УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

На правах рукописи

Ломов Андрей Александрович

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ И ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Оглавление

Список обозначений

$\doteq$	—	равенство по определению или новое обозначение
$^{\top}$	—	символ транспонирования
$\overline{n,m}$	—	целочисленный интервал от n до m
$\mathbb{R}^n$	—	n-мерное вещественное евклидовое пространство
$\mathbb{R}^{n\times m}$	—	пространство вещественных $n \times m$-матриц
$\mathbb{R}[s]$	—	множество многочленов от s с действительными коэффициентами
$\mathbb{R}^{n\times m}[s]$	—	множество матричных многочленов от s с коэффициентами из $\mathbb{R}^{n\times m}$
I; I_r	—	единичная матрица; единичная матрица размера $r \times r$
$(A, B) \doteq \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$	—	матрица, составленная горизонтально из клеток A, B с одинаковым числом строк
$(A; B) \doteq \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$	—	матрица, составленная вертикально из клеток A, B с одинаковым числом столбцов
$\lVert A_{ij} \rVert_j^i$	—	матрица, составленная из элементов (клеток) A_{ij}
$\lVert B_i \rVert^i$	—	вектор-столбец, составленный из элементов (клеток) B_i
$\lVert C_j \rVert_j$	—	вектор-строка, составленная из элементов (клеток) C_j
$A \otimes B$	—	кронекерово произведение матриц
$\operatorname{rank} A$	—	ранг числовой матрицы A
$\operatorname{rank} A(s)$	—	ранг многочленной матрицы $A(s)$ (число тождественно по s ненулевых строк или столбцов канонической формы)
$\mathcal{N}(A)$	—	правое нуль-пространство числовой матрицы A
$\mathcal{R}(A)$	—	линейная оболочка столбцов матрицы A
$\mathcal{L}(A)$	—	линейная оболочка строк матрицы A
$\overline{A}$	—	матрица, столбцы которой дополняют систему столбцов A до полной системы, т. е. $\mathcal{N}\left(\overline{A}, A\right) = 0$

$A_\perp$	—	матрица, столбцы которой образуют базис подпространства $\mathcal{N}(A)$, т. е. $\mathcal{R}(A_\perp) = \mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{N}(A_\perp) = 0$
$\operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_m\}$	—	линейная оболочка множества векторов $\{a_1, \ldots, a_m\}$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$	—	ядро, образ линейного отображения $\mathcal{A}$
$\mathcal{M}^\circ$	—	линейное подпространство линейных функционалов (числовых строк), аннулирующих множество векторов $\mathcal{M}$ (обозначение 6.1.2)
$\dot{+}$	—	прямая сумма линейных подпространств
$\operatorname{Sm} A(s)$	—	двусторонняя каноническая форма многочленной матрицы $A(s)$ (нормальная форма Смита)
$\mathrm{C_L} A(s)$	—	левосторонняя каноническая форма многочленной матрицы $A(s)$
$\underset{\mathrm{LR}}{\sim}$	—	равносильность на множестве левых и правых элементарных преобразований (для многочленных и числовых матриц)
$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{1\times n}[s]$, $\mathcal{P}^{1\times n}$	—	модуль многочленных строк из $\mathbb{R}^{1\times n}[s]$ (линейное подпространство многочленных строк относительно умножения на скалярные многочлены)
$\operatorname{base}\mathcal{P}$	—	базис модуля $\mathcal{P}$
$\mathcal{P}(A(s))$	—	линейная оболочка строк многочленной матрицы $A(s)$ над кольцом многочленов (модуль)
$\deg a(s)$, $a(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}[s]$	—	степень многочленной строки $a(s) \doteq (a_1(s), \ldots, a_n(s))$: $\deg a(s) \doteq \max_i \deg a_i(s)$
$\deg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{1\times n}[s]$	—	наибольшее значение степени строки на заданном множестве $\mathcal{A}$ многочленных строк
$[\mathcal{P}]_N \subset \mathcal{P}$	—	множество многочленных строк $a(s) \in \mathcal{P}$ таких, что $\deg a(s) < N$
$A \vee B$	—	дизъюнктивная система, построенная по матрицам A и B с одинаковыми числами столбцов (определение 6.1.1, обозначение 6.1.1)
$\mathbf{M}\,\xi$	—	математическое ожидание случайной величины ξ
$\mathbf{M}_1^L\,\xi_i \doteq L^{-1}\sum_{i=1}^L \xi_i$	—	среднее значение
$\operatorname{supp}\mathbf{P}$	—	носитель распределения $\mathbf{P}$, т. е. объединение всех множеств ненулевой меры
$\mathbf{N}(0, D)$	—	множество случайных величин (векторов) с нормальным (многомерным) распределением с нулевым средним и (матричной) дисперсией D

$\mathbf{M}_2(0, D)$	—	множество случайных величин, имеющих распределение с нулевым средним и конечной матрицей вторых моментов D
$\mathbf{M}_{2,\sigma}(0, D)$	—	множество случайных величин, имеющих распределение с нулевым средним, конечной матрицей вторых моментов D и ограниченным носителем диаметра не больше σ
$\mathbf{M}_4(0, \sigma^2, 0, \omega^4)$	—	множество случайных величин из $\mathbb{R}$, имеющих распределение с нулевыми 1-м и 3-м моментами и конечными вторым σ^2 и четвертым ω^4 моментами
$\mathbf{U}(0, B_r)$, $\mathbf{U}^n(0, B_r)$	—	множество случайных величин из $\mathbb{R}^n$, имеющих равномерное распределение на шаре $B_r \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле
$\square$	—	конец доказательства

Введение

Самый деятельный ум оказывается недостаточным
для того, чтобы изъяснить, как следует,
самомалейшую часть мира
(Свт. Василий Великий (IV в.)*))

Настоящее исследование посвящено задаче идентификации параметров стационарных линейных динамических систем, описываемых разностными уравнениями на конечных интервалах наблюдения. Это системы с траекториями (процессами)

$$z \in \underbrace{\mathbb{R}^{r+m} \times \ldots \times \mathbb{R}^{r+m}}_{N} \doteq \mathbb{R}^{(r+m)N} \doteq \mathbb{R}^{l}$$

конечной длины $N \geqslant p+1$, $p \geqslant 0$, где $\mathbb{R}^r$ ($r \geqslant 1$) и $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 0$) — пространства соответственно "выходных" и "входных" (независимых) переменных, описывающих поведение системы. Решением задачи идентификации является алгоритм, который исходя из предъявленного множества наблюдений процессов с возмущениями позволяет вычислить приближенное значение неизвестных параметров уравнения системы.

Задача де Прони. Появление математических методов, составляющих сердцевину того, что называют теорией идентификации, принято отсчитывать с 1795 г. с работ французского графа Гаспара Рише де Прони [125, 140, 230, 242]. Он исследовал задачу восстановления параметров α, ω, A, ϕ синусоид и экспонент

$$y = \begin{pmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix}, \qquad y[k] = A\exp(\alpha k)\sin(\omega k + \phi), \tag{0.0.1}$$

по измерениям y. Рассматривая эту задачу, изложим основные идеи и понятия, которые будут использоваться на протяжении всей диссертации.

Немного упрощая, можно сказать, что метод решения, предложенный Г. де Прони, состоял в следующем [164, 231]. Для вычисления α, ω находятся коэффициенты γ_0,

*) Беседа 1-я на Шестоднев.

γ_1 разностного уравнения

$$y[k+2] = \gamma_1 y[k+1] + \gamma_0 y[k] \tag{0.0.2}$$

как решение системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} y[k+1] & y[k] \\ y[k+2] & y[k+1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[k+2] \\ y[k+3] \end{pmatrix}. \tag{0.0.3}$$

Затем по (γ_0, γ_1) вычисляются коэффициенты (g_0, g_1) уравнения

$$\left(\Delta^2 + g_1\Delta + g_0\right) y[k] = 0,$$

где $\Delta \doteq \frac{1}{h}(s-1)$ — разностный аналог оператора дифференцирования, $sy[k] \doteq y[k+1]$ — оператор сдвига. Параметры (α, ω) вычисляются из равенства многочленов

$$\lambda^2 + g_1\lambda + g_0 = (\lambda - \alpha - \mathrm{i}\omega)(\lambda - \alpha + \mathrm{i}\omega) = (\lambda - \alpha)^2 + \omega^2.$$

По начальным условиям $(y[1], y[2])$ находятся коэффициенты A_1, A_2 линейного разложения вектора y по базовым функциям:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha}\sin(\omega) & e^{\alpha}\cos(\omega) \\ e^{2\alpha}\sin(2\omega) & e^{2\alpha}\cos(2\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[1] \\ y[2] \end{pmatrix}, \tag{0.0.4}$$

$$y[k] = A_1 e^{\alpha k}\sin(\omega k) + A_1 e^{\alpha k}\cos(\omega k), \qquad k \geqslant 3,$$

и находятся параметры (A, ϕ) искомого решения (0.0.1).

Задачам типа де Прони уделяли внимание многие известные математики. «В 1941 г. ... Л. Шварц написал кандидатскую диссертацию по приближению непрерывной функции на оси суммами экспонент» [61, с.19]. Можно назвать имена Дж. фон Неймана [215], Р. Беллмана [138], К. Ланцоша [184, IV.23], А. Хаусхолдера [166].

Идея Г. де Прони — перейти от уравнений (0.0.1) к уравнениям (0.0.2) в сопряженном пространстве коэффициентов — была революционной, поскольку нелинейная задача относительно λ, ω сводилась к линейной относительно коэффициентов γ_i, g_i. Но наличие возможных ошибок в измерениях $y[k]$ Г. де Прони не учитывал. Здесь понадобился гений К. Гаусса.

Метод наименьших квадратов Гаусса (линейный МНК). В 1795 году К. Гаусс предложил метод наименьших квадратов (МНК) [24]. Принцип Гаусса можно сформулировать так: для учета ошибок в измерениях нужно заменить измерения гипотетическими модельными значениями и проводить минимизацию квадратичной целевой функции рассогласования модельных значений с измерениями. Это принцип получил в прикладных задачах широчайшее распространение, но понадобилось почти двести лет, чтобы были созданы нелинейные варианты МНК, которые позволяли получить вычислительное решение задач типа де Прони с учетом ошибок в измерениях. Это работы М. Левина (1964) [188], М. Аоки (1970, 1971) [134,135], А. О. Егоршина (1971, 1988) [40,42], М. Осборна (1970, 1991) [218,220], Б. Де Мура (1993) [214], Б. Роорды, Х. Хейджа (1995) [235,236] и др. Оказалось, что задачи, подобные задачам Г. де Прони, вместе с их естественными обобщениями возникали всюду, где нужно было построить математическую модель процесса в виде дифференциального или разностного уравнения — начиная от прикладной теории управления техническими системами [17,114,125,146] и анализом экономических данных [117] и заканчивая моделированием тончайших генных систем*) регулирования наследственности в живых организмах (Е. Крампин (2006) [148]).

Как нередко бывает на переднем крае приложений математики, эвристические вычислительные решения опережали развитие теории. В диссертации рассматриваются вопросы теоретического обоснования нелинейных МНК в задачах моделирования наблюдаемых процессов разностными (дифференциальными) уравнениями, т. е. в задачах типа де Прони. Термин "вариационные оценки" для параметров уравнений относится к широкому классу нелинейных методов наименьших квадратов.

Чтобы подойти к формулированию целей и задач диссертационного исследования, кратко обозначим основные вехи развития метода наименьших квадратов, как они видятся с точки зрения решения задач типа де Прони**).

Принцип МНК, предложенный К. Гауссом (сейчас его называют "линейным МНК"), опирался на предположение об ошибках в невязке уравнения. Эти ошибки называют также ошибками уравнения, или ошибками объекта. Рассмотрим для примера уравнение $y = \theta x$, в котором векторные переменные $x, y \in \mathbb{R}^n$ связаны числовым параметром θ. Пусть $\check{x}, \check{y}$ — измерения, исходя из которых нужно определить θ. Согласно методу Гаусса, параметр θ находится из переопределенной системы уравнений $\check{y} - \theta\check{x} = e$ минимизацией квадратичной целевой функции:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \|\check{y} - \theta\check{x}\|^2. \tag{0.0.5}$$

Независимо от К. Гаусса и почти в то же время (1799) для решения подобных задач П.-С. Лаплас использовал метод минимизации суммы модулей ошибок невязки [140]. В 1801 г. К. Гаусс успешно применил МНК для вычисления орбиты астероида Цереры по совокупности астрономических наблюдений с погрешностями. В 1805 г. П. Лежандр независимо от Гаусса опубликовал формулы МНК, которые сейчас мы записываем в компактном виде

$$\hat{\theta} = \left(\check{x}^\top\check{x}\right)^{-1}\check{x}^\top\check{y}. \tag{0.0.6}$$

(Заметим, что традиция записывать формулы МНК через скалярные произведения и

*) Термин "генные сети" [56] мы не употребляем, считая его неудачной калькой с английского gene networks (генные системы).

**) Эта точка зрения, безусловно, не является всеобъемлющей, поэтому наш обзор не может претендовать на полноту.

выделять в них геометрический смысл восходит к А. Н. Колмогорову (1946) [55]; в той же статье А. Н. Колмогорова можно прочитать, как излагал свой метод К. Гаусс).

В 1809 г. К. Гаусс доказал оптимальность оценок МНК, считая ошибки случайными с нулевыми средними и конечными вторыми моментами. Вероятностная интерпретация этого результата принадлежит А. А. Маркову (1900) [90]. Сейчас теорема Гаусса—Маркова широко известна, в частности, она входит практически во все курсы эконометрии*).

