы рационализации расчетов водопроводных

сетей. – М.: ОНТИ, 1936. – 148 с.

80. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. (2-е изд.) – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 179 с.

81. Медвежонков Д.С., Зоркальцев В.И. Теория и методы расчета моделей потокораспределения // Вестник Иркутского университета. Спец. вып.: Материалы ежегодн. научн.-теор. конф. мол. уч. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2005. – С. 105-107.

82. Медвежонков Д.С. Преобразование Лежандра и его применение // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2006. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 36) – С. 235-241.

83. Медвежонков Д.С. Анализ эффективности некоторых экстремальных алгоритмов расчета гидравлических цепей // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2006. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 36) – С. 47-53.

84. Медвежонков Д.С. Преобразование Лежандра и его применение // Вестник Иркутского университета. Спец. вып.: Материалы ежегодн. научн.-теор. конф. мол. уч. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2006. – С. 116-117.

85. Медвежонков Д.С. Нелинейная двойственная модель транспортной задачи. // Математика и проблемы ее преподавания в вузе: Труды III межвузовской зональной конференции, посвященной памяти профессора Б.А.Бельтюкова – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та, 2007. С. 102–104.

86. Медвежонков Д.С. Нелинейная модель транспортной задачи. // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования №11. (Тезисы докладов 13-ой Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения») Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 130-131.

87. Медвежонков Д.С. Нелинейная транспортная задача с переменным спросом и предложением // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2007. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН,

Вып. 37) – С. 101-107.

88. Медвежонков Д.С., Зоркальцев В.И. Нелинейная транспортная модель. // Тезисы докладов IX Школы-семинара молодых ученых "Математическое моделирование и информационные технологии: Управление, искусственный интеллект, прикладное программное обеспечение и технологии программирования", ММИТ'07. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2007. – С. 111–114.

89. Медвежонков Д.С. Нелинейная транспортная модель с ограничением пропускной способности ветвей // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 38) – С. 81–88.

90. Медвежонков Д.С. Нелинейная транспортная модель с двусторонними ограничениями на объемы перевозок // Теория и методы согласования решений: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука, 2009. – С. 146-159.

91. Медвежонков Д.С. Транспортная модель с кусочно-заданными издержками и недостатком или избытком возможностей генерации. // IV Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: Материалы конференции (Омск, 29 июня – 4 июля 2009) / Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – Омск: Полиграфический центр КАН, 2009. – С. 235.

92. Медвежонков Д.С. Транспортная модель с кусочно-заданными нелинейными издержками // Научный журнал «Современные технологии. Системный анализ. Моделирование». – Иркутск: ИрГУПС. – №4 (24), 2009. – С. 220-225.

93. Медвежонков Д.С. Транспортная модель с минимизацией кусочно-заданных нелинейных издержек при суммарно допустимом объеме снабжения, не равном суммарной потребности // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 39) – С. 179–187.

94. Медвежонков Д.С. Нелинейная модель для оценки возможностей единой системы газо- или нефтеснабжения по удовлетворению потребителей в условиях чрезвычайных ситуаций // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010. – (Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, Вып. 40)

95. Медвежонков Д.С. Нелинейная сетевая модель для исследования живучести отраслевых систем газо- и нефтеснабжения в чрезвычайных ситуациях // II Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи»: Тезисы (Иркутск, 28 июня – 4 июля 2010). – Иркутск: Изд-во ИДСТУ СО РАН, 2010. – С. 54.

96. Медвежонков Д.С. Исследование прямого и двойственного алгоритма внутренних точек на классе задач потокораспределения // Системные исследования в энергетике. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2011. – (Тезисы статей) – С. 19.

97. Медвежонков Д.С. Сравнение сходимости прямого и двойственного алгоритма внутренних точек на классе задач потокораспределения // Тезисы Российско-Монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 54.

98. Медвежонков Д.С. Экспериментальные исследования прямого и двойственного алгоритма внутренних точек на классе задач потокораспределения // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т. 2: Математическое программирование. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 131–138.

99. Медвежонков Д.С. Моделирование транспортных систем с использованием двойственных задач выпуклой оптимизации // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т. 6: Математическая экономика. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 191–196.

100. Медвежонков Д.С. Экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек на нелинейных задачах потокораспределения // Вестн. Бурят. гос. ун-та. – 2013. Вып. 9. – С. 12-16.

101. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей.– М.: Наука, 1985. – 278 с.

102. Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газо-снабжения. – Новосибирск: Наука, 1992. – 407 с.

103. Методы и модели исследования живучести систем энергетики/Антонов Г.Н., Черкесов Г.Н., Криворучский Л.Д. и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 285 с.

104. Надежность систем энергетики и их обрудование / Под общей редакцией Ю.Н. Руденко: В 4-х т. Т. 1: Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / Под ред. Ю.Н. Руденко. – М.:Энергоатомиздат, 1994. – 480 с.: ил.

105. Надежность систем энергетики: достижения, проблемы, перспективы / Г.Ф. Ковалев, Е.В. Сеннова, М.Б. Чельцов и др. / Под ред. Н.И. Воропая. – Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1999. – 434 с.

106. Надежность топливо- и энергоснабжения и живучесть систем энергетики регионов России / Л.Л. Богатырев, А.В. Бочегов, Н.И. Воропай [и др.]; ред. Н.И. Воропай, А.И. Татаркин; рец. Х.Н. Гизатуллин, Ю.Я. Чукуре-ев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2003. – 391 с.

107. Новицкий Н.Н., Токарев В.В. Релейная методика расчета потоко-распределения в гидравлических цепях с регулируемыми параметрами.// Известия РАН Энергетика – 2001.– №2 – С. 88–98.

108. Попов Л.Д. Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнителности: Учеб. пособ. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. 124 с.

109. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М:

Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1980.

110. Пяткова Н.И, Сендеров С.М. Использование двухуровневой технологии исследований при решении проблем энергетической безопасности // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 59. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009. – С. 274-283.

111. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.

112. Рубинштейн Г. Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. // Успехи математических наук, Т. 25, вып. 5 (155), 1970. – С. 171-201.

113. Сендеров С.М., Еделев А.В. Технология поиска "узких" мест в работе ЕСГ и выбор путей преодоления ЧС с газоснабжением потребителей. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 59. / Отв. ред. Н.И. Воропай. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009. – С. 249-254.

114. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – 221 с.

115. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.

116. Системы линейных неравенств: учебное пособие / В. И. Зоркальцев, М. А. Киселева – Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. – 128с.

117. Толстой А. Н. Методы нахождения наименьшего суммарного километража при планировании перевозок в пространстве // Планирование перевозок, Сборник первый – М: Транспечать НКПС, 1930. – С. 23–55.

118. Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. // Социалистический транспорт, № 9, 1939. – С. 28–51.

119. Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. – М.: Трансжелдориздат, 1941.

120. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972. – 240с.

121. Филатов А.Ю. Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложений к системам неравенств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Иркутск, 2001. – 123 с.
122. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потoki в сетях. – М: Мир, 1966. –276 с.
123. Хасилев В.Я., Меренков А.П., Каганович Б.М. и др. Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей. – М.: Энергия, 1978. – 176 с.
124. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
125. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
126. Шамрай Н. Б. Применение вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного ценового равновесия // «Информатика и системы управления». – 2006. – №1(11). – С.62–72
127. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Пер с англ. Тихомиров В. М. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
128. Эльстер К.-Х. и др. Введение в нелинейное программирование / Эльстер К.-Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г. / Пер. с нем. под ред. И.И. Еремина. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. литературы, 1985г. – 264с.
129. Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. – Prentice Hall, New Jersey, 1993.
130. P. R. Amestoy, T. A. Davis, and I. S. Duff. An approximate minimum degree ordering algorithm. SIAM J. Matrix Anal. Applic., 17(4):886–905, 1996.
131. P. R. Amestoy, T. A. Davis, and I. S. Duff. Algorithm 837: An approximate minimum degree ordering algorithm. ACM Trans. Math. Softw., 30(3): 381–388, 2004.
132. AWWA (American Water Works Association). Computer Modeling Of Water Distribution Systems. (Manual of water supply practices – M32, 2nd ed.) – American Water Works Association, Denver, Colorado, USA, 2005. – 159 p.
133. Barnes E. A variation on Karmarkar’s algorithm for solving linear programming problems // Mathematical programming, 1986, №36, pp. 174-182.

