ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Март 2019 **Выпуск 97. С. 00-00**

А. А. Щеглова
Институт динамики систем и теории управления им. Матросова СО РАН
Иркутск, Россия
shchegl@icc.ru

А. Д. Кононов
Институт динамики систем и теории управления им. Матросова СО РАН
Иркутск, Россия
my_official@rambler.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается линейная нестационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами. Предполагается, что система не разрешима относительно производной искомой вектор-функции при любых матричных коэффициентах из заданных интервальных семейств. Получены достаточные условия, гарантирующие сохранение внутренней структуры рассматриваемой системы. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены достаточные и необходимые и достаточные условия робастной устойчивости. Допускается переменный ранг матричных коэффициентов и произвольно высокий индекс неразрешенности. Библиография: 14 назв.

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — заданные $(n\times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det\, A(t) \equiv 0$ на I. Системы такого рода называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями.* Важнейшей характеристикой дифференциально-алгебраических уравнений является индекс неразрешенности $r : 0 \leqslant r \leqslant n$, отражающий сложность внутренней структуры системы.

В данной работе изучается вопрос об асимптотической устойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений

$$(A(t) + \Delta_A(t))x'(t) + (B(t) + \Delta_B(t))x(t) = 0, \quad t \in I, \tag{1.2}$$

где $\Delta_A(t) = (\alpha_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta_B(t) = (\beta_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ — матрицы неопределенностей,

$$|\alpha_{i,j}(t)| \leqslant g^{[0]}_{i,j}(t), \quad |\beta_{i,j}(t)| \leqslant h^{[0]}_{i,j}(t), \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Матрицы $G^{[0]}(t) = (g^{[0]}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $H^{[0]}(t) = (h^{[0]}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ задают масштабы изменения элементов матриц $A(t)$ и $B(t)$.

Основная трудность, возникающая при исследовании робастных качественных свойств дифференциально-алгебраических уравнений , связана с тем, что даже в случае индекса один при сколь угодно малых возмущениях коэффициентов может измениться вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы (1.1) могут потерять для анализа всякое значение.

В литературе имеются результаты по робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений [**1, 2, 3**], полученные посредством преобразования системы к канонической форме Кронекера — Вейерштрасса. В [**4**] получены достаточные условия робастной устойчивости дифференциально-алгебраических уравнений произвольно высокого индекса неразрешенности в условиях, когда матрицы неопределенностей удовлетворяют некоторым условиям малости матричных норм. В [**5, 6, 7**] изучалась проблема робастной устойчивости дифференциально-алгебраических уравнений в случае, когда возмущение присутствует лишь в матрице $B(t)$.

Что касается нестационарных дифференциально-алгебраических уравнений, то известны результаты для систем индекса 1 с периодическими коэффициентами, использующие подход, использующий индекс неразрешенности и базирующийся на построении проекторов на ядро [**8, 9**]. В [**10**] получены необходимые и достаточные условия робастной устойчивости нестационарных дифференциально-алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами для частного случая индекса один (так называемые impuls-free или удовлетворяющие критерию "ранг-степень").

В данной работе получены условия, гарантирующие, что введение интервальных возмущений в коэффициенты системы не нарушает внутреннюю структуру дифференциально-алгебраических уравнений . Условия робастной устойчивости получены с использованием структурной формы, построение которой носит конструктивный характер и приводит к системе эквивалентной исходной системе (1.2) в смысле решений. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены достаточные и необходимые и достаточные условия робастной устойчивости. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности и переменный ранг матричных коэффициентов системы.

2. Структурная форма для системы дифференциально-алгебраических уравнений

Будем предполагать, что в системе дифференциально-алгебраических уравнений (1.1) элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на I функции. Определим $(n(r+1)\times n)$ - матрицы

$$\mathscr{B}_r(t) = \operatorname{colon}(C_0^0 B(t), C_1^0 B'(t), \dots, C_r^0 B^{(r)}(t)),$$
$$\mathscr{A}_r(t) = \operatorname{colon}(C_0^0 A(t), C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t), \dots, C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t)), \tag{2.1}$$

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\Lambda_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ C_1^1 A & O & \dots & O \\ C_2^1 A' + C_2^2 B & C_2^2 A & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)} + C_r^2 B^{(r-2)} & C_r^2 A^{(r-2)} + C_r^3 B^{(r-3)} & \dots & C_r^r A \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$–матрицу

$$\mathscr{D}_r(t) = \left(\ \mathscr{B}_r(t)\ \middle|\ \mathscr{A}_r(t)\ \middle\|\ \Lambda_r(t)\ \right).$$

Здесь и далее $C_i^j = i!/j!(i-j)!$ — биномиальные коэффициенты, и для любой достаточно гладкой функции

$$\xi^{(i)}(t) = \Big(\frac{d}{dt}\Big)^i \xi(t).$$

Допустим, что для некоторого r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ выполняется условие $\operatorname{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const}$ для всех $t \in I$ и в матрице $\mathscr{D}_r(t)$ имеется обратимая для всех $t \in I$ подматрица $M_r(t)$ порядка $n(r+1)$, включающая в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и все столбцы матрицы $\mathscr{A}_r(t)$. Будем называть $\det M_r(t)$ *разрешающим минором.*

Разобьем матрицы $A(t)$ и $B(t)$ на блоки

$$(A_1(t)\ A_2(t)) = A(t)Q, \quad (B_1(t)\ B_2(t)) = B(t)Q, \tag{2.3}$$

где Q — матрица перестановок столбцов такая, что все столбцы матрицы

$$\mathscr{B}_{2,r}(t) = \operatorname{colon}(C_0^0 B_2(t), C_1^0 B_2'(t), \ldots, C_r^0 B_2^{(r)}(t))$$

входят в разрешающий минор матрицы $\mathscr{D}_r(t)$, а столбцы матрицы

$$\mathscr{B}_{1,r}(t) = \operatorname{colon}(C_0^0 B_1(t), C_1^0 B_1'(t), \ldots, C_r^0 B_1^{(r)}(t)) \tag{2.4}$$

не входят в этот минор. Блоки $B_2(t)$ и $A_2(t)$ имеют размеры $n \times d$, $d = nr - \lambda$. О построении матрицы Q см. [**4**].

Обозначим

$$\Gamma_r(t) = \mathscr{D}_r(t) \operatorname{diag}\left\{Q\begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix},\ Q, \ldots, Q\right\} = \Big(\ \mathscr{B}_{2,r}(t)\ \big|\ A_r(t)Q\ \big\|\ \Lambda_r(t)Q_r\ \Big), \tag{2.5}$$

где E_d — единичная матрица порядка d, запись $\operatorname{diag}\{P_1, \ldots, P_s\}$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы нулевые, блочная матрица

$$Q_r = \operatorname{diag}\{Q, \ldots, Q\}$$

имеет на главной диагонали r блоков равных Q.

Определение 2.1. Наименьшее значение r, при котором в матрице $\mathscr{D}_r(t)$ найдется разрешающий минор, называется *индексом неразрешенности* системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.1).