Аддитивные ошибки в наблюдениях. Новый шаг в понимании принципа наименьших квадратов был связан с именами статистиков Р. Эдкока (1877, 1878) [129,130], К. Куммеля (1879) [181] и К. Пирсона (1901) [224]. Р. Эдкок впервые предложил способ вычисления параметра (в нашем примере θ) в случае, когда ошибка содержится не в невязке уравнения, а в обеих наблюдаемых переменных:

$$\check{y} = y + \eta_y, \qquad \check{x} = x + \eta_x. \tag{0.0.7}$$

Как было показано Р. Эдкоком, если ошибки $\eta_{x,y}$ распределены нормально $\eta_{x,y} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2_{x,y} I)$, $\sigma_x = \sigma_y$, то принцип наименьших квадратов приводит к целевой функции

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \min_{(\,y\ x\,)\left(\begin{smallmatrix}1\\-\theta\end{smallmatrix}\right)=0} \left(\|\check{y} - y\|^2 + \|\check{x} - x\|^2\right). \tag{0.0.8}$$

К. Куммель [181] обобщил результат Р. Эдкока на случай известного не равного единице отношения ${}^{\sigma_x}/_{\sigma_y}$. К. Пирсон [224] впервые рассмотрел случай более чем двух переменных:

$$\check{v}_i = v_i + \eta_i, \qquad i \in \overline{1,p},$$

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}^{p-1}} \min_{(\,v_1\ \dots\ v_p\,)\left(\begin{smallmatrix}1\\-\theta\end{smallmatrix}\right)=0} \left(\|\check{v}_1 - v_1\|^2 + \ldots + \|\check{v}_p - v_p\|^2\right). \tag{0.0.9}$$

Здесь $v_i \doteq \begin{pmatrix} v_i[1] \\ \vdots \\ v_i[N] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ — вектор, составленный из N наблюдений i-й переменной. Решение оптимизационной задачи (0.0.9) достигается на минимальном собственном векторе симметричной матрицы $V^\top V$, составленной из наблюдений (см. раздел (3.7.3)):

$$\hat{\theta}:\ V^\top V \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\theta} \end{pmatrix} = \lambda_{\min} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\theta} \end{pmatrix}, \qquad V \doteq \begin{pmatrix} \check{v}_1 & \ldots & \check{v}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times p}. \tag{0.0.10}$$

Алгоритмы поиска собственного вектора симметричной матрицы широко известны (см. раздел 3.7.3) и имеют скорость сходимости порядка $\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_2}\right)^n$, где λ_2 — ближайшее по модулю к $\lambda_{\min}$ собственное число [34, гл.XII, п.11].

Метод Пирсона может быть применен к задаче де Прони восстановления коэффици-

*) http://yandex.ru/yandsearch?text=Теорема+Гаусса+Маркова.

ентов (γ_0, γ_1) уравнения (0.0.2) по измерениям $\check{y} = y + \eta$. Для этого нужно обозначить

$$v_1[k] \doteq y[k+2], \qquad v_2[k] \doteq y[k+1], \qquad v_3[k] \doteq y[k],$$

$$k \in \overline{1, N},$$

и искать вектор параметров $\theta \doteq \left(\begin{smallmatrix}\gamma_1\\ \gamma_0\end{smallmatrix}\right)$, минимизируя целевую функцию (0.0.9).

Возникает естественный вопрос, в каком смысле целевая функция (0.0.9) и ее частный случай (0.0.8) лучше, чем целевая функция МНК (0.0.5). Ответ на этот вопрос принято основывать на статистическом понятии состоятельности. Нестрого говоря, состоятельность целевой функции означает, что при увеличении количества N наблюдений в модельных численных экспериментах*) оценки $\hat{\theta}$, получаемые по этой целевой функции, должны приближаться к истинному значению.

Известно, что при наличии возмущений в наблюдаемых переменных (0.0.7) оценки МНК (0.0.5) не состоятельны (см., например, [165, 196]), а оценки Эдкока—Куммеля—Пирсона (0.0.8) свойством состоятельности обладают (раздел 3.4).

Стоит отметить, что при получении оценок коэффициентов γ_i по методу Пирсона в задаче де Прони не учитывается принципиальное условие

$$v_1[k] = v_2[k+1] = v_3[k+2], \tag{0.0.11}$$

которое означает, что векторы $v_i = \begin{pmatrix} v_i[1] \\ \vdots \\ v_i[N] \end{pmatrix}$ в целевой функции (0.0.9) являются экспоненциальными функциями $v_i \doteq y = \begin{pmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix}$ вида (0.0.1). Вследствие этого оценки γ_i по методу Пирсона не являются наилучшими. Этот факт интуитивно понятен и отмечался еще М. Аоки [134, 135]; строгое его обоснование является одним из новых результатов диссертации (теоремы 3.5.1, 3.5.2 главы 3).

МНК в задаче де Прони. При известных (γ_0, γ_1) для поиска $y[k]$ в оригинальном методе де Прони использовалась система уравнений (0.0.4), в которую напрямую подставлялись измерения $\check{y}$. В таком первоначальном виде алгоритм де Прони неустойчив к ошибкам наблюдений [167]. Состоятельное вычисление $y[k]$ *при известных* (γ_0, γ_1) осуществляется классическим методом наименьших квадратов типа (0.0.5):

$$\left\| \begin{pmatrix} \check{y}[1] \\ \vdots \\ \check{y}[N] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{\alpha}\sin(\omega) & e^{\alpha}\cos(\omega) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\alpha N}\sin(\omega N) & e^{\alpha N}\cos(\omega N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \min_{A_1, A_2}.$$

*) Выражение "модельный эксперимент" имеет принципиальное значение, поскольку в реальных вычислениях истинные значения параметров θ не известны, и сравнение методов получения оценок возможно только путем численных модельных экспериментов и исследования умозрительных предельных случаев.

Запишем эту задачу минимизации в компактном виде, который неоднократно будет использоваться в дальнейшем:

$$\|\check{y} - Hw\|^2 \to \min_{w}. \tag{0.0.12}$$

Решение аналогично (0.0.6):

$$\hat{w} = \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top \check{y}. \tag{0.0.13}$$

Искомая оценка функции y имеет вид

$$\hat{y} = H\hat{w} = H\left(H^\top H\right)^{-1} H^\top \check{y}. \tag{0.0.14}$$

Заметим, что столбцы матрицы H образуют фундаментальную систему решений уравнения (0.0.2).

Далее сделаем шаг, подобный шагу Г. де Прони, когда он перешел от поиска решений (0.0.1) к поиску коэффициентов уравнения (0.0.2). Правое нуль-пространство матрицы

$$G \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & -1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-2)\times N} \tag{0.0.15}$$

есть множество решений уравнения (0.0.2). Линейное ограничение $y = Hw$ равносильно условию $Gy = 0$. Поэтому (0.0.12) равносильно условной минимизации

$$\|\check{y} - y\|^2 \to \min_{Gy=0}. \tag{0.0.16}$$

Оптимальное решение $\hat{y} = H\hat{w}$ дается равносильным формуле (0.0.14) выражением

$$\hat{y} = \left[I - G^\top\left(GG^\top\right)^{-1} G\right]\check{y}. \tag{0.0.17}$$

Эта двойственная формулировка отличается от (0.0.14) тем, что матрица H зависит от параметров λ, ω, причем нелинейно, а матрица G линейно зависит от γ_i. Переход от (0.0.14) к (0.0.17) подобен переходу от (0.0.1) к (0.0.2), который сделал в свое время Г. де Прони. Отличие (0.0.17) от (0.0.14) становится принципиальным, когда нужно искать минимум целевой функции (0.0.16) или (0.0.12) по параметрам θ.

Формулы (0.0.14) и (0.0.17) представляют собой два способа получения состоятельных решений задачи де Прони при известных коэффициентах γ_i уравнения (0.0.2). Задачу (0.0.12) (или (0.0.16)) при известных γ_i назовем задачей 1.

Из вышеизложенного вытекает принципиальный вывод: при наличии возмущений вида (0.0.7) в задаче де Прони естественно формулировать задачу поиска коэффициентов γ_i исходя из той же целевой функции $\|\check{y} - y\|^2$, что и при поиске оптимального y

при известных γ_i, а именно, при $\theta \doteq \left(\begin{smallmatrix}\gamma_1\\ \gamma_0\end{smallmatrix}\right)$ «естественная» оценка имеет вид

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \min_{G_\theta y = 0} \|\check{y} - y\|^2\,, \tag{0.0.18}$$

или равносильно

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \min_{w} \|\check{y} - H_\theta w\|^2\,. \tag{0.0.19}$$

В результате в сочетании с формулами (0.0.14) или (0.0.17) получается состоятельное решение задачи де Прони методом наименьших квадратов, нелинейным относительно θ.

Второй этап минимизации (по θ) в выражениях (0.0.18), (0.0.19) назовем задачей 2. Задачи 1 и 2 с теплицевыми матрицами ограничений G_θ вида (0.0.15) будем называть вариационными [42], орторегрессионными [69, 76, 78] или задачами типа де Прони. Их формулировали А. Хаусхолдер (1950) [166], М. Осборн (1970) [218], М. Аоки (1971) [135], А. О. Егоршин (1971) [40]. Задачи К. Пирсона (0.0.9) являются частным случаем вариационных задач с клеточно-скалярными*) матрицами

$$G_\theta = I \otimes (\gamma_0, \ldots, \gamma_p)\,, \tag{0.0.20}$$

поскольку клеточно-скалярные матрицы получаются из клеточно-теплицевых матриц вида $G \doteq \left(\begin{smallmatrix}\omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_q & & 0\\ & \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_q & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \ddots\end{smallmatrix}\right)$ с матричными клетками ω_i при $q = 0$ (см. раздел 3.3).

Для задачи (0.0.19) до сих пор не найдено эффективного вычислительного решения. Для задачи (0.0.18) решение было предложено независимо разными авторами в 1970-х гг. (см. ниже). С этой точки зрения одна из двойственных формулировок, а именно (0.0.17), (0.0.18), является предпочтительной.

Заметим, что с точки зрения многих вычислителей, коэффициенты (γ_0, γ_1) можно искать обычным линейным МНК. Первым, кто предложил такое решение, был А. Хаусхолдер (1950) [166], назвав свой метод *обобщенным* методом де Прони. А. Хаусхолдер рассмотрел задачи 1 и 2 и отметил, что решение задачи 2 с вычислительной точки зрения очень сложно, и предложил использовать в задаче 2 обычный МНК. Так же поступал К. Ланцош (1956) [184, IV.23], заменяя задачу 2 на обычный метод наименьших квадратов, когда рассматривал задачу выделения показательных функций. Из современных публикаций обобщенный метод де Прони упоминается в монографии В. И. Бердышева, Л. В. Петрака (1999) [9, I.11.1-2]. Это говорит о том, что статистические аргументы (в частности, состоятельность оценок) не всеми исследователями принимаются во внимание. Действительно, в реальных задачах бывает невозможно заранее знать тип возмущений, в невязке они или в наблюдаемых переменных. Тем не менее, на примере задачи типа де Прони с погрешностями округления из монографии К. Ланцоша (1956) [184, IV.23] можно увидеть, что нелинейный МНК (0.0.18) обеспе-

*)Скалярными называются матрицы вида $A = aI = I \otimes a$, где a число; клеточно-скалярными называются матрицы вида $A = I \otimes B$, где B — матрица; $\otimes$ — кронекерово произведение матриц.

чивает существенно более устойчивые оценки, чем метод наименьших квадратов по невязке уравнения (см. раздел 5.3).

Метод вариационной идентификации А. О. Егоршина (ВИ, ВМ). Впервые эффективное вычислительное решение нелинейной задачи МНК (0.0.18), (0.0.17) было дано А. О. Егоршиным (1971) [40]. Вычислительный метод А. О. Егоршина в пространстве оптимизируемых параметров γ_i опирается на итерационную процедуру типа поиска минимального собственного вектора*) симметричной матрицы, составленной из наблюдений $\check{y}$ (см. раздел 3.7.3); для вычисления оценки процесса (0.0.17) используются «быстрые» алгоритмы (без уравнения Риккати) рекуррентного по N вычисления матрицы проектора $G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} G$ и оценки процесса y (раздел 6.6). Как было отмечено А. О. Егоршиным, алгоритмы этого типа получаются из уравнений фильтра Калмана при учете стационарности системы и имеют вид уравнений Амбарцумяна—Чандрасекара—Редхэффера (АЧР), описывающих рассеяние и перенос излучения в слоистой среде [3, 232]. Подобные же уравнения были получены М. Г. Крейном (1955) при решении линейных интегральных уравнений первого и второго рода [59]. За рубежом их впервые вывел Н. Левинсон (1946), рассматривая задачу Н. Винера для стационарной дискретной последовательности [189]; затем они были переоткрыты Дж. Дурбином (1960) [150]. Алгоритмы Крейна—Дурбина—Левинсона—АЧР в применении к решению задачи 1 для стационарных систем исследовались в работах Т. Кайлата (1972, 1973) [153,168,169,192], А. Линдквиста (1974, 1975) [190,191], Л. Льюнга, Б. Фридландера (1976) [153, 192]. Недавно А. О. Егоршиным (2007) [270] было показано, что "быстрые" алгоритмы можно получить, проводя встречные процессы ортогонализации Грама—Шмидта однородной системы векторов (т. е. векторов, получаемых из порождающего вектора степенями унитарного преобразования).

Стоит отметить, что А. О. Егоршин решал более общую задачу, чем задача Г. де Прони, рассматривая в том числе и неоднородные системы, вводя уравнения

$$\begin{aligned} y[k+p] + \alpha_{p-1} y[k+p-1] + \ldots + \alpha_0 y[k] &= \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \\ & k \in \overline{1, N-p}. \end{aligned} \tag{0.0.21}$$

Для перехода к такого рода системам нужно вместо $y = (y[1]; \ldots ; y[N])$ из (0.0.2) рассматривать объединенный вектор траектории (процесса) $z = (z[1]; \ldots ; z[N])$, $z[k] \doteq (y[k]; u[k])$. После формального переобозначения $\gamma_i \doteq (\alpha_i, -\beta_i)$ приходим к уравнению вида 10 относительно отсчетов $z[k]$ с матричными коэффициентами $\gamma_i \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Структура и нуль-пространство матрицы G (0.0.15) при этом, тем не менее, качественно и неформально меняются.

Интересная геометрическая иллюстрация задач 1 и 2 типа де Прони для случая $p = 1$, $N = 3$, $\beta_1 = \beta_0 = 0$ была опубликована А. О. Егоршиным в [43].

---

*) Т. е. соответствующего минимальному собственному числу.