134. Bazaraa M. S. and Goode J. J., “On symmetric duality in nonlinear programming,” *Operations Research*, vol. 21, pp. 1–9, 1973.
135. Bazaraa, M.S. and Jarvis, J.J.: *Linear Programming and Network Flows*, Wiley, New York, 1977. – 574 s.
136. Bazaraa, M. S., Sherali H. D., Shetty C. M.: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3rd ed. – Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 2006. – 853 p.
137. Beraldi P., Guerriero F., Musmanno R. *Parallel Algorithms for Solving the Convex Minimum Cost Flow Problem // Computational Optimization and Applications*. – Kluwer Academic Publishers, 2001, №18. – pp. 175–190.
138. Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. *Parallel and Distributed Computation. Numerical Methods*. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
139. Bertsekas D. P. *Nonlinear Programming*. – Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995. – 800 p.
140. Bertsekas D. P., Polymenakos L. C., Tseng P. ϵ -relaxation and auction methods for separable convex cost network flow problems // *Network Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, N.Y., 1998, pp. 103-126.
141. Bertsekas D.P., *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1998. – 608 p.
142. Bertsekas D. P., Nedić A., Ozdaglar A. E., *Convex Analysis and Optimization*. – Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003. – 560 p.
143. Birkhoff G., Diaz J.B. *Nonlinear network problems // Quarterly of applied mathematics*. – 1956. Vol. 13, N4. – P. 431–443.
144. Borwein J.M., Lewis A.S. *Convex analysis and nonlinear optimization*. – SpringerVerlag, New York, 2000.
145. Boyd S., Vandenberghe L., *Convex optimization*. – Cambridge University Press, 2004.
146. Broyden C.G. *A simple algebraic proof of Farkas’s lemma and related*

theorems // Optimization methods and software. – 2000. – Vol. 8. – P. 185-199.

147. Broyden C.G. On theorems of the alternative // Optimization methods and software. – 2001. – Vol. 16. – P. 101-111.

148. Cross H., Analysis of flow in networks of conduits or conductors // Urbana Illinois: Eng. Exp. Station of Univ. of Illinois. – 1936. – November. – Bull. N 286. – 29 p.

149. Dafermos S. Traffic Equilibrium and Variational Inequalities // «Transportation Science». – 1980. – V.14. – P.42–54.

150. Dantzig G. B., Eisenberg E., and Cottle R.W., “Symmetric dual nonlinear programs,” Pacific Journal of Mathematics, vol. 15, pp. 809–812, 1965.

151. Devi G., Symmetric duality for nonlinear programming problem involving η -bonvex functions, European J. Oper. Res. 104 (1998) 615–621.

152. Dorn W.S., A symmetric dual theorem for quadratic programming, Journal of the Operations Research Society of Japan 2 (1960) 93–97.

153. Fenchel W. Convex Cones, Sets and Functions. – Princeton University Press, Princeton, New Jersey. – 1951.

154. Fletcher R. Practical methods of optimization. 2nd ed. Wiley-Interscience, New York, 2000. – 450 p.

155. Ford L.R., Fulkerson D.R., Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

156. George, A. , Liu, J. W. H. The evolution of the minimum degree ordering algorithm. SIAM Review, 31(1):1-19, 1989.

157. Gill, P. E., Murray W., and Wright M. H.: Practical Optimization, Academic Press, London, 1981.

158. Goh C.-J., Yang X.Q. Duality in optimization and Variational inequalities. – Taylor & Francis, 2002.–313 p.–(Optimization theory and applications, vol. 2)

159. Guèye O. M., Dussault J.-P., Mahey P. Separable Augmented Lagrangian Algorithm with Multidimensional Scaling for Monotropic Programming // Journal of optimization theory and applications. – Springer Science, 2005, Vol.

127, No. 2. – pp. 329–345.

160. Harris T.E., Ross F.S., Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities, Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955.

161. Haurie A., Marcotte P. On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria // Networks 15. – 1985. – P.295–308.

162. Hitchcock F.L., The distribution of a product from several sources to numerous localities // J. of Mathematics and Physics, vol. 20, 1941. – pp. 224-230.

163. Ibaraki S., Fukushima M., Ibaraki T. Primal-Dual Proximal Point Algorithm for Linearly Constrained Convex Programming Problems // Computational Optimization and Applications. – Kluwer Academic Publishers, 1992, №1. – pp. 207–226.

164. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica, 1984, №4, pp.373-395.