Лемма 2.1 (см. [**11**]). *Предположим, что*

1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^r(I)$,

2) $\operatorname{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const}$ *для всех* $t \in I$,

3) *в матрице* $\mathscr{D}_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда существует оператор

$$\mathscr{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^r, \tag{2.6}$$

где $R_j(t) \in \mathbf{C}(I)$ — $(n \times n)$*-матрицы* $(j = \overline{0,r})$, *такой, что*

$$\mathscr{R}[A(t)\xi'(t) + B(t)\xi(t)] = (R_0(t)\ R_1(t)\ \ldots\ R_r(t))\mathscr{D}_r(t)\operatorname{colon}(\xi(t), \xi'(t), \ldots, \xi^{(r+1)}(t))$$

$$= \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}\xi'(t) + \begin{pmatrix} J_1(t) & E_d \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}\xi(t) \tag{2.7}$$

для любой n*-мерной функции* $\xi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$, $J_1(t)$ *и* $J_2(t)$ — *некоторые матрицы соответствующих размеров.*

Прямым следствием леммы 2.1 является следующий результат.

Предложение 2.1. *Пусть выполнено условие* 1) *леммы* 2.1. *Оператор вида* (2.6), *обладающий свойством* (2.7), *существует тогда и только тогда, когда алгебраическая система*

$$(R_0(t)\ R_1(t)\ \dots\ R_r(t))\Gamma_r(t) = (E_n\ O\ \dots\ O), \tag{2.8}$$

имеет решение $R_j(t) \in \mathbf{C}(I)$ $(j = \overline{0,r})$. *Матрица* $\Gamma_r(t)$ *определена в* (2.5).

Покажем, что в условиях леммы 2.1 коэффициенты оператора (2.6), (2.7) могут быть найдены по формуле

$$(R_0(t)\ R_1(t)\ \dots\ R_r(t)) = (E_n\ O\ \dots\ O)\, M_r^{-1}(t). \tag{2.9}$$

Обозначим Q_Λ матрицу перестановок столбцов, такую, что

$$\Lambda_r(t)Q_rQ_\Lambda = (\Lambda_r^{[1]}(t)\ \Lambda_r^{[2]}(t)). \tag{2.10}$$

Здесь и далее $\Lambda_r^{[1]}(t)$ — матрица размера $n(r+1)\times\lambda$, состоящая из столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$, которые входят в разрешающий минор; $\Lambda_r^{[2]}(t)$ — матрица размера $n(r+1)\times(nr-\lambda)$, состоящая из столбцов, которые не входят в упомянутый минор. Тогда

$$M_r^{-1}(t)\mathscr{D}_r(t)Q_{r+2}\operatorname{diag}\{E_{2n}, Q_\Lambda\} = \left(\begin{array}{c|ccc||cc} J_1(t) & E_d & O & O & O & K_1(t) \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & K_2(t) \\ \hline J_3(t) & O & O & E_d & O & K_3(t) \\ J_4(t) & O & O & O & E_\lambda & K_4(t) \end{array}\right), \tag{2.11}$$

где $J_i(t)$, $K_i(t)$ $(i = 1,2,3,4)$ — матрицы соответствующих размеров.

При этом $M_r^{-1}(t)\Gamma_r(t)\operatorname{diag}\{E_{n+d}, Q_\Lambda\}$ — это матрица, расположенная в (2.11) правее одиночной вертикальной линии, матрица $M_r^{-1}(t)\Lambda_r(t)Q_rQ_\Lambda$ расположена в (2.11) справа от двойной черты.

Поскольку $\operatorname{rank}\Lambda_r(t) = \lambda$ для всех $t\in I$, имеем $\operatorname{rank} M_r^{-1}(t)\Lambda_r(t)Q_rQ_\Lambda \equiv \lambda$ на I. На этом основании заключаем, что $K_1(t)\equiv O$, $K_2(t)\equiv O$, $K_3(t)\equiv O$. Таким образом, коэффициенты оператора $\mathscr{R}$, вычисленные по формуле (2.9), будут решением системы (2.8).

Лемма 2.2 (см. [**11**]). *Предположим, что*

1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$,

2) *выполнены условия* 2) *и* 3) *леммы* 2.1,

3) $\operatorname{rank}\Lambda_{r+1}(t) = \lambda + n$ *для всех* $t \in I$.

Тогда оператор $\mathscr{R}$ *обладает левым обратным оператором* $\Lambda = L_0 + L_1\dfrac{d}{dt}$.

Введем в рассмотрение $n\times nr$-матрицу

$$\Phi_{r+1}(t) = (C_{r+1}^1A^{(r)}(t) + C_{r+1}^2B^{(r-1)}(t)\ \dots\ C_{r+1}^rA'(t) + C_{r+1}^{r-1}B(t)). \tag{2.12}$$

Разобьем эту матрицу на блоки так же, как для матрицы $\Lambda_r(t)$ (см. (2.10)):

$$\Phi_{r+1}(t)Q_rQ_\Lambda = (\Phi_{r+1}^{[1]}(t)\ \Phi_{r+1}^{[2]}(t)),$$

блок $\Phi_{r+1}^{[1]}(t)$ имеет размер $n\times\lambda$. Обозначим

$$\Psi_{r+1}(t) = (\Phi_{r+1}^{[2]}(t) - \Phi_{r+1}^{[1]}(t)K(t)\ A(t)),$$

где $K(t) = (O_{nr-\lambda}\ E_\lambda)M_r^{-1}(t)\Lambda_r^{[2]}(t)$ (индекс при нулевой матрице указывает число ее столбцов).

Предложение 2.2. *Предположим, что*

1) *выполнены условия* 1) *и* 2) *леммы* 2.2,

2) *в матрице* $\Psi_{r+1}(t)$ *имеется обратимая для всех* $t\in I$ *подматрица порядка* n.

Тогда выполнено условие 3) *леммы 2.2 и в матрице* $\mathscr{D}_{r+1}(t)$ *найдется обратимая для всех* $t\in I$ *подматрица* $M_{r+1}(t)$ *порядка* $n(r+2)$, *включающая в себя* $n+\lambda$ *столбцов матрицы* $\Lambda_{r+1}(t)$ *и все столбцы матрицы* $(\mathscr{B}_{2,r+1}(t)\ \mathscr{A}_{r+1}(t))$ *(см.* (2.4), (2.3), (2.1)).

Доказательство. По построению матрица $\mathscr{D}_{r+1}(t)$ имеет вид

$$\mathscr{D}_{r+1}(t)=\left(\begin{array}{c|c||cc}\mathscr{B}_r(t) & \mathscr{A}_r(t) & \Lambda_r(t) & O\\ \hline C^0_{r+1}B^{(r+1)}(t) & C^0_{r+1}A^{(r+1)}(t)+C^1_{r+1}B^{(r)}(t) & \Phi_{r+1}(t) & A(t)\end{array}\right).$$

Умножим $\mathscr{D}_{r+1}(t)$ слева на обратимую на I матрицу

$$\left(\begin{array}{c||cc}E_{n+d} & O & O\\ O & E_\lambda & O\\ O & -\Phi^{[1]}_{r+1}(t) & E_n\end{array}\right)\begin{pmatrix}M_r^{-1}(t) & O\\ O & E_n\end{pmatrix}$$

и справа на матрицу перестановок $\operatorname{diag}\{Q_{r+2},E_n\}\times\operatorname{diag}\{E_{2n},Q_\Lambda,E_n\}$. В результате получим

$$\left(\begin{array}{cc|cc||cc}J_1(t) & E_d & O & O & O & O\\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O\\ ** & O & O & E_d & O & O\\ ** & O & O & O & E_\lambda & *\\ \hline * & * & * & * & O & \Psi_{r+1}(t)\end{array}\right), \tag{2.13}$$