Для решения задачи 2 поиска оптимальных коэффициентов γ_i совместно с поиском оптимального процесса z (0.0.17) по критерию (0.0.18) (с заменой y на z) А. О. Егоршин предложил итерационную процедуру в пространстве коэффициентов (см. раздел 3.7.3), которая обладает малой чувствительностью к начальному приближению и скоростью сходимости в малую окрестность экстремума за конечное число итераций (как правило, не более пяти) при уровнях шума измерений до 50% (см. [30,70,83] и примеры расчетов в разделе 3.7.4). Несмотря на сложный характер изоповерхностей целевого функционала, исследованных В. И. Костиным (1984) [57] и В. Г. Демиденко (2008, 2010) [30, 32], алгоритм А. О. Егоршина имеет радиус сходимости, практически достаточный для большинства задач из приложений (А. А. Ломов (1997) [70], В. Г. Демиденко (2008, 2010) [30,32]). Загадка глобальной эффективности итераций по параметрам уравнений в вычислительном методе А. О. Егоршина до сих пор не решена. Исследование локальной сходимости и устойчивости оценок проводилось В. Г. Демиденко в предположении постоянства наименьшего собственного числа матрицы ядра целевой функции ВИ (2008, 2010) [30, 32]; для однородных систем локальные свойства близкой по типу итерационной процедуры исследовали М. Осборн и Г. Смит (1991, 1995) [220,221].

Вычислительный метод А. О. Егоршина при современных мощностях вычислительных устройств позволяет осуществлять помехоустойчивую идентификацию динамических уравнений в режиме реального процесса. Применения охватывают широкую область от задач автоматического управления с идентификатором до задач динамического сжатия (кодирования и декодирования) потоков аудио- и видео-информации в реальном времени. Отличительной особенностью вариационных постановок задач идентификации, решаемых методом А. О. Егоршина, является возможность идентификации на переходных процессах, благодаря включению начальных условий модельных процессов в число оцениваемых параметров. Такого рода задачи всегда считались актуальными и сложными, об этом говорится во введении монографии А. Л. Бунича и Н. Н. Бахтадзе (2003) [17].

В 1970 г. М. Осборн [218], как и М. Аоки (1971) [135], независимо от А. О. Егоршина пришел к задаче (0.0.18). М. Осборн нашел вычислительное решение, близкое к методу А. О. Егоршина в части итераций по вектору коэффициентов, но ограничился при этом случаем однородных систем вида (0.0.21) с $\beta_i = 0$, $u[k] = 0$ и не исследовал рекуррентные алгоритмы вычислений проекторов и оценки процесса в задаче 1. В 1975 г. М. Осборн предложил для своего метода название "модифицированный метод де Прони" [219], и под этим именем вычислительный метод, который мы называем методом А. О. Егоршина, чаще всего упоминается в литературе*). Итерационную процедуру типа поиска собственного вектора симметричной матрицы в пространстве параметров, независимо и одновременно предложенную А. О. Егоршиным и М. Осборном, на наш взгляд, уместно называть процедурой Егоршина—Осборна. Отличие итераций А. О. Егоршина состоит в том, что пересчет обращаемой матрицы осуществляется на каждом шаге по

*) http://www.google.ru/search?q=Prony+method+modified

параметрам, а в алгоритме М. Осборна матрица пересчитывается только после нескольких шагов приближения к минимальному собственному вектору. Оптимальное значение при итерациях А. О. Егоршина достигается быстрее. Вычислительные затраты примерно одинаковы.

В статьях (1991, 1995) [220, 221] М. Осборн и Г. Смит исследовали локальную устойчивость оценок параметров модифицированного метода де Прони в пределе $N \to \infty$ при ошибках наблюдений с нулевым средним и конечной второй вариацией. Была показана состоятельность оценок (0.0.18), (0.0.15) для однородных систем и оптимальность этих оценок с точки зрения предельного значения дисперсии при больших N. Особенность этой интересной работы в том, что вместе с ростом N авторы уменьшают время дискретизации $\Delta t = \frac{1}{N}$; этот предельный случай необычен и в своем роде очень красив, хотя и редко встречается в приложениях. Исследование других предельных случаев проводится в настоящей диссертации.

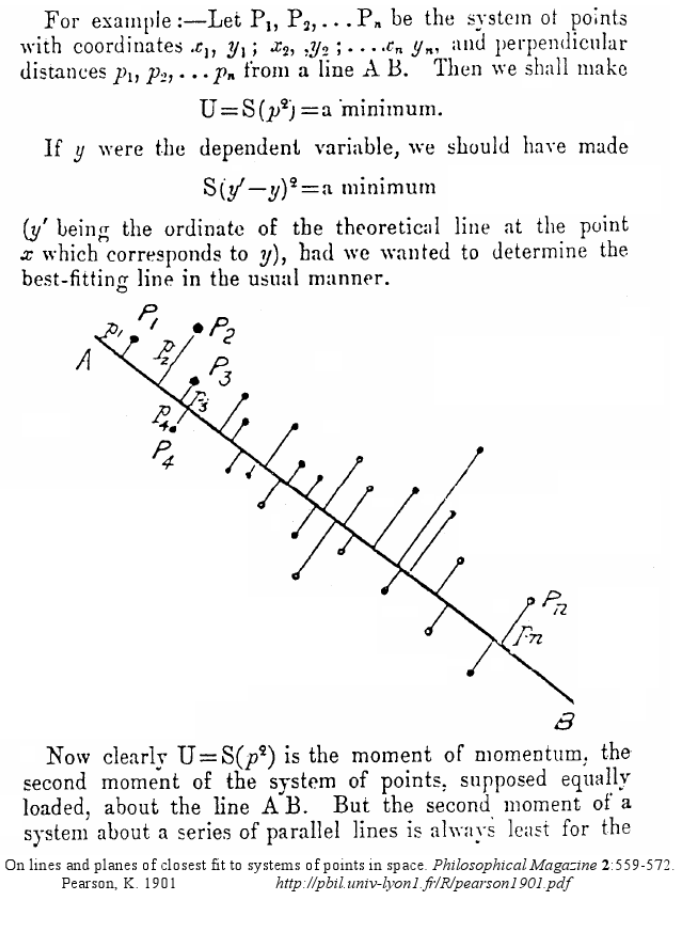
В 1988 г. А. О. Егоршин предложил вычислительное решение для многомерного случая систем из $r > 1$ уравнений [42]. В той же статье был предложен термин "вариационный метод идентификации" по отношению к целевым функциям вида (0.0.18), (0.0.21) с совместной оценкой оптимальных процессов по формулам проецирования (0.0.17). Вычислительная апробация многомерного метода и подтверждение эффективности алгоритмов Егоршина—Осборна при переходе к многомерному случаю $r > 1$ были сделаны автором диссертации (1989, 1990, 1991) [49, 64, 197]. Это позволило применять метод А. О. Егоршина к линейным системам управления с обратными связями.

В то же время было обнаружено, что для ряда типичных и достаточно простых систем с обратными связями, описываемых двумя и более уравнениями, на первый план выходят проблемы параметрической идентифицируемости [67, 198].

М. Аоки и П. Ю (1970) [133–135] также рассмотрели задачу (0.0.18), (0.0.21), установив состоятельность оценок в пределе $N \to \infty$ [133]. Как и ранее А. Хаусхолдер (1950) [166], М. Аоки отметил, что задача (0.0.18), (0.0.21) с вычислительной точки зрения крайне сложна [135]. Для поиска γ_i М. Аоки, П. Ю (1970) [134] применили варианты метода Пирсона и исследовали устойчивость оценок к малым возмущениям. Это было удачным сравнительно простым решением проблемы, хотя и не оптимальным. Заметим, что подобным же образом, путем обоснования правомочности замены задачи (0.0.18) на более простую типа Пирсона (на основании вводимого нового понятия равносильности по состоятельности), в диссертации исследована проблема локальных экстремумов на конечных интервалах наблюдения (раздел 3.6).

Оценки ортогональной регрессии (ОР). Кратко опишем историю развития методов типа Пирсона, поскольку они играют важную роль "палочки-выручалочки" для надежного поиска состоятельных оценок (пусть и не оптимальных по локальной устойчивости к возмущениям, см. раздел 3.5) в задачах вида (0.0.18), (0.0.21). Ряд полученных в диссертации новых результатов по свойствам вариационных оценок применим и к методам типа Пирсона как частным случаям (раздел 4.5).

Первые применения методов типа Пирсона (0.0.9) для оценки коэффициентов γ_i уравнений (0.0.3), (0.0.21) встречаются в работах Дж. фон Неймана (1937) [215], Т. Купманса (1937) [177], О. Риерсоля (1950) [233] и М. Левина (1964) [188]. Метод (0.0.8), (0.0.9), предложенный Р. Эдкоком, К. Куммелем и К. Пирсоном, как и МНК (0.0.5), состоит в минимизации суммы квадратов, поэтому его называют иногда "нелинейным МНК", в отличие от "линейного МНК" К. Гаусса (0.0.5). Геометрический смысл оценок (0.0.9) К. Пирсон пояснил рисунками (см. с. 19), из которых ясно, что целевая функция (0.0.9) есть сумма квадратов расстояний от измерений, представленных как N точек $v[k] \doteq (\, v_1[k]; \dots; v_p[k] \,)$, $k \in \overline{1,N}$ в пространстве $\mathbb{R}^p$, до модельной плоскости, определяемой уравнением $v[k]\,(\,{}^{\;1}_{-\theta}\,) = 0$ (как видно из рисунков К. Пирсона для случая $p = 2$, если минимизировать сумму длин отрезков от измерений до модельной плоскости не вдоль нормали, а вдоль оси ординат (или абсцисс), то получаются оценки обычного линейного МНК). В силу этого свойства оценки (0.0.9) стали называть оценками *ортогональной средней квадратической регрессии* (ОР). Они получили широкую известность после выхода монографии Г. Крамера (1946) [58]. Нелинейность оценок ОР проявляется в том, что направление отрезков, сумма длин которых минимизируется, зависит от параметров (наклона) модельной плоскости.



For example:—Let $P_1, P_2, \dots P_n$ be the system of points with coordinates x_1, y_1; x_2, y_2; $\dots x_n\, y_n$, and perpendicular distances $p_1, p_2, \dots p_n$ from a line A B. Then we shall make

$$U = S(p^2) = \text{a minimum}.$$

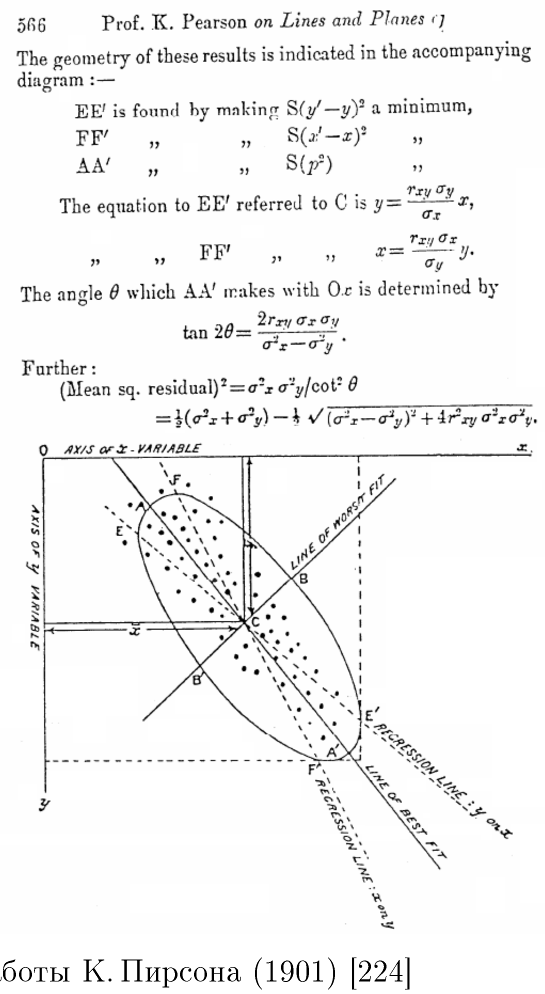
If y were the dependent variable, we should have made

$$S(y'-y)^2 = \text{a minimum}$$

(y' being the ordinate of the theoretical line at the point x which corresponds to y), had we wanted to determine the best-fitting line in the usual manner.

Now clearly $U = S(p^2)$ is the moment of momentum, the second moment of the system of points, supposed equally loaded, about the line A B. But the second moment of a system about a series of parallel lines is always least for the

On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine* **2**:559-572.
Pearson, K. 1901 *http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pearson1901.pdf*



566 Prof. K. Pearson *on Lines and Planes of*

The geometry of these results is indicated in the accompanying diagram:—

EE′ is found by making $S(y'-y)^2$ a minimum,
FF′ ,, ,, $S(x'-x)^2$,,
AA′ ,, ,, $S(p^2)$,,

The equation to EE′ referred to C is $y = \frac{r_{xy}\,\sigma_y}{\sigma_x}\,x$,

,, ,, FF′ ,, ,, $x = \frac{r_{xy}\,\sigma_x}{\sigma_y}\,y$.

The angle θ which AA′ makes with Ox is determined by

$$\tan 2\theta = \frac{2 r_{xy}\,\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma^2_x - \sigma^2_y}.$$

Further:

$$(\text{Mean sq. residual})^2 = \sigma^2_x\,\sigma^2_y / \cot^2\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sigma^2_x + \sigma^2_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma^2_x - \sigma^2_y)^2 + 4 r^2_{xy}\,\sigma^2_x\,\sigma^2_y}.$$

Рис. 1. Два рисунка из оригинальной работы К. Пирсона (1901) [224]

Если переменные v_i в уравнениях (0.0.9) трактуются как случайные величины, то в литературе говорится о задаче восстановления *структурных связей* (structural relationship), в противном случае — о задаче восстановления *функциональных соотношений* (functional relationship), см. М. Кендалл (1951) [176]. Мы не различаем эти два случая, каждый раз из контекста будет ясно, о какой задаче идет речь. Обширная библиография по оценкам ортогональной регрессии (ОР, error in variables, EIV) имеется в монографии У. Фуллера (1987) [154], см. также современный обзор Д. Гилларда (2010) [157]. Сведения об истории развития методов ОР приведены в статье П. Спрента (1989) [247]. Много внимания в литературе уделяется случаю, когда неизвестны значения σ_i (на такой постановке задачи, в частности, настаивал Р. Калман (1985) [48]); в случае неизвестных σ_i получение состоятельных оценок параметров возможно только при наложении дополнительных ограничений на наблюдения.

В настоящее время отмечается значительное уменьшение интереса к оценкам ОР в литературе по эконометрии, ввиду "сложившегося впечатления, что задача ОР чрезмерно трудна ввиду отсутствия простого способа состоятельного оценивания" в случае априори неизвестного соотношения между дисперсиями σ_i [223]. Тем не менее, в 2004 г. была обнаружена вычислительная устойчивость оценок ОР к ошибкам априорного задания соотношений между σ_i [223].