165. Koopmans Tj.C., Optimum utilization of the transportation system, in: The Econometric Society Meeting (Washington, D.C., 1947; D.H. Leavens, ed.) [Proc. of the International Statistical Conf. – Volume V], 1948, pp. 136–146.

166. Koopmans Tj.C., Reiter S., A model of transportation, in: Activity Analysis of Production and Allocation – Proceedings of a Conference (Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 222–259.

167. Kuhn H. W. and Tucker A. W. “Nonlinear Programming”, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (J. Neyman, ed.), Berkeley, University of California Press, 1951, pp. 481-492.

168. Mays L. W., Water distribution systems handbook. – McGraw-Hill, 2000. 912 p.

169. Mond B., “A symmetric dual theorem for non-linear programs”, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 23, pp. 265–269, 1965.

170. Mond B., Weir T., Generalized concavity and duality, in: S. Schaible, W.T. Ziemba (Eds.), Generalized Concavity in Optimization and Economics,

Academic Press, New York, 1981.

171. Nagurney A., Siokos S., *Financial Networks: statics and dynamics*, Springer-Verlag, 1997.

172. Nagurney A. *Network Economics: a Variational Inequality Approach*. – Dordrecht: «Kluwer Academic Publishers». – 1999.

173. Nagurney A. (Ed.), “Innovations in Financial and Economic Networks”, *New Dimensions in Networks*, 2003. – 352 p.

174. Nesterov, Y., and A. Nemirovskii: *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming // Studies in Applied Mathematics, Vol. 13*. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

175. Ouorou A. *A Primal-Dual Algorithm for Monotropic Programming and its Application to Network Optimization// Computational Optimization and Applications*. – Kluwer Academic Publishers, 2000, №15. – pp. 125–143.

176. Rockafellar R.T. *Conjugate Duality and Optimization*. – SIAM, Philadelphia, 1974. – 80 p.

177. Rockafellar R. *Tyrrell: Network flows and monotropic optimization*. – Pure and Applied Mathematics. – New York: Wiley-Interscience, 1984. – 616 p.

178. Rockafellar R.T., Wets R. J.-B. *Variational analysis*. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998. – 733 p.

179. Singer I. *Duality for nonconvex approximation and optimization*. – Springer, 2006. – 375 p.

180. Sinha S.M. *Mathematical programming*. – Elsevier, 2006. – 570 p.

181. Smith M. *The existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria // «Transport. Research»*. – 1979 – P.259–304.

182. Vanderbei R., Meketon M., Freedman B. *A modification of Karmarkar’s linear programming algorithm // Algorithmica*, 1986, №1, pp. 395-407.

183. Ventura J. A. *Computational development of a lagrangian dual approach for quadratic networks // Networks*. – Wiley Periodicals, 2006, Volume 21, Issue 4, Pages 469 – 485.

184. Walk M. Theory of Duality in Mathematical Programming. – Springer-Verlag, 1989. – 178 p.

185. Walski T. M., Haestad Methods, Inc.: Advanced Water Distribution Modeling and Management. – Haestead Press, 2003

186. Wardrop J. Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Inst. Civil Engineers II. – 1952. – P.325–378.

187. Zenios S.A., Mulvey J.M. Relaxation techniques for strictly convex network problems // Annals of Operations Research. – Scientific Publishing Company, 1985, №5. – pp. 517–538.

188. Wolfe, P., A Duality Theorem for Nonlinear Programming, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 19, pp. 239–244, 1961.

Приложение

Справка о внедрении

Дана Медвежонкову Дмитрию Сергеевичу в том, что материалы его диссертации «Симметричная двойственность в выпуклой оптимизации и модели потокораспределения» использованы при модернизации программного комплекса «Нефть и газ России», разработанного в отделе «Живучести и безопасности систем энергетики» ИСЭМ СО РАН. Программный модуль, реализующий алгоритм внутренних точек для модели оценки возможностей ЕСГ или ЕСН в чрезвычайных ситуациях был внедрён в комплекс и апробирован на подсети ЕСГ с исходными данными из базы данных этого комплекса. Проведенные расчеты показали, что предложенная нелинейная модель оценки возможностей ЕСГ и ЕСН позволяет более равномерно распределить дефициты по узлам, чем используемая программном комплексе линейная модель.

Зам. директора по науке,

зав. отд., зав. лаб. Д.т.н.



Сендеров Сергей Михайлович