где $*$ обозначает матрицу, явный вид которой несущественен. Так как $\operatorname{rank}\Lambda_{r+1}(t)=\operatorname{rank}\Lambda_r(t)+\operatorname{rank}\Psi_{r+1}(t)$ по построению, из условия 2) очевидным образом следует условие 3) леммы 2.2. Кроме того, матрица $M_{r+1}(t)$, фигурирующая в формулировке утверждения, существует и включает в себя все столбцы матрицы $\mathscr{D}_{r+1}(t)$, соответствующие столбцам матрицы (2.13), в которых расположены единичные матрицы и обратимая на I подматрица матрицы $\Psi_{r+1}(t)$. $\square$

3. Возмущения, сохраняюшие внутреннюю структуру системы

Предположим, что в системе (1.2) $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)\in\mathbf{C}^{r+1}(I)$. Поскольку решения системы (1.1) зависят от производных коэффициентов системы до порядка r включительно, таким же свойством будут обладать и решения системы (1.2). Поэтому необходимо знать не только масштаб изменения матриц $A(t)$ и $B(t)$, но и их производных:

$$|\alpha^{(k)}_{i,j}(t)|\leqslant g^{[k]}_{i,j}(t),\quad |\beta^{(k)}_{i,j}(t)|\leqslant h^{[k]}_{i,j}(t),\quad i,j=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,r+1}, \tag{3.1}$$

где $\Delta^{(k)}_A(t)=(\alpha^{(k)}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta^{(k)}_B(t)=(\beta^{(k)}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$. Матрицы

$$G^{[k]}(t)=(g^{[k]}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}},\quad H^{[k]}(t)=(h^{[k]}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$$

задают масштабы изменения производных $A^{(k)}(t)$ и $B^{(k)}(t)$.

Для того чтобы иметь возможность проводить анализ устойчивости системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.2) с использованием информации о структуре системы (1.1), введем следующее определение.

Определение 3.1. Будем говорить, что возмущения $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$ не меняют внутреннюю структуру системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.1), если при каждом фиксированном выборе возмущений $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, удовлетворяющих условиям (1.1), (3.1), существует оператор

$$\widetilde{\mathscr{R}}=\sum_{j=0}^{r}\widetilde{R}_j(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^j, \tag{3.2}$$

такой, что $\widetilde{R}_j(t)\in\mathbf{C}(I)$, и действие этого оператора на систему (1.2) преобразует ее к виду

$$\begin{pmatrix}O & O\\ E_{n-d} & O\end{pmatrix}Q^{-1}x'(t)+\begin{pmatrix}U_1(t) & E_d\\ U_2(t) & O\end{pmatrix}Q^{-1}x(t)=0,\quad t\in I, \tag{3.3}$$

где $U_1(t),U_2(t)\in\mathbf{C}(I)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Найдем условия, при которых для системы (1.2) определен оператор $\widetilde{\mathscr{R}}$ при каждом выборе матриц $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, элементы которых подчиняются оценкам (1.1), (3.1).

Введем следующие обозначения

$$(\Delta_{A_1}(t)\ \Delta_{A_2}(t))=\Delta_A(t)Q,\quad (\Delta_{B_1}(t)\ \Delta_{B_2}(t))=\Delta_B(t)Q, \tag{3.4}$$

$$\Delta_{\Lambda_r}(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ C_1^1\Delta_A & O & \dots & O \\ C_2^1\Delta'_A + C_2^2\Delta_B & C_2^2\Delta_A & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_r^1\Delta_A^{(r-1)} + C_r^2\Delta_B^{(r-2)} & C_r^2\Delta_A^{(r-2)} + C_r^3\Delta_B^{(r-3)} & \dots & C_r^r\Delta_A \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где Q — матрица перестановок из (2.3); блоки $\Delta_{A_2}(t)$, $\Delta_{B_2}(t)$ имеют размеры $n \times d$ также как и блоки $A_2(t)$, $B_2(t)$ в (2.3); $\Delta_{\Lambda_r}(t)$ задает возмущение матрицы $\Lambda_r(t)$ (2.2).

Разобьем $\Delta_{\Lambda_r}(t)$ на блоки, как это было сделано с матрицей $\Lambda_r(t)$ (см. (2.10)):

$$\Delta_{\Lambda_r}(t)Q_rQ_\Lambda = (\Delta_\Lambda^{[1]}(t), \Delta_\Lambda^{[2]}(t)). \tag{3.6}$$

Определим квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Delta_{M_r}(t) = \left(\begin{array}{c|cc||c} C_0^0\Delta_{B_2} & C_0^0\Delta_{A_1} & C_0^0\Delta_{A_2} & \\ C_0^1\Delta'_{B_2} & C_1^0\Delta'_{A_1} + C_1^1\Delta'_{B_1} & C_1^0\Delta'_{A_2} + C_1^1\Delta'_{B_2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \Delta_\Lambda^{[1]} \\ C_0^r\Delta_{B_2}^{(r)} & C_r^0\Delta_{A_1}^{(r)} + C_r^1\Delta_{B_1}^{(r-1)} & C_r^0\Delta_{A_2}^{(r)} + C_r^1\Delta_{B_2}^{(r-1)} & \end{array} \right), \tag{3.7}$$

которая задает возмущение матрицы $M_r(t)$, определителем которой является разрешающий минор. Пусть $S(t) = (s_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}} \in C(I)$. Введем в рассмотрение матричную норму

$$\|S(t)\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \sup_{t\in I} |s_{i,j}(t)|. \tag{3.8}$$

Тогда с учетом (1.3) и (3.1)

$$\|\Delta_A^{(k)}(t)\| \leqslant \|G^{[k]}(t)\|,$$

$$\|\Delta_B^{(k)}(t)\| \leqslant \|H^{[k]}(t)\|, \quad k = \overline{0, r+1}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в (3.4), матрицы $H^{[k]}(t)$ разобьем на блоки

$$(H_1^{[k]}(t)\ H_2^{[k]}(t)) = H^{[k]}(t)Q, \tag{3.9}$$

где $H_1^{[k]}(t)$ и $H_2^{[k]}(t)$ имеют соответственно размеры $n \times (n-d)$ и $n \times d$. Обозначим

$$\nu_r = \sup_{0\leqslant k\leqslant r} \left(C_k^0\|H_2^{[k]}(t)\| + C_k^k\|G^{[0]}(t)\| + \sum_{j=0}^{k-1}(C_k^j\|G^{[k-j]}(t)\| + C_k^{k-j-1}\|H^{[k-j-1]}(t)\|) \right), \tag{3.10}$$

где в круглых скобках при $k=0$ слагаемое под знаком суммы отсутствует.

Предложение 3.1. *Предположим, что*

1) $A(t), B(t), \Delta_A(t), \Delta_B(t) \in C^r(I)$,

2) $\operatorname{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const}$ *для всех* $t \in I$,

3) *в матрице* $\mathscr{D}_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Если выполняется неравенство

$$\nu_r < \frac{1}{\|M_r^{-1}(t)\|}, \tag{3.11}$$

то матрица $M_r(t) + \Delta_{M_r}(t)$ *непрерывно обратима при всех* $t \in I$ *и при любых матрицах* $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$, *элементы которых удовлетворяют условиям* (1.3), (3.1).

В самом деле, нетрудно получить оценку

$$\|\Delta_{M_r}(t)\| \leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant r} \Big(C_k^0\|\Delta_{B_2}^{(k)}(t)\| + C_k^k\|\Delta_A(t)\|$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1}(C_k^j\|\Delta_A^{(k-j)}(t)\| + C_k^{k-j-1}\|\Delta_B^{(k-j-1)}(t)\|) \Big) \leqslant \nu_r, \tag{3.12}$$

где, так же как и в (3.10), в круглых скобках при $k = 0$ слагаемое под знаком суммы отсутствует.