Одним из главных результатов исследования оценок ОР являются теоремы о состоятельности и асимптотических свойствах, полученные Л. Глэзером (1981) и У. Фуллером (1987) [154,158]. Монография У. Фуллера (1987) [154] считается классической, см. А. Кукуш и др. (2005) [180]. Сравнению результатов У. Фуллера с результатами диссертации посвящен раздел 4.5.

Метод наименьших квадратов по всем переменным (НКП) (Total Least Squares, TLS). Один из самых известных нелинейных вариантов метода наименьших квадратов был предложен в статье Г. Голуба и Ч. Ван Лоана (1980) [162]. Этот метод допускает наличие ошибок в обеих частях модельного уравнения во всех переменных, и в этом смысле похож на метод ортогональной регрессии. Для него Г. Голубом и Ч. Ван Лоаном было предложено название "Total Least Squares" (TLS), мы будем использовать сокращение НКП. В монографии С. Ван Хуффель и Дж. Вандевалле (1991) [258] проведено подробное исследование метода НКП, включая чувствительность оценок к возмущениям и асимптотические свойства, а также приведено много примеров приложений. Решение $\hat{\theta}_{\mathrm{TLS}}$ по методу НКП уравнения $A\theta = b$ достигается минимизацией нормы $\|(\Delta A, \Delta b)\|$ при условии $(A + \Delta A)\theta = b + \Delta b$. Оценка дается равенством $\hat{\theta}_{\mathrm{TLS}} = (A^\top A - \sigma^2 I)^{-1} A^\top b$, где σ^2 есть наименьшее собственное число матрицы $(A, b)^\top (A, b)$. С другой стороны, оценка $\hat{\theta}_{\mathrm{TLS}}$ является правым собственным вектором, соответствующим наименьшему сингулярному числу в сингулярном разложении матрицы (A, b) [162].

Х.-Ф. Ченг и Дж. Ван Несс (1999) [145] отметили, что метод НКП (TLS), описанный в [162], есть не что иное, как метод ортогональной регрессии К. Пирсона. Действительно, при обозначениях $V \doteq (A, b)$, $\sigma^2 \doteq \lambda_{\min}$ из (0.0.10) получаем

$$\begin{pmatrix} A^\top A - \sigma^2 I & A^\top b \\ b^\top A & b^\top b - \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat\theta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{или} \qquad V^\top V \gamma = \sigma^2 \gamma.$$

Отсюда сразу следует искомое равенство $\left(A^\top A - \sigma^2 I\right) \hat\theta = A^\top b$, а также то, что оценка НКП (TLS) находится из условия минимума целевой функции

$$\hat\theta_{\mathrm{TLS}} = \arg\min_\theta \frac{\|V\gamma\|^2}{\|\gamma\|^2} = \arg\min_\theta \frac{\|A\theta - b\|^2}{\|\theta\|^2 + 1}$$

(см. раздел 3.7.3).

Метод НКП (TLS) имеет много вариантов; некоторые из них связаны с регуляризацией типа Тихонова [116], например, такая оценка:

$$\hat\theta = \arg\min_\theta \frac{\|A\theta - b\|^2}{\|\theta\|^2 + 1} + \rho \|L\theta\|^2,$$

где L некоторая матрица, ρ — параметр регуляризации. См. обзоры И. Марковского, Д. Симы и С. Ван Хуффель (2010) [209] и В. Г. Демиденко (2010) [31].

Как было отмечено выше, методы типа НКП (ОР) являются состоятельными, но не оптимальными, если применять их к оценкам параметров динамических уравнений вида (0.0.21) ненулевого порядка $p > 0$.

Решение уравнений $A\theta = b$ относительно θ при наличия ошибок ΔA, Δb в обеих частях равенства рассматривалось Дж. Уилкинсоном (1965) [266, гл. 4, п. 13]. Им была получена оценка для погрешности решения при условии $(A + \Delta A)(\theta + \Delta\theta) = b + \Delta b$:

$$\frac{\|\Delta\theta\|}{\|\theta\|} \leqslant \mu(A) \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \Big/ \left(1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \mu(A) \right), \tag{0.0.22}$$

где $\mu(A)$ — число обусловленности матрицы A (отношение наибольшего сингулярного числа к наименьшему). См. также монографию С. К. Годунова (1980) [26, пар. 2]. Это неравенство является оценкой устойчивости решений по методу НКП Г. Голуба (или ОР). Ряд других оценок погрешности, в том числе сравнение НКП с оценками обычного МНК приведено в монографии С. Ван Хуффель и Дж. Вандевалле (1991) [258]. Показано, что различие имеет второй порядок малости по норме ошибки $\|(\Delta A, \Delta b)\|$. См. также монографию А. Бьорка (1996) [140], в которой в части сравнения методов даны ссылки на работы А. ван дер Слуиса и Г. Велткампа (1979) [240] и Г. Стюарта (1984) [248].

Метод НКП с ограничениями (Constrained TLS, CTLS). Условие динамичности уравнения означает клеточную теплицевость матрицы системы G (0.0.15) при $p > 0$. В статье Т. Абатзоглу и Дж. Менделя (1987) [127] была предложена модификация метода НКП (TLS), в которой учитывается структура матрицы системы. Модель возмущений имеет вид

$$(\Delta A, \Delta b) \doteq \Delta V = \left(\begin{array}{ccc} F_1\eta & \ldots & F_v\eta \end{array} \right), \qquad \eta \in \mathbf{M}_2(0, P),$$

$$F_i = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \ldots & I & \ldots & 0 \end{array} \right).$$

Метод получил название "Constrained TLS" (CTLS), или НКП с ограничениями (НКПО). В статье Т. Абатзоглу, Дж. Менделя, Г. Харады (1991) [128] описаны применения метода CTLS к анализу спектра временных последовательностей в условиях аддитивного шума; там же получены линейный член функции чувствительности (и матрица ковариации) оценок в задаче CTLS, которая относится к классу вариационных с клеточно-теплицевыми матрицами. Исследуется случай систем из одного уравнения ($r = 1$). Для получения оценок авторы используют алгоритм типа Ньютона.

Метод НКП с учетом структуры матриц (НКПС) (Structured TLS, STLS). Более общий подход к учету структуры матриц в задаче НКП (TLS) предложил Б. Де Мур (1993) [214]. Метод Б. Де Мура по существу равносилен НКПО Т. Абатзоглу и Дж. Менделя, см. Ф. Леммерлинг, Б. Де Мур, С. Ван Хуффель (1996) [187]. С этого времени в литературе используется для обоих методов название "Structured TLS" (STLS), или наименьшие квадраты по всем переменным с учетом структуры (НКПС). Б. Де Мур (1993) [214] предложил вычислительный алгоритм поиска решения задачи НКПС (STLS), по идее близкий алгоритму Егоршина—Осборна. В алгоритме Б. Де Мура итерации по параметрам совершаются синхронно с итерациями по вектору множителей Лагранжа, ввиду того, что задача НКПС (STLS) сформулирована Б. Де Муром симметричным образом по отношению к замене теплицевой структуры на ганкелеву и наоборот. Б. Де Мур в своей интереснейшей статье сделал акцент на идее метода НКПС (STLS) и его применении, рассмотрев связи алгоритма с фильтром Калмана, с задачей восстановления функции отклика линейной системы по зашумленным измерениям, с задачей аппроксимации и редукции моделей в H_2, с задачей идентификации в H_2 и задачей вычисления радиуса области устойчивости линейной системы с неопределенными параметрами. Для выражения основных идей Б. Де Мур ограничился скалярными системами ($r = 1$) и не рассматривал вопросов сходимости алгоритма, кратко обосновав его степень сходимости как линейную, приведя несколько примеров численных расчетов.

Доказательство состоятельности целевой функции НКПС (STLS) дано в статье А. Кукуша, И. Марковского и С. Ван Хуффель (2005) [180]. Отмечено, что доказательство сделано при более общих предположениях, чем в работах М. Аоки, П. Ю (1970) [133,134] и У. Фуллера (1987) [154]. Ранее идея доказательства состоятельности (также со ссылками на работы М. Аоки, П. Ю (1970) [133,134] и У. Фуллера (1987) [154]) была опубликована автором диссертации (1997) [69]. В той же статье [180] и другой более ранней статье этих же авторов [207] описан оригинальный алгоритм поиска γ. Идею итерационной процедуры И. Марковского можно выразить следующим образом. Нужно решить нелинейное уравнение $J'_\gamma = \widehat{V}(\gamma)^\top C(\gamma)V\gamma = 0$. Оценка γ_{k+1} вычисляется из линейного уравнения $\widehat{V}(\gamma_k)^\top C(\gamma_k)V\gamma_{k+1} = 0$. В [180] отмечено, что сжимающие свойства этого алгоритма еще не доказаны. В статье И. Марковского, С. Ван Хуффель, Р. Пинтелона (2005) [208] отмечено, что метод НКПС (STLS) требует хорошего начального приближения, видимо, при условии применения итерационной процедуры И. Марковского или типа Ньютона.

Метод наименьших квадратов по всей траектории (НКТ) (Global Toal Least Squares, GTLS). Еще одним вариантом развития метода НКП (TLS) является метод наименьших квадратов по всем переменным и всей траектории (процессу) (НКТ) (Global Toal Least Squares, GTLS), предложенный Б. Роордой (1995) [235, 236]. Следует отличать GTLS Б. Роорды от "Generalized TLS" С. Ван Хуффель и Дж. Вандевалле (1989) [257]. Последний есть обычный TLS с фиксированной весовой матрицей. По целевой функции метод Б. Роорды есть в точности вариационный метод (0.0.18), (0.0.15) для неоднородных моделей (0.0.21), записанных в равносильной нормальной форме уравнения 1-го порядка. Таким образом, метод GTLS по целевой функции совпадает с методом А. О. Егоршина (1970), уступая последнему по эффективности вычислительного решения.

Б. Роорда предложил метод поиска минимума целевой функции GTLS, основанный на модификации итерационной процедуры типа Ньютона. Как было обнаружено еще в 1984 г. В. И. Костиным [57], подобного рода универсальные процедуры в рассматриваемой задаче имеют малый радиус сходимости из-за большой овражности минимизируемого функционала (см. также работу автора диссертации (1997) [70], статьи В. Г. Демиденко (2008, 2010) [30,32] и описание проблемы в обзоре Г. Смита (2000) [242]). В статье Б. Роорды (1995) [235] на примере простой разностной модели 2-го порядка (характеристический многочлен имеет действительные корни 0 и 1) сравниваются алгоритмы Гаусса—Ньютона и алгоритм Б. Роорды для оптимизации параметров. Отмечено, что алгоритм Гаусса—Ньютона работает значительно быстрее. Моделируемые системы описываются уравнением в нормальной форме 1-го порядка с переменными состояния. Для оценки траектории (процесса) используется алгоритм без уравнения Риккати. Во введении подход автора излагается так: "Вместо построения стохастических предсказателей, мы сосредотачиваемся на построении аппроксимации предъявленных данных решениями разностного уравнения". Данный аппроксимационный подход возводится Б. Роордой к работе Я. Виллемса (1989) [19]. Как было отмечено выше, подобного рода вариационные постановки мы предпочитаем называть задачами типа де Прони (1795) [230].

В статье Б. Роорды и К. Хейджа (1995) [236] проводится сравнение метода Б. Роорды с методами идентификации, основанными на регрессии (линейном МНК), на локальном варианте метода НКП (TLS) и на минимизации ошибки прогноза (описание группы методов по ошибке прогноза приведено ниже в подразделе "Прямые методы").

Вариационный подход в спектральном анализе (метод В. Ф. Писаренко). В монографии С. Марпла (1986) [210] 13-я глава посвящена методам спектрального анализа временных последовательностей, основанным на вычислении собственных значений эмпирической матрицы ковариаций. Учитывая вид (0.0.10) решения простейшего из вариационных методов — метода К. Пирсона ортогональной регрессии, можно заключить, что анализ собственных значений матрицы ковариаций является определяющим признаком вариационного подхода. Метод В. Ф. Писаренко [225, 226] считается одним из первых методов вариационного типа для оценки частот синусоидальных сигналов, измеренных с аддитивным белым шумом (см. Г. Мэттью, С. Дасгупта, В. Редди (1994) [212] и обзор Г. Смита (2000) [242]). Этот метод основан на приближенном вычислении спектральной плотности эмпирической матрицы ковариаций. Спектральное преобразование используется, чтобы ограничить вид получаемых собственных векторов, которые согласно постановке задачи спектрального анализа [210] должны быть дискретизациями синусоидальных сигналов постоянной амплитуды. Описание метода В. Ф. Писаренко в сравнении с методами типа де Прони дано Х. Ибрагимом (1989) [222]. Оригинальная статья В. Ф. Писаренко (1972) доступна через google [225]. М. Осборн и Г. Смит (1995) [221] отмечают, что метод В. Ф. Писаренко состоятелен (хотя и не оптимален по эффективности) при оценке синусоид и несостоятелен при оценке затухающих синусоид или экспоненциальных сигналов. С другой стороны, в методах типа де Прони условие постоянства амплитуды синусоидальных решений не налагается, поэтому эти методы не оптимальны с точки зрения спектрального анализа.

Прямые методы типа рекуррентного МНК (по ошибке прогноза). Описанный выше алгоритм де Прони решал задачу интерполяции сумм экспоненциальных функций по данным измерений в равноотстоящие моменты времени. Главной идеей метода было вычисление оптимальных функций посредством вычисления коэффициентов линейного разностного уравнения, решениями которого являлись эти функции. Задача оптимизации решалась в пространстве коэфициентов уравнения, и только на последнем шаге вычислялись корни характеристического многочлена и находились показатели и частоты оптимальных экспонент и синусоид. Следует отметить, что в методе де Прони целью оптимизации являются именно функции — решения уравнения, аппроксимирующие измерения, а разностное уравнение и его коэффициенты играют вспомогательную роль. Формулировка задачи де Прони в терминах линейного метода наименьших квадратов была предложена А. Хаусхолдером (1950) [166] (обобщенный метод де Прони). Условие состоятельности оценок параметров приводит к задаче нелинейного МНК; эффективное вычислительное решение этой задачи для неоднородных систем линейных разностных уравнений предложил А. О. Егоршин (1971, 1988) [40, 42]. М. Осборн (1975) [219] независимо предложил близкое по идее решение нелинейного МНК для однородных систем (модифицированный метод де Прони). В основе этих нелинейных методов лежит именно оценка аппроксимирующей траектории, как и в оригинальной задаче де Прони.

