МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
имени В.М. МАТРОСОВА
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИДСТУ СО РАН)

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДСТУ СО РАН, академик
_______________ И.В. Бычков
« 4 » апреля 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ОДОБРЕНА на заседании
Ученого совета ИДСТУ СО РАН
(Протокол № 3 от « 4 » апреля 2022 г.)
Ученый секретарь, к.т.н.
_______________ Е.С. Фереферов

Иркутск – 2022

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальной дисциплине разработана в соответствии с уровнями высшего образования специалитет и магистратура.

Вступительный экзамен в аспирантуру по специальности 1.1.2 «Дифференциальные уравнения и математическая физика» проводится в письменной форме с последующим устным представлением ответов на экзаменационные вопросы. Поступающий должен ответить на три вопроса из представленных ниже тем. Члены экзаменационной комиссии вправе задавать дополнительные вопросы.

РАЗДЕЛ 1. Алгебра и аналитическая геометрия

1. Комплексные числа: определение, геометрический смысл, три формы записи. Операции над комплексными числами, их свойства.
2. Формы записи уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Взаимное расположение прямых.
3. Формы записи уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости.
4. Кривые второго порядка. Канонические уравнения кривых второго порядка и их классификация.
5. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения поверхностей второго порядка и их классификация.
6. Цилиндрические и развертывающиеся поверхности второго порядка.
7. Операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства.
8. Определение полугруппы, группы, кольца, поля, их примеры. Линейные (векторные) пространства.
9. Матрицы и определители, их свойства. Теорема Лапласа о разложении определителя.
10. Линейная независимость системы векторов, ее ранг. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в базисе, их изменение при смене базиса.
11. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений: матричный, Крамера, Гаусса. Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений, метод прогонки.
12. Линейные преобразования линейного конечномерного пространства, их матрицы. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса.
13. Собственные числа и векторы линейного преобразования и его матрицы. Характеристический многочлен. Размерность пространства собственных векторов.
14. Нормальная жорданова форма матрицы, ее нахождение.
15. Квадратичная функция и квадратичная форма. Приведение квадратичных форм к каноническому виду. Закон инерции.
16. Положительно определенные квадратичные формы. Критерии положительной определенности.

РАЗДЕЛ 2. Математический анализ и теория функций комплексного переменного

1. Предел последовательности и предел функции. Свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие, их свойства.
3. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций.
4. Свойства функций, непрерывных на промежутке. Теоремы Вейерштрасса, Больцано–Коши, Кантора.

5. Дифференцирование функций одной и многих переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций одной и многих переменных.
6. Свойства функций, дифференцируемых на промежутке. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа, Коши.
8. Неявные функции. Теорема существования и дифференцируемости.
9. Определение интеграла по Риману. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций.
10. Кратные интегралы. Сведение кратного интеграла к повторному.
11. Криволинейные интегралы. Способы вычисления. Формула Грина.
12. Поверхностные интегралы. Способы вычисления. Формула Остроградского–Гаусса.
13. Мера Лебега и ее свойства. Интеграл Лебега от функции одной переменной.
14. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости числовых рядов. Гармонический ряд.
15. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Свойства равномерно сходящейся последовательности.
16. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Теорема Коши–Адамара. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
17. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана.
18. Интегральные теоремы Коши.
19. Вычеты. Основная теорема о вычетах.
20. Ряд Фурье по ортонормированной последовательности. Полнота и замкнутость последовательности. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

РАЗДЕЛ 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.
2. Теорема Коши существования и единственности решения задачи Коши. Метод сжимающих отображений.
3. Теорема Пеано существования решения задачи Коши. Метод ломаных Эйлера.
4. Теорема Коши–Пикара.
5. Приемы интегрирования простейших дифференциальных уравнений первого порядка.
6. Сведение дифференциальных уравнений высших порядков к системе дифференциальных уравнений первого порядка.
7. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка. Характеристическое уравнение. Фундаментальная система решений.
8. Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка Метод вариации постоянных.
9. Понятие о динамической системе. Динамическая система как математическое описание механической системы. Автономная динамическая система, свойство группы. Точки покоя. Аттракторы.
10. Устойчивость решений по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивом движении.
11. Асимптотическая устойчивость. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
12. Устойчивость решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
13. Второй метод Ляпунова. Устойчивость по первому приближению.
14. Постановка основной задачи оптимального управления. Пример.
15. Изопериметрические задачи. Метод множителей Лагранжа.
16. Задача синтеза оптимального управления. Пример.

17. Теорема Куна–Таккера.
18. Задача оптимального быстродействия. Принцип максимума Понтрягина.
19. Задачи вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления с подвижными концами.
20. Сильный экстремум. Необходимое условие Вейерштрасса.
21. Вариационный принцип Гамильтона

РАЗДЕЛ 4. Уравнения с частными производными, уравнения математической физики и функциональный анализ

1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши. Тип Ковалевской. Теорема Коши–Ковалевской. Пример Ковалевской.
2. Канонический вид дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.
3. Волновое уравнение как математическое описание малых поперечных колебаний. Различные виды начальных и граничных условий.
4. Характеристики волнового уравнения, их свойства и применение для построения решений начально-краевых задач.
5. Формулы Пуассона и Даламбера.
6. Метод разделения переменных в задачах математической физики. Метод Фурье для волнового уравнения.
7. Уравнение диффузии (теплопроводности) как математическое описание распространения тепла в сплошной среде. Различные виды начальных и граничных условий. Метод Фурье для уравнения диффузии.
8. Уравнение Лапласа как математическое описание стационарных тепловых процессов. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Задача Неймана. Задача Дирихле. Функция Грина для уравнения Лапласа.
9. Метод Фурье для уравнения Лапласа. Пример Адамара.
10. Уравнение Хопфа как простейшее нелинейное уравнение с частными производными, его сравнение с уравнением переноса. Градиентная катастрофа.
11. Аксиоматика механики сплошных сред. Модели
12. Метрические пространства: определение и примеры. Предельные точки в метрических пространствах.
13. Полные метрические пространства. Теорема Бэра.
14. Компактность в метрических пространствах. Теорема Арцела–Асколи.
15. Линейное пространство. Норма. Примеры нормированных пространств. Банаховы пространства.
16. Евклидовы и гильбертовы пространства. Примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев И.А. Линейная алгебра. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001.
2. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: МФТИ, 2011.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука; Физматлит, 1999.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. – М.: Дрофа, 2003.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 т. – М.: Физматлит, 2005.
6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: в 2 т. – СПб.: Лань, 2005.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2010.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: РХД, 2000.

9. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1984.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
11. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2003.
12. Ащепков Л.Т. Лекции по оптимальному управлению: учеб. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1996.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: учебник для вузов: в 2 кн. – М.: МЦНМО, 2011. – Кн. 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование; Кн. 2: Оптимизация в функциональных пространствах. Регуляризация. Аппроксимация.
14. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2007.
16. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.
17. Михлин С.Г. Курс математической физики. – СПб.: Лань, 2002.
18. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Наука, 1970.
19. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
20. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
21. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.
22. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1992.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1999.
24. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Т. Рожковская, 2003.
25. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
26. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2007.

Разработчик:
Зав. лабораторией Дифференциальных
уравнений и управляемых систем,
к.ф.-м.н. _____________ Н.И. Погодаев

Эксперт:
Зам. директора по научной работе,
д.ф.-м.н. _____________ А.А. Щеглова