Из (3.11), (3.12) вытекает неравенство

$$\|\Delta_{M_r}(t)\| < \frac{1}{\|M_r^{-1}(t)\|} \quad \forall t \in I. \tag{3.13}$$

Поэтому при любом $t \in I$ существует матрица $(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}$ Поскольку $M_r(t) + \Delta_{M_r}(t) \in \mathbf{C}(I)$, имеем $(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1} \in \mathbf{C}(I)$.

Замечание 3.1. Поскольку по построению $\nu_r \geqslant 0$, для того чтобы неравенство (3.11) имело смысл, необходимо $\|M_r^{-1}(t)\| \leqslant m < \infty$.

Теорема 3.1. *Предположим, что*

1) *выполнены условия* 1)–3) *предложения* 3.1,

2) *имеет место условие* (3.11).

Для того чтобы при любых матрицах $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$, *элементы которых удовлетворяют оценкам* (1.3), (3.1), *существовал оператор* (3.2), *преобразующий* (1.2) *к виду* (3.3), *необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$(E_n\ O)(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]}(t) \equiv O, \quad t \in I, \tag{3.14}$$

где $\Delta_\Lambda^{[2]}(t)$ *и* $\Delta_{M_r}(t)$ *определены в* (3.6) *и* (3.7). *При этом коэффициенты оператора* (3.2) *вычисляются по формуле*

$$(\widetilde{R}_0(t)\ \widetilde{R}_1(t)\ \dots\ \widetilde{R}_r(t)) = (E_n\ O)(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}. \tag{3.15}$$

Доказательство. В соответствии с предложением 2.1 оператор $\widetilde{\mathscr{R}}$ существует тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$(\widetilde{R}_0(t)\ \widetilde{R}_1(t)\ \dots\ \widetilde{R}_r(t))(\Gamma_r(t) + \Delta_r(t)) = (E_n\ O) \tag{3.16}$$

имеет решение $\widetilde{R}_j(t) \in C(I)$ $(j = \overline{0, r})$ при каждом $\Delta_r(t)$. Ввиду громоздкости явный вид матрицы $\Delta_r(t)$, задающей возмущение матрицы $\Gamma_r(t)$ выписывать не будем.

По теореме Кронекера — Капелли необходимым и достаточным условием поточечной разрешимости системы (3.16) является равенство

$$\operatorname{rank}(\Gamma_r(t) + \Delta_r(t)) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Gamma_r(t) + \Delta_r(t)\\ (E_n\ O)\end{pmatrix} \quad \forall t \in I. \tag{3.17}$$

Согласно предложению 3.1 при сделанных условиях матрица $M_r(t) + \Delta_{M_r}(t)$ имеет на I непрерывную обратную матрицу. Кроме того, $M_r(t)+\Delta_{M_r}(t)$ по построению является подматрицей для $\Gamma_r(t)+\Delta_r(t)$. Поскольку порядок $M_r(t)+\Delta_{M_r}(t)$ совпадает с числом строк матрицы $\Gamma_r(t)+\Delta_r(t)$, то

$$\operatorname{rank}(\Gamma_r(t) + \Delta_r(t)) = n + d + \lambda = n(r+1) \quad \forall t \in I.$$

С другой стороны, умножив матрицу, стоящую в (3.17) справа от знака равенства, на

$$\begin{pmatrix}(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1} & O\\ O & E_n\end{pmatrix}$$

и $\operatorname{diag}\{E_{n+d}, Q_\Lambda\}$ слева и справа соответственно, получим

$$\left(\begin{array}{cc||cc} E_n & O & O & W_1(t)\\ O & E_d & O & W_2(t)\\ O & O & E_\lambda & W_3(t)\\ \hline E_n & O & O & O\end{array}\right)$$

(о матрице перестановок Q_Λ упоминалось в (2.10) и (3.6)). Поэтому

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Gamma_r(t) + \Delta_r(t)\\ (E_n\ O)\end{pmatrix} = n + d + \lambda + \operatorname{rank} W_1(t).$$

Очевидно, что (3.17) справедливо тогда и только тогда, когда

$$W_1(t) \equiv O, \quad t \in I. \tag{3.18}$$

По построению $W_1(t) = (E_n\ O)(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]}(t)$. Следовательно, (3.18) влечет (3.14).

Если искать коэффициенты оператора $\widetilde{\mathscr{R}}$ в виде (3.15), то в общем случае они не будут удовлетворять уравнению (3.16), поскольку может не выполниться тождество

$$(\widetilde{R}_0(t)\ \widetilde{R}_1(t)\ \dots\ \widetilde{R}_r(t))\Delta_\Lambda^{[2]}(t) \equiv O. \tag{3.19}$$

Тем не менее с учетом (3.15) условие (3.19) будет иметь место в силу предположения (3.14).

Непрерывность коэффициентов $\widetilde{R}_j(t)$ $(j = \overline{0,r})$ оператора $\widetilde{\mathscr{R}}$ следует из условия 1) предложения 3.1. □

Поскольку в общем случае проверить равенство (3.14) не представляется возможным, найдем достаточные условия существования оператора $\widetilde{\mathscr{R}}$.

Лемма 3.1. *Пусть имеют место условия* 1)–3) *предложения* 3.1 *и неравенство* (3.11). *Кроме того,*

$$(E_{n+d}\ O_\lambda)M_r^{-1}(t)\Delta_\Lambda^{[2]}(t) = O \quad \forall t \in I, \tag{3.20}$$

а матрица $M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t)$ *обладает структурой*

$$M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t) = \begin{pmatrix} * & O \\ ** & * \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

где размеры нулевого блока $(n+d)\times\lambda$. *Тогда*

$$(E_{n+d}\ O)(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]}(t) = O \quad \forall t \in I \tag{3.22}$$

для всех матриц $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$, *элементы которых подчиняются оценкам* (1.3), (3.1).

Доказательство. В сделанных предположениях справедливо предложение 3.1, согласно которому матрица $M_r(t) + \Delta_{M_r}(t)$ имеет на I непрерывную обратную, при этом

$$(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1} = M_r^{-1}(t)\left(E_n + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(\Delta_{M_r}(t)M_r^{-1}(t))^i\right). \tag{3.23}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(E_{n+d}\ O)(M_r + \Delta_{M_r})^{-1}\Delta_\Lambda^{[2]} &= (E_{n+d}\ O)M_r^{-1}(t)\Delta_\Lambda^{[2]}(t) \\ &+ (E_{n+d}\ O)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t))^i\right)M_r^{-1}(t)\Delta_\Lambda^{[2]}(t).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Условие (3.20) обеспечивает тождественное равенство нулю первого слагаемого в правой части равенства (3.24). Так что утверждение леммы будет иметь место, если

$$(E_{n+d}\ O)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t))^i\right)M_r^{-1}(t)\Delta_\Lambda^{[2]}(t) = O \quad \forall t \in I. \tag{3.25}$$

Рассмотрим матрицу

$$M_r^{-1}(t)\Delta_\Lambda^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

где $V_1(t)$ и $V_2(t)$ — некоторые матрицы класса $\mathbf{C}(I)$, состоящие из $n+d$ и λ строк соответственно. В силу (3.20) $V_1(t) \equiv O$ на I.

В свою очередь, представление (3.21) гарантирует, что матрицы $(M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t))^i$ будут иметь такую же структуру для любого $i = \overline{1,\infty}$. Принимая во внимание (3.26), легко видеть, что условие (3.25) будет выполнено. □

Замечание 3.2. Очевидно, что условия леммы 3.1 обеспечивают выполнение условия (3.14), и следовательно, гарантируют существование оператора (3.2), преобразующего (1.2) к виду (3.3). С другой стороны, условие (3.22) выглядит избыточным. Тем не менее, именно ограничение вида (3.22) потребуется в дальнейшем для того, чтобы обосновать левую обратимость оператора (3.2) и, в конечном итоге, доказать эквивалентность в смысле решений систем (1.2) и (3.3).