Альтернативный подход к идентификации параметров динамических систем, описываемых неоднородными линейными разностными уравнениями, развивается за рубежом начиная с работ К. Острема и соавт. (1965, 1969) [**?**, 136]. Результаты исследований в этом направлении представлены в монографиях Р. Кашьяпа, А. Рао (1983) [51], Я. З. Цыпкина (1984) [120], Л. Льюнга (1987) [195], Х.-Ф. Чена (2008) [144]. Этот подход повсеместно употребляется при решении задач адаптивного управления, см. обзорный доклад М. Геверса (2004) [156], монографии А. Л. Бунича и Н. Н. Бахтадзе (2003) [17], К. Острема и Б. Виттенмарка (2008) [137]. Суть подхода состоит в формализации динамического процесса, содержащего возмущения, дробно-рациональным уравнением

$$A(s)\check{y}[k] = \frac{B(s)}{F(s)}\check{x}[k] + \frac{C(s)}{D(s)}\varepsilon[k] \tag{0.0.23}$$

(символ s есть оператора сдвига). Все имеющиеся возмущения сводятся к невязке уравнения. Для обеспечения состоятельности полученной невязке приписывается неединичная матрица ковариации, которая зависит от идентифицируемых параметров системы, поэтому невязка имеет вид $\frac{C(s)}{D(s)}\varepsilon[k]$. При таком подходе целью оптимизации являются параметры уравнения, минимизирующие ошибку прогноза нового измерения. Аппроксимация измерений решениями модельной системы на всем интервале наблюдения не рассматривается как цель оптимизации.

Методы на основе ошибки прогноза широко распространены и имеют множество модификаций; к перечню цитированных выше монографий можно добавить известный отечественный справочник по теории автоматического управления под ред. А. А. Красовского (1987) [114] и обзор Т. Содерстрома (2006) [245]. Рассмотрим этот класс методов более подробно. Методы по ошибке прогноза еще называются *прямыми* [114, гл. 5], *разомкнутыми* [42, 94], или *наивными* [159]. Согласно терминологии [114, гл. 5], прямые методы — это методы, в которых целевые функции для оценки параметров получаются путем прямой подстановки в уравнение модели измеренных значений $\check{x}$, $\check{y}$ вместо модельных переменных x, y. В этом состоит принципиальное отличие прямых методов от методов типа ортогональной регрессии, вариационных, *замкнутых* в терминологии [40, 94], или методов типа де Прони. В замкнутых методах коэффициенты уравнения играют всего лишь подсобную роль, как средство описания класса функций, который используется для аппроксимации измерений. Поэтому в целевых функциях замкнутых методов всегда явно присутствуют решения модельного уравнения, и целью оптимизации является уменьшение рассогласования наблюдений с решениями модельного уравнения. В целевых функциях прямых ("разомкнутых") методов принципиально отсутствуют решения модельных уравнений, и целевые функции зависят только от коэффициентов и напрямую подставленных данных наблюдений, на основе которых вычисляется прогноз.

Основная идея "прямых" методов восходит к статье А. Н. Колмогорова (1941) [54] и во многом подобной ей работе Н. Винера (1942) [265], вышедшей за рубежом независимо и немного позже. А. Н. Колмогоровым рассматривалась задача оптимального предсказания и интерполяции элементов стационарной последовательности $\{..., x[k-1], x[k], ...\}$ случайных величин с конечным вторым моментом. Ставилась задача при заданных $p > 0$ и $l \geqslant 0$ подобрать значения действительных коэффициентов a_i, при которых линейная комбинация

$$y = a_p x[k-1] + \ldots + a_1 x[k-p]$$

наиболее точно приближается к случайной величине $x[k+l]$. За меру точности принимается математическое ожидание $\sigma^2 \doteq \mathbf{M}(x[k+l]-y)^2$. А. Н. Колмогоров отмечал, что если коэффициенты корреляции $b(i) \doteq \mathbf{M}(x[k+i]x[k])$ известны, поиск оптимальных значений a_i не составляет труда. Нужно решить задачу наименьших квадратов

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \|\check{y} - \check{X}\theta\|^2 \tag{0.0.24}$$

для вектора $\check{y}$ и матрицы $\check{X}$, составленных из наблюдений случайной последовательности:

$$\check{y} \doteq \begin{pmatrix} \check{y}[1] \\ \vdots \\ \check{y}[N] \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x[p+1+l] \\ \vdots \\ x[p+N+l] \end{pmatrix}, \qquad \check{X} \doteq \begin{pmatrix} x[1] & \ldots & x[p] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N] & \ldots & x[p+N-1] \end{pmatrix}. \tag{0.0.25}$$

Для конечного N имеем

$$\hat{\theta}_N \doteq \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = \left(\check{X}^\top \check{X}\right)^{-1} \check{X}^\top \check{y}. \tag{0.0.26}$$

Даже если значения коэффициентов корреляции $b(i)$ заранее не известны, в предельном случае $N \to \infty$ по закону больших чисел имеет место сходимость

$$\hat{\theta}_N \to \hat{\theta} = \begin{pmatrix} b(0) & \ldots & b(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(p-1) & \ldots & b(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b(p+l) \\ \vdots \\ b(1+l) \end{pmatrix}.$$

Нетривиальный вопрос, ответ на который был найден А. Н. Колмогоровым, состоит в зависимости наименьшей достижимой ошибки $\sigma^2(\hat{\theta})$ от числа p. С ростом p величина ошибки уменьшается. Если коэффициенты корреляции $b(i)$, грубо говоря, затухают быстро с ростом i, то предел $\lim_{p\to\infty} \sigma^2(\hat{\theta})$ строго положителен и вычисляется его значение. Если последовательность наблюдений $x[k]$ и коэффициентов $b(i)$ обладает определенным свойством "регулярности", то предельное по p значение ошибки предсказания равно нулю.

Развитием подхода Колмогорова—Винера являются методы идентификации "по ошиб-

ке прогноза" (PEM, "prediction error methods") [96, 136]. Их систематическое изложение дано в монографиях [137, 144, 195]. В вычислительном отношении эти методы существенно проще рассмотренных выше нелинейных МНК. Если обозначить $\varphi[k]^\top \doteq (x[k], \dots x[k+p-1])$, то
$$\check{y}[k] = \varphi[k]^\top \theta_* + e[k], \tag{0.0.27}$$
где θ_* есть вектор "истинных" параметров, и $\{\dots, e[k-1], e[k], \dots\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных (н. о. р.) случайных величин с нулевым мат. ожиданием и конечным вторым моментом. При этом предположении оценка МНК $\hat{\theta}_N$ (0.0.26) обладает свойством состоятельности. Были предложены различные способы перехода к $\hat{\theta}_N$ от $\hat{\theta}_{N-1}$ при поступлении порции измерений $\check{y}[N]$, $\varphi[N]$. Они основаны на рекуррентном вычислении матрицы
$$P^{-1}(N) \doteq \check{X}^\top \check{X} = \sum_{k=1}^{N} \varphi[k]\varphi[k]^\top = P^{-1}(N-1) + \varphi[N]\varphi[N]^\top. \tag{0.0.28}$$
Обновление оценки описывается уравнениями
$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= \hat{\theta}_{N-1} - P(N)\varphi[N]\varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1} + P(N)\varphi[N]\check{y}[N] \\ &= \hat{\theta}_{N-1} + P(N)\varphi[N] \left(\check{y}[N] - \varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1}\right) \\ &= \hat{\theta}_{N-1} + K[N]\varepsilon[N], \end{aligned} \tag{0.0.29}$$
где $K[N] = P[N]\varphi[N]$ и величина $\varepsilon[N] = \check{y}[N] - \varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1}$ играет роль ошибки прогноза. С помощью леммы об обращении матриц [105, с. 45] получаются выражения
$$K[N] = K[N-1]\varphi[N] \left(1 + \varphi[N]^\top K[N-1]\varphi[N]\right)^{-1}, \tag{0.0.30}$$
$$P(N) = \left(I - K[N]\varphi[N]^\top\right) P(N-1). \tag{0.0.31}$$
Формулы (0.0.29), (0.0.30), (0.0.31) называют рекуррентным методом наименьших квадратов (РМНК) [114, 137]. Если параметры объекта медленно меняются во времени, вводится функция экспоненциального "забывания" прошлых отсчетов. Для упрощения рекурсии РМНК (0.0.29), (0.0.30), (0.0.31) разработаны варанты алгоритмов, среди которых отметим проекционный алгоритм С. Качмажа:
$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} - \frac{\varphi[N]}{\varphi[N]^\top \varphi[N]} \left(\check{y}[N] - \varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1}\right)$$
и его варианты с параметрами $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in (0, 2)$:
$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} - \beta \frac{\varphi[N]}{\alpha + \varphi[N]^\top \varphi[N]} \left(\check{y}[N] - \varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1}\right).$$
К этому же классу проекционных относятся алгоритмы типа "стохастической аппрок-

симации" (TCA) [114, 5.7.3], например, следующий:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} - P(N)\varphi[N]\left(\check{y}[N] - \varphi[N]^\top \hat{\theta}_{N-1}\right),$$

$$\text{где} \qquad P(N) = \left(\sum_{k=1}^{N} \varphi[k]^\top \varphi[k]\right)^{-1},$$

и другие алгоритмы. Наша цель не разбирать их подробно, а подчеркнуть их идейную связь с задачей, рассмотренной А. Н. Колмогоровым (0.0.24), (0.0.25).

Применение описанных выше "прямых" вариантов МНК к динамическим моделям приводит к следующим постановкам задач идентификации. Такие постановки широко распространены в литературе (цитировано выше). Модель описывается уравнением

$$A(s)y[k] = B(s)x[k],$$

где s есть оператор "сдвига вперед" ($sy[k] \doteq y[k+1]$), а $A(s)$, $B(s)$ суть многочлены заданных порядков p, q:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^p + a_{p-1}s^{p-1} + \ldots + a_0, \\ B(s) &= b_{q-1}s^{q-1} + b_{q-2}s^{q-2} + \ldots + b_0. \end{aligned}$$

Вводится вектор параметров $\theta \doteq (a_0; \ldots; a_{p-1}; b_0; \ldots; b_{q-1})$ и вектор регрессии

$$\varphi[k-1] \doteq (-y[k-p]; \ldots; -y[k-1]; x[k-p]; \ldots; x[k-p+q-1]).$$

Ввиду того, что регрессия осуществляется на те же переменные y в прошлые моменты времени, модель называется *моделью авторегрессии*,

$$y[k] = \varphi[k-1]^\top \theta.$$

Из известной теоремы Гаусса—Маркова (см., например, [140, гл.1]) следует, что получаемые таким образом оценки МНК асимптотически оптимальны на классе несмещенных оценок в среднеквадратическом смысле, если предположить наличие возмущений с нулевым средним $e[k] \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$ в невязке уравнения:

$$A(s)\check{y}[k] = B(s)\check{x}[k] + e[k]. \tag{0.0.32}$$

Поэтому такой метод получения оценок параметров называется еще методом *по невязке уравнения* (заметим, что на классе смещенных оценок существуют нелинейные оценки типа Стейна—Джеймса, равномерно лучшие оценок несмещенных [18]). Если предположить наличие возмущений в переменной $\check{y}$, получаем метод *по ошибке на выходе*

("output error", OE):
$$\check{y}[k] = \frac{B(s)}{A(s)}\check{x}[k] + e[k]. \tag{0.0.33}$$
Чтобы придать смысл дроби в правой части последнего уравнения, предполагается, что модельный сигнал $y[k] = \check{y}[k] - e[k]$ подчинен уравнению

$$\begin{aligned} y[k] \quad &+ \quad a_{p-1}y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-p] = \\ &= \quad b_{q-1}\check{x}[k-p+q-1] + \ldots + b_0\check{x}[k-p]. \end{aligned}$$

Оценка параметров вычисляется по минимуму целевой функции

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \left(\check{y}[k] - y[k]\right)^2$$

посредством рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= \hat{\theta}_{N-1} + P(N)\varphi[N-1]\varepsilon[N], \qquad (0.0.34)\\ \varphi[N-1] &= \left(-y[N-p];\ldots;-y[N-1];\check{x}[N-p];\ldots;\check{x}[N-p+q-1]\right), \\ \varepsilon[N] &= \check{y}[N] - \varphi[N-1]^\top\hat{\theta}_{N-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что начальные условия $y[1],\ldots,y[p]$ этими соотношениями не определяются. Если относительная амплитуда шума $\varepsilon[k]$ мала, то можно положить начальные условия равными измерениям $\check{y}[1],\ldots,\check{y}[p]$. Для больших значений шума $\varepsilon[k]$ влияние ошибки задания начальных условий уменьшается с ростом N при условии устойчивости многочлена $A(s)$. Необходимые значения N составляют несколько характерных времен самой медленной моды собственных однородных движений модели, т. е.

$$N \gg \frac{1}{-\ln|s|_{\max}}, \qquad |s|_{\max} \doteq \max\left\{|s|:\ A(s)=0\right\} < 1. \tag{0.0.35}$$

Оценки МНК параметров, получаемые по моделям (0.0.32), (0.0.33), оказываются смещенными, если ошибки в разные моменты времени коррелированы: $\mathbf{M}\, e[i]e[j] \neq 0$. Причиной смещения является ненулевое мат. ожидание $\mathbf{M}\,\varphi^\top[i]\varepsilon[i] \neq 0$. Для устранения смещения в модель вводятся дополнительные параметры, описывающие корреляцию ошибок:
$$A(s)y[k] = B(s)x[k] + C(s)e[k]. \tag{0.0.36}$$
Для построения регрессии в этом случае требуются упрощающие предположения. А именно, вводится ошибка прогноза

$$\begin{aligned} \varepsilon[k] =&\check{y}[N] - \varphi[N-1]^\top\hat{\theta}_{N-1}, \qquad (0.0.37)\\ \text{где} \qquad \theta \doteq &\left(a_0;\ldots;a_{p-1};b_0;\ldots;b_{q-1}\right), \\ \varphi[k-1] \doteq &\left(-y[k-p];\ldots;-y[k-1];x[k-p];\ldots;x[k-p+q-1]\right). \end{aligned}$$

Недоступные измерению переменные $e[k]$ заменяются ошибками прогноза, т. е. модель приближенно описывается уравнением

$$\check{y}[k] = \varphi[k-1]^\top \theta + \varepsilon[k], \tag{0.0.38}$$

к которому может быть применена стандартная схема МНК. Этот подход называют *расширенным* методом наименьших квадратов (Extended Least Squares, ELS) [137, гл. 2]. Отличие от рекурсии МНК (0.0.28), (0.0.29) состоит в замене наблюдений $\varphi[N]$ на $\varphi[N-1]$. Другой вариант метода получается переопределением способа вычисления ошибки прогноза. Если вместо (0.0.37) использовать соотношение

$$\hat{C}(s)\varepsilon[k] = \hat{A}(s)\check{y}[k] - \hat{B}(s)\check{x}[k] \tag{0.0.39}$$

и заменить φ на $\tilde{\varphi}$, вычисляемый из уравнения $\hat{C}(s)\tilde{\varphi} = \varphi$, будет получен метод, называемый рекуррентным методом максимального правдоподобия (Recursive Maximum Likelihood, RML). Такое название, как можно увидеть из описания метода, является скорее формальным, чем отражающим его суть. Сделанные упрощения уводят этот метод от оценок максимального правдоподобия [13, 63, 105], и степень удаления от точных МП-оценок в литературе не исследована.

По той же схеме строятся оценки параметров модели (0.0.23) (см. Л. Льюнг (1987) [195]).

Идентифицируемость моделей типа рекуррентного МНК для интересующего нас случая ошибок в измерениях исследовалась многими авторами, см. Дж. Агуеро и Г. Грэхэм (2006) [131]. Условия имеют вид ограничений на порядки передаточных функций разных подсистем модели и на взаимное расположение нулей и полюсов передаточных функций подсистем.

Подчеркнем, что принципиальным ограничением для подобного рода методов рекуррентного МНК является требование управляемости модельного уравнения и большой длины интервала наблюдения (в сравнении с длительностью переходных процессов), Х.-Ф. Чен (2008) [144].

Расширенный фильтр Калмана. Алгоритм РМНК (0.0.29), (0.0.30), (0.0.31) может быть интерпретирован [137, с. 51] как фильтр Калмана для процесса

$$\begin{aligned} \theta^*_{N+1} &= \theta^*_N, \\ \check{y}[N] &= \varphi[N]^\top \theta^* + e[N]. \end{aligned} \tag{0.0.40}$$

Это наводит на мысль применить уравнения (0.0.40) для подстройки параметров фильтра Калмана. Такой метод оценки параметров называют расширенным фильтром Калмана. Исследованиям в этом направлении посвящено много работ, см. [8, 193, 246] и др. Связь одного из вариантов фильтра Калмана с задачей НКПС (STLS) обсуждалась Б. Де Муром (1993) [214]. Отмечается слабая устойчивость расширенного фильтра Калмана к ошибкам начального приближения $\hat{\theta}_1$ [206]. Это можно объяснить избыточностью расширенного фильтра. По целевой функции он равносилен вариационным методам (И. Н. Белоглазов (1983) [8]), но введение переменных состояния приводит к избыточности структуры модели.

Метод подпространств и аппроксимирующая идентификация. Многообещающим выглядит подход с определением порядка модели из данных измерений по методу подпространств (subspace identification), см. П. Ван Овершее, Б. Де Мур (1996) [259]. Модель записывается в нормальной форме 1-го порядка $Ax[k+1] = x[k] + Bu[k]$, $y[k] = Cx[k] + Du[k]$ и идентифицируется в два этапа: 1) строится состоятельная оценка матрицы наблюдаемости и по этой матрице определяется эмпирический порядок модели и матрицы A, C; 2) определяются методом наименьших квадратов матрицы B, D. При таком подходе модель изначально имеет аппроксимирующий характер. Вопросы построения аппроксимирующих динамических моделей освещены в монографии А. Антуласа (2005) [132]. Основные теоретические результаты в этой области опираются на работу В. М. Адамяна, Д. З. Арова, М. Г. Крейна (1971) [1]. См. также подробное изложение вопроса в статье К. Гловера (1984) [161]. Тесная связь задачи аппроксимирующей идентификации с вариационной постановкой подчеркивалась Б. Де Муром (1993) [214], А. О. Егоршиным (2004) (кратко) [45].

Завершая краткий обзор методов идентификации линейных систем, отметим, что наиболее интересные, на наш взгляд, работы в этой области в течение двух последних десятилетий за рубежом были сделаны сотрудниками Католического университета г. Лёвена (Бельгия) — профессорами Бартом Де Муром, Джусом Вандевалле, Сабиной Ван Хуффель с коллегами и учениками (http://www.kuleuven.be/optec/people). В свою очередь, профессор Б. Де Мур начинал научную работу под руководством известнейших специалистов в области обработки данных — профессоров Т. Кайлата (Стэнфорд, США) и Л. Льюнга (Линкопенг, Швеция).

Класс систем. В работе исследуются задачи идентификации линейных динамических (разностных) система с постоянными коэффициентами. Такие объекты являются наиболее простыми представителями класса динамических систем, если определить динамические системы через условие зависимости текущего состояния системы от состояния в предыдущий момент времени и от внешнего воздействия (заметим, что другое определение динамической системы — как абстрактного отображения "вход-выход" — восходящее к аксиоматике Я. Виллемса (1989) [19], используется в работах по аксиоматической теории идентификации В. А. Русанова, А. В. Данеева, А. В. Лакеева, Ю. В. Линке (1994, 2001, 2011 и др.) [28, 29, 108]). Выбор простейших систем обусловлен желанием сосредоточиться на исследовании наилучших теоретически достижимых границ эффективности методов идентификации. С другой стороны, также можно вспомнить известное полемичное высказывание Р. Калмана (1983) [175] (хотя и не бесспорное), что общая теория начинается там, где существует линейное приближение*). Анализ линейных приближений в 3-й главе позволил получить сравнительные характеристики нелинейных орторегрессионных методов, а в 5-й главе позволил получить гарантированные оценки точности идентификации и ввести общий (не привязанный к методу) априорный количественный критерий идентифицируемости линейных разностных уравнений. Наконец, далеко не все еще изучено в линейном приближении, а без построения крепкого фундамента нет надежды на прочность здания "теории идентификации". "Much work remains to be done", как писали К. Острем и П. Эйкхофф после Пражского Симпозиума IFAC еще сорок лет назад, см. обзор Л. Льюнга (1996) [196].

Акцент в исследовании делается на случае малого числа параметров и конечных траекторий. Поэтому вне рассмотрения остаются интереснейшие области, связанные с непараметрическими моделями (В. Я. Катковник (1985) [50], С. А. Апарцин (1999) [6] и др.) и частотными методами (А. Г. Александров, Ю. Ф. Орлов (2005) [4,95], Ю. Ф. Орлов (2006) [95] и др.). Мы отдаем себе отчет, что при таком выборе объекта исследования мы оказываемся на противоположном полюсе "планеты Идентификация" по сравнению с работами, в которых основные усилия направлены на "расширение традиционных классов моделей, используемых для описания реальных объектов" (А. В. Данеев, В. А. Русанов (1994, 2001) [28,29] и др.). Нас утешает мысль, что антиподы хотя и ходят вверх ногами и говорят на разных языках, но почва под ногами у всех одна, и небо над головой одно, хотя бы и созерцали они разные созвездия.

Аналитический аппарат. Существеннейшую роль в теории линейных систем играет аналитический аппарат алгебры многочленных и рациональных матриц. Условия управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости во многих случаях наиболее просто получаются и исследуются на языке многочленных описаний. Центральным моментом является понимание, в каком смысле многочленное описание и его преобразования соответствуют линейной системе и ее преобразованиям. Начиная с работ Х. Розенброка (1970) [237] (см. также монографии В. Воловича (1974) [268], Е. М. Смагиной (1990) [111]), переход к многочленным описаниям основывался на преобразовании Лапласа или z-преобразовании на (полу-) бесконечном интервале наблюдения, как правило, с полаганием неизвестных начальных условий процессов равными нулю. При всей простоте, такой подход налагает ограничение на пространство, в котором определяются процессы (траектории) исследуемой системы. Условием корректности перехода к многочленным описаниям здесь является наличие измерений траекторий длиной много больше характерного времени переходного процесса системы, чтобы ослабить влияние неизвестных начальных условий (Л. Льюнг (1987) [195], Х.-Ф. Чен (2008) [144]).

Спустя десятилетие после работ Х. Розенброка был развит альтернативный подход к построению многочленных описаний — без использования преобразования Лапласа или

*) Под это "определение" общей теории не подпадают, например, методы теории графов и много других разделов теории дискретной оптимизации, того, что за рубежом принято называть "computer science".

его дискретных аналогов. Этот подход для дискретных систем был связан с введением формального символа сдвига s в пространстве бесконечных или полубесконечных числовых последовательностей, моделирующих сигналы входа и выхода исследуемой системы, см. Х. Бломберг и Р. Илинен (1983), Я. Виллемс (1989) [19, 141]. Вместо интегрального преобразования соответствие устанавливалось формальной заменой символа. Такой способ можно охарактеризовать как переход от пространства траекторий (процессов) линейной системы к соответствующим им нулевым функционалам в сопряженном пространстве [118]. При этом подходе выделялись естественные дуальные понятия *поведения* и *описания* системы — как множеств всех траекторий (процессов) системы и как множество всех равносильных (в том числе многочленных) описаний в сопряженном пространстве для данного поведения. За рубежом Я. Виллемсом (1989) [19] был введен термин *behavioural approach* — исследование и построение описаний систем исходя из предъявленного поведения.

В обоих способах перехода к многочленным описаниям (Х. Розенброка и Х. Бломберга) существенным условием является актуальная бесконечность траектории (процесса) системы, поэтому для исследования систем на конечных интервалах наблюдения этих двух подходов недостаточно.

Условия идентифицируемости. Условиям параметрической идентифицируемости посвящено много работ, см., например, обзор В. Нгуена, Э. Вуда (1982) [216], монографию Э. Уолтера (1982) [263]. Эти условия разделяются на два основных вида: 1) полноты наблюдений [100, 244]; 2) идентифицируемости по наилучшим (полным) наблюдениям. Первые иногда называют собственно условиями идентифицируемости, а вторые — условиями различимости (distinguishability), см. С. Важда, Х. Рабиц (1988, 1994) [251, 254]. Заметим, что условия различимости принципиально не зависят ни от способа наблюдений, ни от алгоритма или метода идентификации, а зависят только от вида параметризации и структуры системы. В отечественной литературе первыми, кто подчеркнул важность формулирования условий идентифицируемости безотносительно конкретного метода или алгоритма, были А. В. Данеев и В. А. Русанов (1994) [28]; см. также две статьи автора диссертации (1994) [67, 198]. В работе 2001 г. [29] А. В. Данеев и В. А. Русанов исследовали вопросы идентифицируемости нестационарных динамических систем в нормальной форме 1-го порядка в бесконечномерном банаховом пространстве. Особняком стоит очень интересная статья А. В. Гнедина и А. А. Яралова (1988) [25], в которой исследовались структурные аспекты различимости для стационарных систем в нормальной форме 1-го порядка.

В системах из одного уравнения содержательным является только условие полноты наблюдений, а условие различимости, как правило, выглядит тривиально. В системах из нескольких уравнений (например, описывающих обратные связи или линейные ограничения на вид процессов) на первое место по сложности выходят условия различимости. Чтобы получить условия различимости, используется метод равносильных преобразований, впервые примененный К. Гловером и Я. Виллемсом (1974) для исследования идентифицируемости систем в нормальной форме 1-го порядка [160]. Этот метод систематически использовал Э. Уолтер (1982) [263]. С. Важда и Х. Рабиц (1989) [252, 253] предложили для него название "подход на основе изоморфизма состояний" (state isomorphism approach) или "подход на основе преобразования подобия" (similarity transformation approach), применяя его в том числе и для нелинейных систем. Мы придерживаемся более общего названия "метод равносильных преобразований", ввиду того, что варианты, предложенные С. Важдой, относятся к равносильным преобразованиям линейных или линеаризованных систем только в нормальной форме 1-го порядка.

Суть метода равносильных преобразований состоит в нахождении простой группы преобразований $\psi \in \Psi$, которыми можно было бы связать все равносильные системы исследуемого параметрического семейства $\{S_\theta, \theta \in \Theta\}$. Другими словами, наличие группы Ψ означает, что если (и только если) две системы равносильны: $S_\xi \sim S_\theta$ — то всегда найдется преобразование $\psi = \psi(\xi, \theta) \in \Psi$, которое их связывает: $S_\xi = \psi S_\theta$. При таком подходе условие идентифицируемости (различимости) приобретает вид:

$$\exists\, \psi \in \Psi \quad S_\xi = \psi S_\theta \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta.$$

Для систем в нормальной форме 1-го порядка

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \\ y[k] = Cx[k], \end{cases} \qquad k \in \overline{1, N}$$

метод равносильных преобразований приводит к следующему условию идентифицируемости:

$$\left(A_\xi = PA_\theta P^{-1}, \quad B_\xi = PB_\theta, \quad C_\xi = C_\theta P^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta.$$

Результаты исследования следствий этого условия для разных видов зависимости матриц от параметра θ и разных системных структур отражены в монографии Э. Уолтера (1982) [263]; новые результаты получены Т. В. Авдеенко (2001) [2]. На этом пути в ряде частных случаев удается получить конструктивные условия идентифицируемости в виде ограничений на ранги специальных подматриц.

Для стохастических систем вида

$$\check{y}[k] = \frac{B(s)}{A(s)}\check{x}[k] + e[k],$$

где $A(s)$, $B(s)$ — матричные многочлены с определителем ненулевой степени, $e[k]$ — случайные возмущения, s — символ сдвига, Б. Г. Ворчик (1985) [22] получил условие идентифицируемости в виде

$$(A_\xi(s), B_\xi(s)) = \psi(s)\,(A_\theta(s), B_\theta(s)) \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta, \tag{0.0.41}$$

где $\psi(s)$ — многочленная матрица. Условие Б. Г. Ворчика (0.0.41) из-за наличия многочленных матриц, вообще говоря, неконструктивно в том смысле, что его разрешимость не может быть проверена полиномиальным алгоритмом. Поэтому оно обычно используется для матриц небольшой размерности.

Для систем, описываемых линейными алгебраическими уравнениями $G_\theta z = 0$ условия идентифицируемости принимают вид

$$G_\xi = PG_\theta \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta.$$

Если системы динамические, то нужно учесть клеточную теплицевость матрицы G_θ. Для этого случая новые конструктивные результаты по условиям идентифицируемости, наиболее близкие к необходимым и достаточным, были получены автором диссертации (глава 2).