Теорема 3.2. *Предположим, что*

1) $A(t)$, $B(t)$, $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$,

2) *выполнены условия* 2) *и* 3) *леммы* 2.1,

3) *выполнено условие* 2) *предложения* 2.2,

4) *для всех матриц* $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$, *элементы которых удовлетворяют условиям* (1.3) *и* (3.1), *справедливы тождества* (3.20), (3.21).

Если, кроме того,

$$\nu_{r+1} < \frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}(t)\|}, \tag{3.27}$$

то при каждом выборе матриц $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$ *оператор* (3.2), (3.15), *преобразующий* (1.2) *к виду* (3.3), *существует и имеет левый обратный оператор*

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{L}_0(t) + \widetilde{L}_1(t)\frac{d}{dt}.$$

Величина ν_{r+1} *определяется по формуле, аналогичной* (3.10).

Доказательство. Сначала покажем, что предположение (3.27) влечет оценку (3.11). Согласно предложению 2.2 в матрице $\mathscr{D}_{r+1}(t)$ содержится обратимая подматрица $M_{r+1}(t)$ порядка $n(r+2)$, включающая в себя $\lambda+n$ столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}(t)$, причем $\operatorname{rank}\Lambda_{r+1}(t) \equiv \lambda+n$. Доказательство предложения 2.2 можно рассматривать как изложение способа построения матрицы $M_{r+1}^{-1}(t)$, при этом

$$M_{r+1}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} M_r^{-1}(t) & O \\ P_1(t) & P_2(t) \end{pmatrix},$$

где $P_1(t), P_2(t) \in \mathbf{C}(I)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров. Поэтому $\|M_{r+1}^{-1}(t)\| \geqslant \|M_r^{-1}(t)\|$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}(t)\|} \leqslant \frac{1}{\|M_r^{-1}(t)\|}.$$

С другой стороны, из формулы (3.10) следует $\nu_r \leqslant \nu_{r+1}$. Таким образом, неравенство (3.27) гарантирует оценку (3.11).

В соответствии с леммой 3.1 в сделанных предположениях имеет место условие (3.14). Поэтому на основании теоремы 3.1 можно заключить, что оператор (3.2), преобразующий (1.2) к виду (3.3), существует и его коэффициенты находятся по формуле (3.15).

Покажем, что это оператор обладает левым обратным оператором при любых матрицах $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, элементы которых подчиняются условиям (1.3), (3.1).

Согласно лемме 2.2 левый обратный для оператора $\widetilde{\mathscr{R}}$ существует, если имеет место равенство

$$\operatorname{rank}(\Lambda_{r+1}(t) + \Delta_{\Lambda_{r+1}}(t)) = \operatorname{rank}(\Lambda_r(t) + \Delta_{\Lambda_r}(t)) + n, \quad t \in I, \tag{3.28}$$

где матрицы $\Delta_{\Lambda_{r+1}}(t)$ и $\Delta_{\Lambda_r}(t)$ строятся по правилу (3.5).

Рассмотрим матрицу $\Lambda_r(t)+\Delta_{\Lambda_r}(t)$. Покажем, что $\operatorname{rank}(\Lambda_r(t)+\Delta_{\Lambda_r}(t)) = \lambda$ для любых $t \in I$. Умножив эту матрицу слева и справа соответственно на матрицы $(M_r(t)+\Delta_{M_r}(t))^{-1}$ и Q_rQ_Λ, с учетом представлений (2.10) и (3.6) получим

$$(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}(\Lambda_r^{[1]}(t) + \Delta_\Lambda^{[1]}(t)\ \Lambda_r^{[2]}(t) + \Delta_\Lambda^{[2]}(t)) = \begin{pmatrix} O & \widehat{V}_1(t) \\ E_\lambda & \widehat{V}_2(t) \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

где

$$\operatorname{colon}(\widehat{V}_1(t), \widehat{V}_2(t)) = (M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}(\Lambda_r^{[2]}(t) + \Delta_\Lambda^{[2]}(t)),$$

матрицы $\widehat{V}_1(t)$ и $\widehat{V}_2(t)$ состоят из $n+d$ и λ строк соответственно. Обозначим

$$(M_r(t)+\Delta_{M_r}(t))^{-1}\Delta_{\Lambda}^{[2]}(t)=\mathrm{colon}\,(\widehat{W}_1(t),\widehat{W}_2(t)), \tag{3.30}$$

где $\widehat{W}_i(t)$ — некоторые матрицы, имеющие соответственно те же размеры, что и матрицы $\widehat{V}_i(t)$. В силу (3.22)

$$\widehat{W}_1(t)\equiv O,\quad t\in I. \tag{3.31}$$

Принимая во внимание представление (3.23), рассмотрим произведение

$$(M_r(t)+\Delta_{M_r}(t))^{-1}\Lambda_r^{[2]}(t)=M_r(t)\Lambda_r^{[2]}(t)+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t))^iM_r^{-1}(t)\Lambda_r^{[2]}(t). \tag{3.32}$$

По построению с учетом условия 2) леммы 2.1

$$M_r^{-1}(t)\Lambda_r^{[2]}(t)=\begin{pmatrix}O\\ **\end{pmatrix},$$

где нулевой блок состоит из $n+d$ строк. Предположение (3.21) гарантирует, что

$$(M_r^{-1}(t)\Delta_{M_r}(t))^i=\begin{pmatrix}* & O\\ ** & *\end{pmatrix}\quad \forall i=\overline{1,\infty}$$

с нулевым блоком размера $(n+d)\times\lambda$. Следовательно, первые $n+d$ строк матрицы (3.32) будут нулевыми. Таким образом, с учетом (3.30) и (3.31) в тождестве (3.29) $\widehat{V}_1(t)\equiv O$ и $\mathrm{rank}\,(\Lambda_r(t)+\Delta_{\Lambda_r}(t))=\lambda$ для любых $t\in I$.

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda_{r+1}(t)+\Delta_{\Lambda_{r+1}}(t)=\left(\begin{array}{c|c}\Lambda_r(t)+\Delta_{\Lambda_r}(t) & O\\ \hline \Phi_{r+1}(t)+\Delta_{\Phi}(t) & A(t)+\Delta_A(t)\end{array}\right), \tag{3.33}$$

где $\Phi_{r+1}(t)$ находится по формуле (2.12),

$$\Delta_{\Phi}(t)=(C_{r+1}^1\Delta_A^{(r)}(t)+C_{r+1}^2\Delta_B^{(r-1)}(t)\ \ldots\ C_{r+1}^r\Delta_A'(t)+C_{r+1}^{r-1}\Delta_B(t)).$$

Умножив (3.33) слева и справа соответственно на

$$\begin{pmatrix}(M_r(t)+\Delta_{M_r}(t))^{-1} & O\\ O & E_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}Q_rQ_{\Lambda} & O\\ O & E_n\end{pmatrix},$$

получим

$$\left(\begin{array}{cc|c}O & O & O\\ E_{\lambda} & \widehat{V}_2(t) & O\\ \hline \widehat{F}_1(t) & \widehat{F}_2(t) & A(t)+\Delta_A(t)\end{array}\right),$$

где $\widehat{F}_i(t)$ — некоторые матрицы. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{rank}\,(\Lambda_{r+1}(t)+\Delta_{\Lambda_{r+1}}(t))=\lambda+\mathrm{rank}\,(\widehat{F}_2(t)-\widehat{F}_1(t)\widehat{V}_2(t)\ \ A(t)+\Delta_A(t)).$$

В соответствии с предложением 2.2 матрица $M_{r+1}(t)$ включает в себя $\lambda+n$ столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}(t)$. В свою очередь, в сделанных предположениях матрица $M_{r+1}(t)+\Delta_{M_{r+1}}(t)$ будет обратима при всех $t\in I$. Поэтому должно выполниться равенство

$$\mathrm{rank}\,(\widehat{F}_2(t)-\widehat{F}_1(t)\widehat{V}_2(t)\ \ A(t)+\Delta_A(t))=n.$$

Следовательно, $\mathrm{rank}\,(\Lambda_{r+1}(t)+\Delta_{\Lambda_{r+1}}(t))\equiv\lambda+n$.