Задачи исследования

Рассматривая общую картину развития методов идентификации, можно обнаружить много белых пятен и плохо прорисованных областей, даже в случае простейших линейных динамических систем. Как и в любой другой области научного исследования, углубление нередко приводит к появлению новых горизонтов и новых перспектив, подобно картинам фракталов, которые можно увеличивать до бесконечности, не добираясь до конечной простоты. Перечислим основные задачи, известные из литературы и впервые решаемые в диссертации:

* Корректное обоснование перехода к многочленным описаниям линейной динамической системы в пространствах траекторий конечной длины.

* Отказ от условий устойчивости и управляемости, которые теряют актуальность при конечных длинах наблюдаемых процессов (траекторий входа и выхода). Обоснование всех теоретических результатов без условий устойчивости и управляемости.

* Исследование условий идентифицируемости параметров многомерных детерминированных линейных динамических систем с целью получить конструктивные условия в виде ограничений на ранги.

* Исследование условий идентифицируемости параметров многомерных линейных динамических систем со стохастическими возмущениями разного типа; рассмотрение этих систем с общих позиций; получение в ряде содержательных частных случаев конструктивных условий идентифицируемости в виде ограничений на ранги.

* Получение условий состоятельности вариационных оценок параметров по измерениям конечных отрезков траекторий (процессов) с аддитивными возмущениями.

* Исследование статистических свойств состоятельных (вариационных) оценок параметров линейных систем по измерениям траекторий конечной длины; вычисление информационных матриц, характеризующих наилучшие достижимые границы асимптотической эффективности оценок; поиск распределений наблюдений, для которых вариационные методы являются асимптотически эффективными.

* Получение гарантированных границ чувствительности оценок параметров к возмущениям при конечном числе наблюдений.

* Построение новых априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем, на основе полученных констант чувствительности вариационных оценок к возмущениям.

* Применение вариационных методов идентификации к задачам анализа временных рядов с трендами; получение условий идентифицируемости как слагаемых процессов ряда и тренда, так и параметров описывающих их динамических уравнений.

Общая характеристика и основные результаты диссертации

Научная новизна диссертационного исследования определяется следующими результатами, полученными автором:

1. Впервые предложен и теоретически обоснован способ корректного построения многочленных матричных описаний линейных стационарных систем с траекториями конечной длины; этот результат позволил применить аналитическую технику теории многочленных матриц для исследования свойств систем с конечными траекториями и получить большое число новых результатов диссертации.

2. Получены достаточные конструктивные условия идентифицируемости (различимости) параметров многомерных линейных динамических систем в виде ограничений на ранги подматриц, из известных в литературе наиболее близкие к необходимым. Получены общие условия идентифицируемости параметров многомерных линейных динамических систем со стохастическими возмущениями разного типа; на основе анализа сложности условий идентифицируемости предложена новая классификация стохастических динамических систем, отличающаяся от известной классификации Л. Льюнга;

3. Определен новый класс многомерных вариационных оценок параметров (введением целевых функций с ядрами в виде суммы проекторов), включающий в себя все основные типы орторегрессионных оценок, встречающиеся в литературе; впервые доказана состоятельность для всего класса вариационных оценок, исследованы

асимптотические статистические свойства; впервые вычислены информационные матрицы для вариационной постановки задачи идентификации и описаны условия, при которых вариационные методы (ВМ, GTLS, STLS) являются асимптотически эффективными.

4. Предложен новый общий подход к сравнению оценок, основанный на линеаризации целевой функции и понятии линейного приближения оценки в случае малых амплитуд возмущений; на основании этого подхода показано, что оценки вариационного метода (ВМ, GTLS, STLS) при малых возмущениях обладают наименьшей дисперсией среди всех орторегрессионных оценок.

5. Исследована устойчивость вариационных оценок к возмущениям при конечном числе наблюдений; получены оценки устойчивости, наилучшие в пределе малых возмущений; на этой основе предложены новые способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем, в частности, решена проблема К. Ланцоша (1956) анализа устойчивости в задаче идентификации показателей экспонент.

6. На основе вариационного подхода предложено решение проблемы И. И. Перельмана (1981) большого числа локальных экстремумов при идентификации параметров динамической системы по измерениям траекторий конечной длины; показано, что всегда существуют равносильные по состоятельности вариационные постановки задач идентификации, при которых число локальных экстремумов целевых функций не превосходит размерности вектора идентифицируемых параметров.

7. Введено новое понятие суммарной (дизъюнктивной) системы; описаны способы построения и свойства суммарных систем; показано, что такие системы естественным образом возникают при вариационном подходе к задачам анализа временных рядов с трендами, а также при вариационной идентификации линейных систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий; впервые получены условия совместной идентифицируемости процессов (траекторий) и параметров уравнений рядов и уравнений трендов по наблюдениям суммарных процессов.

Основные результаты диссертации докладывались на научных конфренциях и семинарах: Семинар лаборатории № 7 им. Я. З. Цыпкина «Адаптивные и робастные системы управления» Института проблем управления РАН (рук. д. т. н. Б.Т. Поляк); семинары Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН: Общеинститутский математический семинар (рук. акад. Ю. Г. Решетняк), семинар «Математика в приложениях» (рук. акад. С. К. Годунов), семинар «Избранные вопросы математического анализа» (рук. д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко); 2-я Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2010); Международная конференция «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии» (Улан-Удэ, 2009); Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO (Москва, 2000, 2004, 2006, 2009); Конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2007); Международная конференция «А. Н. Тихонов и современная математика» (Москва, 2006); Международная конференция по проблемам управления МКПУ III (Москва, 2006); Международная конференция IASTED по автоматизации, управлению и информационным технологиям ACIT'02 (Новосибирск, 2002); Международная конференция «Математика в приложениях» (Новосибирск 1999); III Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) (Новосибирск, 1998); Сибирская конференция по прикладной и индустриальной математике памяти Л. В. Канторовича (Новосибирск, 1994); X Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Саратов, 1993); IMACS/IFAC International Workshop on Methods and Software for Automatic Control Systems (Иркутск, 1991); 5-е Всесоюзное совещание «Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии» (Новосибирск, 1989); X Совещание по проблемам управления (Алма-Ата, 1986).

Результаты диссертации опубликованы в 30 печатных работах, в том числе в 13 статьях в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов докторских диссертаций. Из совместных докладов на конференциях в диссертацию включены результаты, полученные лично автором и не нарушающие авторских прав других лиц.

Диссертация состоит из 6 глав с приложениями, введения, заключения.

В 1-й главе исследуются вопросы алгебры линейных систем с конечными траекториями. Центральную роль в теории стационарных линейных систем играет аналитический аппарат алгебры многочленных и рациональных матриц. Главным моментом является понимание, в каком смысле многочленное описание и его преобразования соответствуют линейной системе и ее преобразованиям. Начиная с работ Х. Розенброка (1970) (см. также монографии В. Воловича (1974), Е. М. Смагиной (1990)), переход к многочленным описаниям основывался на преобразовании П. Лапласа или Z-преобразовании на полубесконечном интервале наблюдения, как правило, с полаганием неизвестных начальных условий процессов равными нулю. Это налагает ограничение на пространство, в котором определяются процессы в исследуемой системе. Длина интервала наблюдения должна быть много больше характерного времени переходного процесса системы, чтобы ослабить влияние неизвестных начальных условий (Л. Льюнг (1991), Х.-Ф. Чен (2008)).

В 1980-х гг. получил развитие альтернативный подход к построению многочленных описаний. Вместо Z-преобразования для дискретных систем вводился формальный символа сдвига s в пространстве бесконечных или полубесконечных числовых последовательностей, моделирующих процессы в исследуемой системе. Возникающие при этом многочленные матрицы от символа s сопоставляются нулевым функционалам в пространстве, сопряженном к пространству траекторий (процессов) линейной системы

(Х. Бломберг, Р. Илинен (1983), Я. Виллемс (1989)).

В обоих способах перехода к многочленным описаниям (Х. Розенброка и Х. Бломберга) существенной является актуальная бесконечность времени наблюдения процессов системы. Для исследования систем с конечными длинами траекторий в 1-й главе обосновывается новый способ перехода к многочленным описаниям — через установление соответствия между группой S равносильных преобразований системы и группой левых умножений ассоциированных с системой многочленных матриц. Для описания группы S вводятся новые понятия: расширенной клеточно-теплицевой матрицы системы и множества продолжимых траекторий. Понятие продолжимой траектории позволило сопрячь полученные в диссертации результаты для конечно-траекторных систем с известными в литературе результатами для систем с актуально бесконечными интервалами наблюдения.

Результаты 1-й главы используются на протяжении всей диссертации. Они опубликованы автором в журналах "Труды института математики СО РАН" (1994) [67], "Автоматика и телемеханика" (1996) [68], "Дифференциальные уравнения" (2003) [73].

Во 2-й главе исследуется идентифицируемость параметров многомерных линейных динамических систем — сначала без возмущений, а затем со стохастическими возмущениями. Под идентифицируемостью детерминированной системы (без возмущений) понимается одноэлементность множества допустимых значений параметра при заданном множестве всех решений системы. Сначала рассматриваются вопросы так называемой структурной идентифицируемости, т. е. аспекты, связанные с влиянием расположения зависимых от векторного параметра элементов матрицы системы на однозначность восстановления параметра по многообразию решений системы. Отдельно изучаются системы нулевого порядка, используемые в эконометрике. Для них доказаны новые теоремы: 1) о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для сохранения максимального ранга матрицы системы на всем множестве значений параметров (теорема 2.2.4); 2) о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для обеспечения структурной идентифицируемости на всем множестве значений параметров (теорема 2.2.5).

Для динамических систем ($p > 0$) получены новые самые слабые из известных достаточные условия идентифицируемости в виде ограничений на ранги подматриц малой расширенной матрицы системы (теорема 2.3.1). Описан широкий класс локально-свободных параметризаций, для которых полученные в диссертации ранговые условия идентифицируемости становятся необходимыми и достаточными (теорема 2.3.2).

Отдельно исследованы системы с полином-операторными параметризациями, у которых вместо оператора сдвига s используется заданный многочлен $\varphi(s)$ от оператора сдвига. Это может быть многочлен любого из разностных аналогов дифференцирования или их степеней, например $\varphi(s) = [(s-1)/h]^p$. Впервые показано, что для таких систем сохранят силу все результаты по идентифицируемости, полученные для случая $\varphi(s) \equiv s$. Также показано, что благодаря применяемой технике доказательства все полученные в диссертации результаты по идентифицируемости без существенных изменений переносятся на системы с непрерывным временем, когда символ s понимается как оператор дифференцирования.

Далее во 2-й главе исследуется идентифицируемость линейных систем со стохастическими возмущениями различных типов. В стохастическом случае под идентифицируемостью понимается единственность восстановления параметра по заданному вероятностному распределению наблюдаемых переменных системы. Получен новый критерий идентифицируемости в виде неразрешимости матричного уравнения специального вида. Этот критерий при условии нормальности распределений становится необходимым и достаточным (теорема 2.5.1). Описаны частные случаи, при которых полученный критерий совпадает с ранговыми условиями идентифицируемости детерминированных систем. Показано, что на основании сравнения сложности условий идентифицируемости для разных частных случаев структуры возмущений можно предложить новую классификацию стохастических динамических систем, отличающуюся от известной классификации Л. Льюнга.

Результаты 2-й главы опубликованы в журналах "Siberian advances in mathematics" (1994) [198], "Известия РАН ТСУ" (2002) [72], "Дифференциальные уравнения" (2003) [73], "Сибирский журнал индустриальной математики" (2003) [74], и Трудах международных конференций CIMAF'99, CIMAF'01 (Гавана, Куба) [199, 200], SICPRO'00 (Москва) [71], IASTED'02 (Anaheim, Calgary, Zurich) [201].

В 3-й главе определяется новый класс оценок — вариационные оценки, включающий в себя как классические оценки типа ортогональной регрессии К. Пирсона, так и оценки вариационного метода А. О. Егоршина (ВИ, ВМ) и близких к нему методов GTLS, STLS. Показано, что выбором той или иной структуры матрицы ограничений в вариационных целевых функциях можно получить все основные типы орторегрессионных оценок, встречающиея в литературе. Центральным моментом при таком обобщении является рассмотрение клеточных матриц, соответствующих многомерным системам из нескольких уравнений (см., например, на с. 15 замечание о принадлежности задачи К. Пирсона к классу вариационных). Все аналитические выкладки диссертации учитывают многомерный случай. Можно сказать, что рассмотрение многомерного случая не есть прихоть, усложняющая изложение, а совершенно необходимый шаг, позволяющий с общих позиций рассмотреть все орторегрессионные методы и получить новые теоремы.

Первым теоретическим результатом 3-й главы является теорема 3.4.1 о состоятельности вариационных оценок при условии полноты наблюдений. Эта теорема, опубликованная автором диссертации в 1997 г. [70], обобщает результат о состоятельности М. Аоки и П. Ю (1970) [133] для скалярных систем из одного уравнения и Л. Глэзера (1982) [158] и У. Фуллера (1987) [154] для многомерных систем нулевого порядка. Близкое к теореме 3.4.1 утверждение о состоятельности оценок НКПС (STLS) было получено позже за рубежом в статье А. Кукуша, И. Марковского и С. Ван Хуффель (2005) [180].

Для вариационных оценок впервые получено условие полноты наблюдений, при котором идентифицируемость в смысле результатов главы 2 гарантирует состоятельность. В теореме 3.2.1 и ее следствии установлена алгебраическая связь между условием полноты при нулевых возмущениях и условием идентифицируемости (различимости) из главы 2.

Состоятельность вариационных оценок доказывается без предположений об устойчивости или управляемости идентифицируемой системы.

Вторым главным теоретическим результатом 3-ей главы является описание нового общего подхода к сравнению оценок, основанного на линеаризации целевой функции и понятии линейного приближения оценки в случае малых амплитуд возмущений. В качестве примера были построены линейные приближения для оценок ОР, ОРМ и ВМ. Для линейных приближений показано, что оценки ВМ в широком ряде случаев имеют меньшую дисперсию за счет наиболее полного использования информации о линейных связях между наблюдаемыми переменными, чем оценки ОР и ОРМ (теоремы 3.5.1, 3.5.2).