Из всего вышесказанного вытекает справедливость условия (3.28), которое, в свою очередь, обеспечивает левостороннюю обратимость оператора $\widetilde{R}$ при любом фиксированном выборе возмущений $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (3.1). □

Определение 3.2. *Решением* системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.1) будем называть n-мерную вектор-функцию $x_*(t)\in\mathbf{C}^1(I)$, обращающую систему (1.1) в тождество при подстановке.

При каждом выборе возмущений $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (3.1), решение системы (1.2) будем понимать в смысле определения 3.2.

Следстсвие 3.1. *В условиях теоремы* 3.2 *при каждом фиксированном выборе возмущений* $\Delta_A(t)$ *и* $\Delta_B(t)$, *элементы которых подчиняются оценкам* (1.3), (3.1), *системы* (1.2) *и* (3.3) *будут иметь одни и те же решения.*

Справедливость следствия непосредственно вытекает из существования операторов $\widetilde{R}$ и $\widetilde{L}$. Непрерывная дифференцируемость решений обеспечивается условием 1) теоремы 3.2.

4. Робастная устойчивость системы дифференциально-алгебраических уравнений

Приведем известные результаты по робастной устойчивости систем, разрешенных относительно производной. Эти результаты в дальнейшем будут использованы для получения условий робастной устойчивости системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.2).

Рассмотрим интервальное семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) + U(t)x(t) = 0, \quad t \in I, \tag{4.1}$$

где $U(t) = (u_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ — произвольная матрица с измеримыми элементами, которая на всяком конечном интервале полуоси $[0, +\infty)$ почти всюду удовлетворяет неравенствам

$$\underline{U}(t) \leqslant U(t) \leqslant \overline{U}(t), \tag{4.2}$$

с заданными матрицами $\underline{U}(t) = (\underline{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\overline{U}(t) = (\overline{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, элементы которых являются измеримыми функциями.

В (4.2) и далее матричные неравенства понимаются поэлементно.

Определение 4.1. Систему (4.1) будем называть *робастно устойчивой* относительно ограничений (4.2), если ее тривиальное решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе матрицы $U(t)$, удовлетворяющей неравенствам (4.2).

Построим матрицу $\widehat{U}(t) = (\widehat{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, где

$$\widehat{u}_{i,i}(t) = -\underline{u}_{i,i}(t), \quad i = \overline{1,n},$$

$$\widehat{u}_{i,j}(t) = \max\{|\underline{u}_{i,j}(t)|,\ |\overline{u}_{i,j}(t)|\}, \quad i,j = \overline{1,n}, \ \ i \neq j.$$

Теорема 4.1 (см. [**12**]). *Интервальная система* (4.1) *робастно устойчива относительно ограничений* (4.2), *если система*

$$x'(t) + \widehat{U}(t)x(t) = 0, \quad t \in I, \tag{4.3}$$

асимптотически устойчива по Ляпунову.

Теорема 4.2 (см. [**12**]). *Предположим, что в* (4.2) *элементы матриц* $\underline{U}(t)$ *и* $\overline{U}(t)$ *— периодические функции с периодом* $\omega > 0$. *Кроме того, пусть выполнены неравенства*

$$|\overline{u}_{i,j}(t)| \leqslant -\underline{u}_{i,j}(t) \quad \forall i,j = \overline{1,n} \quad (i \neq j) \ \ \forall t \in I.$$

Тогда для робастной устойчивости системы (4.1) *относительно интервальных ограничений* (4.2) *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\rho(\Omega(\omega)) < 1, \tag{4.4}$$

где $\rho(\Omega(\omega))$ *—спектральный радиус матрицы монодромии* $\Omega(\omega)$ *системы* (4.3).

Перейдем к анализу устойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений.

Предположим, что все условия теоремы 3.2 выполнены. Рассмотрим систему (3.3), полученную из (1.2) с помощью оператора (3.2). По построению в (3.3)

$$\begin{aligned} &Q^{-1}x(t) = \mathrm{colon}\,(x_1(t), x_2(t)), \\ &U_1(t) = (E_d\ O_{n(r+1)-d})(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}(\mathscr{B}_{1,r}(t) + \Delta_{B_1,r}(t)), \\ &U_2(t) = (O_d\ E_{n-d}\ O_{nr})(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}(\mathscr{B}_{1,r}(t) + \Delta_{B_1,r}(t)), \end{aligned} \tag{4.5}$$

$x_1(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$ и $x_2(t) \in \mathbf{R}^d$ для любых $t \in I$, матрица $\mathscr{B}_{1,r}(t)$ находится по формулам (2.4), (2.3),

$$\Delta_{B_1,r}(t) = \operatorname{colon}(\Delta_{B_1}(t), \Delta'_{B_1}(t), \dots, \Delta^{(r)}_{B_1}(t)),$$

$\Delta_{B_1}(t)$ определена в (3.4).

Рассмотрим дифференциальную подсистему интервального семейства (3.3)

$$x'_1(t) + U_2(t)x_1(t) = 0. \tag{4.6}$$

Предположим, что удалось найти явный вид интервальной матрицы (4.5):

$$\underline{U}_2(t) \leqslant U_2(t) \leqslant \overline{U}_2(t), \quad t \in I, \tag{4.7}$$

где элементы матриц

$$\underline{U}_2(t) = (\underline{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n-d}}, \quad \overline{U}_2(t) = (\overline{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n-d}} \tag{4.8}$$

являются измеримыми функциями.

Заметим, что в сделанных предположениях $U_2(t) \in \mathbf{C}^2(I)$ при каждом фиксированном выборе матриц $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$.

Построим матрицу $\widehat{U}_2(t) = (\widehat{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n-d}}$, где

$$\widehat{u}_{i,i}(t) = -\underline{u}_{i,i}(t), \quad i = \overline{1, n-d}, \tag{4.9}$$

$$\widehat{u}_{i,j}(t) = \max\{|\underline{u}_{i,j}(t)|,\ |\overline{u}_{i,j}(t)|\}, \quad i,j = \overline{1, n-d},\ i \neq j. \tag{4.10}$$

В соответствии с теоремой 4.1 система (4.6) робастно устойчива относительно ограничений (4.7), если система

$$x'_1(t) + \widehat{U}_2(t)x_1(t) = 0 \tag{4.11}$$

асимптотически устойчива по Ляпунову.

По замечанию 3.1 в сделанных допущениях матрица $M_r^{-1}(t)$ будет ограничена на интервале I по норме (3.8). В свою очередь, неравенство (3.13) влечет за собой оценку

$$\|(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}\| < \frac{\|M_r^{-1}(t)\|}{1 - \|\Delta_{M_r}(t)\|\|M_r^{-1}(t)\|},$$

из которой следует ограниченность матрицы $(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}$. Последнее в совокупности с предположением об ограниченности при любом $k = \overline{0,r}$ матриц $B_1^{(k)}(t)$ и $H_1^{[k]}(t)$ (см. (2.3) и (3.9)) гарантирует ограниченность матрицы $U_1(t)$:

$$\|U_1(t)\| \leqslant m_1 < \infty. \tag{4.12}$$

Поскольку $x_2(t) = -U_1(t)x_1(t)$ в (3.3), в силу (4.12) из свойства $\|x_1(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ следует $\|x_2(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Здесь $\|\xi(t)\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i(t)|$ для любой вектор-функции $\xi(t) = \operatorname{colon}(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$. Поэтому робастная устойчивость системы (4.6) относительно ограничений (4.7) влечет за собой робастную устойчивость системы (3.3).

Согласно следствию 3.1 при каждом выборе матриц $\Delta_A(t)$ и $\Delta_B(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (3.1), системы (1.2) и (3.3) имеют одно и то же множество решений в смысле определения 3.2 и, следовательно, обладают одними и теми же свойствами устойчивости.

На основании всего вышеизложенного можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.3. *Предположим, что*

1) *выполнены все условия теоремы* 3.2,

2) *матрицы* $B_1^{(k)}(t)$ *и* $H_1^{[k]}(t)$ *ограничены на интервале* I *по норме* (3.8) *при любом* $k = \overline{0,r}$,

3) *элементы матриц* (4.8) *являются измеримыми функциями,*

4) *система* (4.11) *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Тогда система (1.2) *робастно устойчива относительно ограничений* (1.3), (3.1).

Опираясь на теорему 4.2, можно получить необходимое и достаточное условие робастной устойчивости системы (1.2).

Теорема 4.4. *Предположим, что*

1) *выполнены всеп условия теоремы* 3.2,

2) *элементы матриц* $A(t)$ *и* $B(t)$ — *периодические на* I *функции с периодом* $\omega > 0$,

3) *элементы матриц* $G^{[k]}(t)$ *и* $H^{[k]}(t)$ $(k = \overline{0,r})$ — *периодические на* I *функции с периодом* $\omega > 0$,

4) *коэффициенты матриц* $\underline{U}_2(t)$ *и* $\overline{U}_2(t)$ *из* (4.7) *являются измеримыми функциями, и для них выполняются неравенства*

$$|\overline{u}_{i,j}(t)| \leqslant -\underline{u}_{i,j}(t) \quad \forall i,j = \overline{1,n-d} \quad (i \neq j) \quad \forall t \in I. \tag{4.13}$$

Тогда для робастной устойчивости системы (1.2) *относительно ограничений* (1.3), (3.1) *необходимо и достаточно выполнения условия* (4.4), *где* $\rho(\Omega(\omega))$ —*спектральный радиус матрицы монодромии* $\Omega(\omega)$ *системы* (4.11).

Доказательство. Пользуясь определением производной, нетрудно показать, что условие 2 обеспечивает ω-периодичность матрицы $M_r(t)$. В этом случае с учетом предположения 3 по построению в (4.6) матрица $U_2(t)$ будет удовлетворять ограничениям (4.7) с ω-периодическими матрицами $\underline{U}_2(t)$ и $\overline{U}_2(t)$.

Принимая во внимание условие 4), на основании теоремы 4.2 можно заключить, что для робастной устойчивости системы (4.6) относительно ограничений (4.7) необходимо и достаточно выполнения условия (4.4).

В предположениях 2 и 3 по построению матрица $U_1(t)$ в (3.3) будет непрерывно дифференцируема и ограничена по норме на I. Рассуждая так же, как при обосновании теоремы 4.3, можно показать, что тогда системы (4.6) и (3.3) будут робастно устойчивы одновременно, и кроме того, в условиях теоремы 3.2 одновременно робастно устойчивы будут системы (1.2) и (3.3). Таким образом, выполнение неравенства (4.4) является необходимым и достаточным для робастной устойчивости системы (1.2). $\square$

Ясно, что в общем случае построение для матрицы $U_2(t)$ оценок вида (4.7) является весьма нетривиальной задачей, поскольку связано с обращением интервальной матрицы. Но при некоторых дополнительных условиях найти элементы матриц $\underline{U}_2(t)$ и $\overline{U}_2(t)$ можно. Получим еще одно условие робастной устойчивости, опирающееся на следующий результат.

Лемма 4.1 (см. [**13**]). *Пусть* S — *вещественная интервальная* $(n \times n)$*-матрица и*

$$\underline{S} \leqslant S \leqslant \overline{S}. \tag{4.14}$$

Если $\underline{S}$ *и* $\overline{S}$ *обратимы и* $\underline{S}^{-1} \geqslant O$, $\overline{S}^{-1} \geqslant O$, *то каждая из матриц* S, *удовлетворяющих неравенствам* (4.14), *будет обратима и*

$$O \leqslant \overline{S}^{-1} \leqslant S^{-1} \leqslant \underline{S}^{-1}.$$

Пусть имеют место все предположения теоремы 3.2. Рассмотрим матрицу $\Delta_{M_r}(t)$, определенную в (3.7). Если известно, какие именно столбцы матрицы $\mathscr{D}_r(t)$ входят в разрешающий минор, то воспользовавшись оценками (1.3) и (3.1), нетрудно получить для нее “крайние” матрицы:

$$-\overline{\Delta}_{M_r}(t) \leqslant \Delta_{M_r}(t) \leqslant \overline{\Delta}_{M_r}(t), \quad t \in I.$$

Явный вид $\overline{\Delta}_{M_r}(t)$ выписывать не будем.

Разобьем $n \times n(r+1)$-матрицу $(O_d\ E_{n-d}\ O_{nr})(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1}$ на блоки размера $n \times n$

$$(O_d\ E_{n-d}\ O_{nr})(M_r(t) + \Delta_{M_r}(t))^{-1} = (,\mathscr{M}_0(t)\ \mathscr{M}_1(t)\ \ldots\ \mathscr{M}_r(t)), \tag{4.15}$$

где $\mathscr{M}_k(t) = (\mu_{i,l}^{[k]}(t))_{i,l=\overline{1,n}}$. Пусть

$$B_1(t) = (b_{l,j}(t))_{l=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n-d}},$$

$$\Delta_{B_1}(t) = (\delta_{l,j}(t))_{l=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n-d}},$$

$$H_1^{[k]}(t) = (h_{l,j}^{[k]}(t))_{l=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n-d}},$$

где матрицы $B_1(t)$, $\Delta_{B_1}(t)$ и $H_1^{[k]}(t)$ определены соответственно в (2.3), (3.4) и (3.9). Тогда согласно (4.5) элементы матрицы $U_2(t)$ вычисляются по формуле

$$u_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{n} \mu_{i,l}^{[k]}(t)(b_{l,j}^{(k)}(t) + \delta_{l,j}^{(k)}(t)), \quad i,j = \overline{1, n-d}.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \overline{d}_{l,j}^{[k]}(t) &= b_{l,j}^{(k)}(t) + h_{l,j}^{[k]}(t), \\ \underline{d}_{l,j}^{[k]}(t) &= b_{l,j}^{(k)}(t) - h_{l,j}^{[k]}(t). \end{aligned} \tag{4.16}$$

С учетом оценок (1.3), (3.1)

$$\underline{d}_{l,j}^{[k]}(t) \leqslant b_{l,j}^{(k)}(t) + \delta_{l,j}^{(k)}(t) \leqslant \overline{d}_{l,j}^{[k]}(t), \quad t \in I, \ \ l = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n-d}, \ k = \overline{0,r}.$$

Для следующих матриц построим разбиения на блоки аналогичные (4.15):

$$\begin{aligned} (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr})(M_r(t) + \overline{\Delta}_{M_r}(t))^{-1} &= (\overline{\mathscr{M}}_0(t) \ \overline{\mathscr{M}}_1(t) \ \ldots \ \overline{\mathscr{M}}_r(t)), \\ (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr})(M_r(t) - \overline{\Delta}_{M_r}(t))^{-1} &= (\underline{\mathscr{M}}_0(t) \ \underline{\mathscr{M}}_1(t) \ \ldots \ \underline{\mathscr{M}}_r(t)), \end{aligned}$$

где $\underline{\mathscr{M}}_k(t) = (\underline{m}_{i,l}^{[k]}(t))_{i,l=\overline{1,n}}$ и $\overline{\mathscr{M}}_k(t) = (\overline{m}_{i,l}^{[k]}(t))_{i,l=\overline{1,n}}$. Допустим, что

$$(M_r(t) + \overline{\Delta}_{M_r}(t))^{-1} \geqslant O, \quad (M_r(t) - \overline{\Delta}_{M_r}(t))^{-1} \geqslant O \quad \forall t \in I. \tag{4.17}$$

Тогда по лемме 4.1

$$0 \leqslant \overline{m}_{i,l}^{[k]}(t) \leqslant \mu_{i,l}^{[k]}(t) \leqslant \underline{m}_{i,l}^{[k]}(t) \quad \forall t \in I.$$

Откуда по правилам интервального умножения **[14]**

$$\underline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t) \leqslant \mu_{i,l}^{[k]}(t)(b_{l,j}^{(k)}(t) + \delta_{l,j}^{(k)}(t)) \leqslant \overline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t),$$

где

$$\underline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t) = \begin{cases} \overline{m}_{i,l}^{[k]}(t)\underline{d}_{i,l}^{[k]}(t), & t \in I : \underline{d}_{l,j}^{[k]}(t) < 0, \\ \underline{m}_{i,l}^{[k]}(t)\underline{d}_{i,l}^{[k]}(t), & t \in I : \underline{d}_{l,j}^{[k]}(t) \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\overline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t) = \begin{cases} \underline{m}_{i,l}^{[k]}(t)\overline{d}_{i,l}^{[k]}(t), & t \in I : \overline{d}_{l,j}^{[k]}(t) < 0, \\ \overline{m}_{i,l}^{[k]}(t)\overline{d}_{i,l}^{[k]}(t), & t \in I : \overline{d}_{l,j}^{[k]}(t) \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Представления (4.18), (4.19) позволяют получить интервалы, в пределах которых изменяются элементы матрицы $U_2(t) = (u_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n-d}}$:

$$\underline{u}_{i,j}(t) \leqslant u_{i,j}(t) \leqslant \overline{u}_{i,j}(t), \quad t \in I,$$

$$\underline{u}_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{l=1}^{n} \underline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t), \quad \overline{u}_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{l=1}^{n} \overline{v}_{i,l,j}^{[k]}(t). \tag{4.20}$$

Построим матрицу $\widehat{U}_2(t) = (\widehat{u}_{i,j}(t))_{i,j=\overline{1,n-d}}$ по правилам (4.9), (4.10).

Если функции (4.20) являются измеримыми, то по теореме 4.1 из асимптотической устойчивости системы (4.11) следует робастная устойчивость системы (4.6). Если при этом выполняется условие 2) теоремы 4.3, то рассуждая аналогично доказательству теоремы 4.3, можно показать, что в этом случае система (1.2) будет робастно устойчива.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 4.5. *Предположим, что*

1) *имеют место неравенства* (4.17)*,*

2) *функции* $\underline{u}_{i,j}(t)$ *и* $\overline{u}_{i,j}(t)$ *в* (4.20) *измеримы для всех* $i, j = \overline{1, n-d}$*,*

3) *выполнены условия* 1)*,* 2) *и* 4) *теоремы* 4.3.

Тогда система (1.2) *робастно устойчива относительно ограничений* (1.3), (3.1).

Для дифференциально-алгебраических уравнений с периодическими коэффициентами и ограничениями можно получить необходимые и достаточные условия робастной устойчивости.

Теорема 4.6. *Предположим, что*

1) *имеют место неравенства* (4.17),

2) *функции* $\underline{u}_{i,j}(t)$ *и* $\overline{u}_{i,j}(t)$ *в* (4.20) *измеримы для всех* $i,j = \overline{1,n-d}$ *и удовлетворяют неравенствам* (4.13),

2) *выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 4.4.

Тогда для робастной устойчивости системы (1.2) *относительно ограничений* (1.3), (3.1) *необходимо и достаточно выполнения условия* (4.4), *где* $\rho(\Omega(\omega))$ — *спектральный радиус матрицы монодромии* $\Omega(\omega)$ *системы* (4.11).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4.

Замечание 4.1. В теоремах 4.5 и 4.6 условие об измеримости функций (4.20) можно заменить требованием непрерывности. Из представлений (4.18)–(4.20) следует, что функции $\underline{u}_{i,j}(t)$ и $\overline{u}_{i,j}(t)$ буду непрерывны на I, в частности, если функции (4.16) сохраняют знак при всех $t \in I$.

Литература

1. R. Byers, N. K. Nichols, "On the stability radius of a generalized state-space system", *Linear Algebra Appl.* No. 188–189. 113–134 (1993).
2. N. H. Du, "Stability radii of differential-algebraic equations with structured perturbations", *Syst. Control Lett.* **57**, No. 7, 546–553 (2008).
3. N. H. Du, D. D. Thuan, N. C. Liem, "Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales", *Syst. Control Lett.* **60**, No. 8, 596–603 (2011).
4. А. А. Щеглова, А. Д. Кононов, "Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса", *Автомат. телемех.* No. 5, 36–55 (2017).
5. C.-H. Fang, F.-R. Chang, "Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations", *Syst. Control Lett.* **21**, No. 2, 109–114 (1993).
6. L. Lee, C.-H. Fang, J.-G. Hsieh, "Exact uninderectional perturbation bounds for robustness of uncertain generalized state-space systems: continuous-time cases", *Automatica* **33**, No. 10, 1923–1927 (1997).
7. L Qiu, E. J. Davison, "The stability robustness of generalized eigenvalues", *IEEE Trans. Autom. Control* **37**, No. 6, 886–891 (1992).
8. N. H. Du, V. H. Linh, "Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamics perturbations", *J. Differ. Equations* **230**, No. 2, 579–599 (2006).
9. C. J. Chyan, N. H. Du, V. H. Linh, "On data-dependence of exponential stability and the stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems", *J. Differ. Equations* **245**, No. 8, 2078–2102 (2008).
10. Ch. Lin, J. Lam, J. Wang, G.-H. Yang, "Analysis on robust stability for interval descriptor systems", *Syst. Control Lett.* **42**, No. 4, 267–278 (2001).
11. А. А. Щеглова, "Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами", *Изв. ВУЗов, Мат.* No. 8, 59–70 (2010).
12. М. В. Морозов, "Условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с интервальными ограничениями", *Пробл. управл.* No. 3, 23–26 (2009).
13. J. Kuttler, "A fourth order finite-difference approximations for the fixed membrane eigenproblem", *Math. Comput.* **25**, 237–256 (1971).
14. A. Neumaier, *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge etc. (1990).

Статья поступила в редакцию 13 ноября 2018 г.