Третьим результатом главы является решение на основе вариационного подхода проблемы локальных экстремумов, поставленной И. И. Перельманом (1981) [98]. Суть проблемы в том, что при идентификации прямыми методами (см. выше) на конечных выборках наблюдений число локальных экстремумов растет вместе с длиной выборки. В диссертации показано, что при вариационной постановке задачи идентификации число локальных экстремумов целевой функции не превосходит размерности вектора идентифицируемых параметров независимо от длины выборки. Для обоснования этого результата вводится новое понятие равносильности по состоятельности: два метода получения оценок равносильны по состоятельности, если из состоятельности одного метода следует состоятельность другого и наоборот. Доказано утверждение 3.4.1 о равносильности по состоятельности разных видов орторегрессионных оценок в задаче вариационной идентификации параметров динамической системы. Как следствие, доказана возможность при исследовании существования состоятельного решения той или иной задачи идентификации наиболее сложные в вычислительном отношении вариационные целевые функции можно заменить более простыми орторегрессионными целевыми функциями. Показано, что при вариационной постановке задачи идентификации состоятельные оценки параметров могут быть получены по самой простой орторегрессионной целевой функции, число экстремумов которой не превосходит размерности вектора идентифицируемых параметров.

Результаты 3-й главы опубликованы в журналах "Известия РАН ТСУ" (1997, 2009) [70, 83], "Автоматика и телемеханика" (2005) [77], электронном журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления" (2005) [76], в Сборнике трудов Российской ассоциации математического програмирования "Оптимизация, управление, интеллект" (1997) [69], в Трудах международной конференции SICPRO'04 (Москва) [75].

В 4-й главе исследованы асимптотические распределения вариационных оценок. Впервые получены выражения для асимптотических дисперсий многомерных оценок

ВМ, ОР, ОРМ (теоремы 4.1.2, 4.1.3) параметров динамических систем порядка выше нуля (системы нулевого порядка наиболее полно были исследованы У. Фуллером (1987) [154]). Впервые вычислена информационная матрица в многомерной задаче вариационной идентификации и исследована асимптотическая эффективность оценок. Впервые показано, что оценки ВМ являются асимптотически эффективными (т. е. их дисперсия сопадает с нижней границей в информационном неравенстве Крамера—Рао) в предельном случае $(\varrho/\sigma)^2 \to \infty$, где $(\varrho/\sigma)^2$ есть отношение дисперсии распределения незашумленных процессов (траекторий) системы к дисперсии шумов наблюдений (теорема 4.4.2). Отсюда следует, что вариационный метод идентификации (типа А. О. Егоршина, GTLS или STLS) статистически оптимален в условиях наибольшей априорной неопределенности истинных процессов в идентифицируемой системе. Этот оригинальный результат позволяет по-новому, с точки зрения математической статистики, осмыслить идеи, лежащие в основе вариационных методов оценивания.

Показано, что ряд результатов из классической монографии У. Фуллера (1987) [154] получается как следствие теорем главы 4.

Результаты 4-й главы опубликованы в "Сибирском журнале индустриальной математики" (2005) [78] с публикацией перевода этой статьи издательством "Шпрингер" (2007) [202], в электронном журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления" (2005) [76], в журнале "Известия РАН ТСУ" (2009) [83], в Сборнике трудов Российской ассоциации математического програмирования "Оптимизация, управление, интеллект" (1997) [69].

В 5-й главе исследуется устойчивость вариационных оценок к малым возмущениям при конечном числе наблюдений. Оценки рассматриваются как неявные функции наблюдений, определяемые из условия равенства нулю градиента целевой функции. Вычислены производные функций оценок ОР, ОРМ и ВМ по наблюдениям и впервые построены матрицы чувствительности, которые описывают эллипсоиды разброса оценок при возмущениях в наблюдениях из малого шара с центром в истинной точке (теорема 5.1.1). Вычислено разложение неявной функции оценки ВМ (наиболее сложной из всех орторегрессионных оценок) в ряд Тейлора до квадратичного слагаемого по малым возмущениям в наблюдениях траекторий. Впервые получена оценка сверху для остаточного члена формулы Тейлора (теорема 5.1.2). Как следствие, впервые даны гарантированные априорные оценки сверху для ошибок идентификации коэффициентов линейных обыкновенных разностных уравнений (следствие теоремы 5.1.2).

Для установления связи полученных показателей локальной устойчивости с асимптотическими свойствами оценок были вычислены значения матриц дисперсий оценок ВМ, ОР, ОРМ в пределе малых возмущений (теорема 4.3.1). Показано, что предельные значения матриц дисперсий совпадают с обратными матрицами чувствительности (теорема 5.2.1). На основании матриц чувствительности вариационных оценок предложены новые способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости коэффициентов матричных линейных разностных уравнений.

Применение новых априорных показателей идентифицируемости демонстрируется на примере К. Ланцоша (1956) [184] задачи восстановления показателей экспонент (раздел 5.3). К. Ланцошом было обнаружено, что при наличии ошибок округления в третьем разряде измерений суммы трех затухающих экспонент (относительная погрешность около 0.3%) по измерениям 24 точек невозможно восстановить ни число экспонент, ни значения их показателей. Расчет априорных показателей идентифицируемости предлагаемым в диссертации методом в примере К. Ланцоша дает теоретическое подтверждение этого отрицательного результата; для восстановления экспонент оказывается необходимым уровень погрешности измерений не выше 0.01% (округление в пятом разряде).

Результаты 5-й главы опубликованы в журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления" (2005) [76] (частично), в Трудах международной конференции SICPRO'09 (Москва) [84], в Трудах международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии» (Улан-Удэ, 2009) [85].

В 6-й главе исследуются суммарные (дизъюнктивные) системы. Суммарной системой называется система, многообразие решений которой является суммой многообразий решений двух других линейных систем. Понятие суммарной системы вводится впервые. Показано, что такого рода системы естественным образом возникают при вариационном подходе к задачам анализа временных рядов с трендами, а также при вариационной идентификации линейных систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий. Такими детерминированными составляющими могут быть решения другой линейной системы, как с известными параметрами, так и с параметрами, подлежащими идентификации наряду с параметрами основной системы.

Описаны способы построения суммарных систем (теорема 6.1.2). Получены условия нулевого пересечения слагаемых многообразий динамических порцессов в терминах уравнений этих многообразий; по сути это условия идентифицируемости слагаемых процессов по наблюдениям сумм (теорема 6.1.3). Получены формулы идентификации слагаемых процессов по измерениям сумм с аддитивными возмущениями (теоремы 6.2.1, 6.2.2 и следствие). В ряде содержательных случаев получены необходимые и достаточные критерии идентифицируемости как параметров суммарной системы, так и параметров слагаемых по наблюдениям сумм с аддитивными возмущениями (теоремы 6.3.1, 6.3.2). Получен критерий управляемости суммарных систем (теоремы 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6). Показано, что в большинстве практических случаев суммарные системы неуправляемы. Это накладывает ограничение на классы методов, которые применимы для идентификации параметров суммарных систем; вариационные методы не требуют условия управляемости и поэтому могут быть применены.

Результаты 6-й главы опубликованы в журналах "Автоматика и телемеханика" (2008) [81, 82], "Известия РАН ТСУ" (2009) [83], "Сибирский журнал индустриальной математики" (2010) [86], в электронном журнале "Дифференциальные уравнения и процессы управления" (2005) [76], в Трудах международной конференции SICPRO'06 (Москва) [79].

В приложениях ко главам приведены вспомогательные утверждения, доказательства теорем и примеры расчетов. Ряд основных теоретических результатов диссертации подтверждаются расчетами, приводятся тексты программ на языке открытой вычислительной среды Scilab [5].

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в журналах

1. *Lomov A. A.* Correct Parametrizations of Linear Models // Siberian Adv. in Math. 1994. V. 4. P. 95-113.

2. *Ломов А. А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Т. 28, Модели и методы оптимизации. С. 91-117. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.

3. *Ломов А. А.* О предельном значении передаточной функции матричного линейного дифференциального уравнения на бесконечности // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 25-30.

4. *Ломов А. А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН ТСУ. 1997. № 3. С. 20-26.

5. *Ломов А. А.* Параметрическая идентифицируемость линейных стохастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Известия РАН ТСУ. 2002. № 2. С. 53-58.

6. *Ломов А. А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 261-266.

7. *Ломов А. А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60-66.

8. *Ломов А. А.* Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // [Электронный ресурс]: Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. 2. С. 1-86: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/j/pdf/lomov.pdf

9. *Ломов А. А.* Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 39-47.

10. *Ломов А. А.* Орторегрессионные оценки параметров систем линейных разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 3(23). С. 102-119.

11. *Ломов А. А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 29-36.

12. *Ломов А. А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами (II) // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 82-93.

13. *Ломов А. А.* Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // Известия РАН ТСУ. 2009. № 1. С. 25-37.

14. *Ломов А. А.* Управляемость суммарных линейных систем // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII. № 2(42). С. 79-84.

15. *Ломов А.А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестник НГУ (Серия: математика, механика, информатика). 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81-103.

16. *Ломов А.А.* О количественных априорных показателях идентифицируемости коэффициентов линейных динамических систем // Известия РАН ТСУ. 2011. № 1. С. 3-15.

Статьи в трудах конференций

1. *Egorshin A.O., Lomov A.A.* Variational Identification and filtration via fast algorithms // Proc. 8-th IFAC/ IFORS Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Beijing, China, 1988. Pergamon Press, 1988. V. 2. P. 665-671.

2. *Касьянова С.Н., Ломов А.А.* Программный комплекс моделирования и идентификации линейных динамических систем на основе вариационного метода // Сб. «Динамика управляемых космических объектов», Красноярск, Вычислительный центр, 1990. С. 113-121.

3. *Ломов А.А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Сборник трудов Всероссийской научной школы «Компьютерная логика, алгебра и интеллектное управление». Т. 3. Иркутск, 1994. С. 19-35.

4. *Ломов А.А.* Статистические свойства орторегрессионных методов оценивания параметров и решений систем линейных разностных уравнений // Оптимизация.

Управление. Интеллект: Тр. Российской ассоциации математического программирования. Иркутск, 1997. №2. С. 40-51.

5. *Ломов А.А.* Ранговые условия идентифицируемости стохастических линейных систем // 11-я Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 1998. Сборник трудов. Т. 3. С. 112-115.

6. *Lomov A.A.* Identifiability of ARMAX systems with short operating records // Proc. II Symp. Automat. Control (CIMAF'99). La Habana, 1999. P. 207-221.

7. *Ломов А.А.* Параметрическая идентифицируемость линейных стохастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Труды Междунар. конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'2000. М.: ИПУ РАН, 2000. С. 1244-1251.

8. *Ломов А.А.* Об априорном анализе сложности алгоритмов идентификации линейных систем // «Методы оптимизации и их приложения», Труды 12-й Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. Т. 5. С. 101-106.

9. *Lomov A.A.* Stochastic Linear Systems Classification Based on Complexity of Identifiability Conditions // La Habana, III Symposio de Control Automatico, 2001. P. 257-265.

10. *Lomov A.A.* Identifiability of Time-Invariant Linear Models by Transient Signal Observations // Proceedings of the IASTED International Conference on Automation, Control, and Information Technology. Anaheim, Calgary, Zurich. Acta Press, 2002. P. 507-512.

11. *Ломов А.А.* О статистических свойствах оценок параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Труды III Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'04. М.: ИПУ РАН, 2004. С. 209-224.

12. *Ломов А.А.* Задача отделения трендов в линейных системах // Труды V Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'06. М.: ИПУ РАН, 2006. С. 1980-2009.

13. *Ломов А. А.* О количественном априорном показателе идентифицируемости параметров линейной системы // Труды VIII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 479-491.

14. *Ломов А. А.* Априорные оценки погрешности идентификации коэффициентов линейных ОРУ // Материалы Международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии». Улан-Удэ, 24-28 августа 2009 г. С. 236-242.

Тезисы докладов на конференциях

1. *Ломов А.А.* Конструктивные условия идентифицируемости линейных параметрических моделей // Тезисы доклада. IX-я Всесоюзн. конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Волгоград, 1990.

2. *Lomov A.A.* The program of variational identification and filtration using fast algorithms // Abstracts. IMACS/IFAC InternationalWorkshop on Methodsand Software for Automatic Control Systems, Irkutsk, USSR, Sept. 3-5, 1991.

3. *Ломов А.А.* Конструктивные условия идентифицируемости линейных динамических систем // Тезисы доклада. X-я Междунар. конференция «Проблемы теоретической кибернетики», Саратов, 1993.

4. *Ломов А.А.* Анализ линейных систем управления на основе специальных форм матриц // Сибирская конф. по прикладной и индустриальной математике памяти Л.В. Канторовича, Новосибирск, 1994. С. 55-57.

5. *Ломов А.А.* Статистические свойства орторегрессионных методов оценивания параметров и решений систем линейных разностных уравнений // 10-я Байкальская школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 1995.

6. *Ломов А.А.* Стохастические линейные модели с различными типами возмущений имеют единые условия идентифицируемости // III-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), Новосибирск, 1998. Секция «Обработка информации и управление техническими объектами».

7. *Lomov A.A.* On equivalence transformations of linear systems in connection with the identifiability problem // International Conference «Mathematics in Applications». 1999. Novosibirsk, Russia. Abstracts. P. 100-101.

8. *Ломов А.А.* Оценки параметров в линейных системах с аддитивными трендами // Тезисы III Международной конференции по проблемам управления. Россия, Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 20–22 июня 2006. Т. 1. С. 98.

9. *Ломов А.А.* Обратные задачи для линейных систем // Международная конференция «А. Н. Тихонов и современная математика», Москва, 19-25 июня 2006, секция 4. С. 118.

10. *Ломов А.А.* Суммарные линейные системы в анализе временных рядов // Конференция «Математика в современном мире», Новосибирск, 17-23 сентября 2007 г. Тезисы докладов. С. 175.

11. *Lomov A.A.* Terms of uniqueness in the inverse problems for disjunctive dynamical systems // 2nd International School-Seminar «Nonlinear Analysis and Extremal Problems». Irkutsk, June 28 - July 4, 2010.

Глава 1

Вопросы алгебры линейных систем

В 1-й главе исследуются вопросы алгебры линейных систем с конечными траекториями. Главной целью является корректное обоснование перехода к многочленному описанию для линейной стационарной динамической системы с конечными траекториями. Для этого вводится новое понятие расширенной клеточно-теплицевой (РКТ-) матрицы, устанавливается равносильность с точки зрения многообразия решений между системами уравнений с РКТ-матрицами заданной структуры и системами линейных разностных уравнений в нормальной форме 1-го порядка. Тем самым показывается, что линейным стационарным системам с траекториями конечной длины соответствуют линейные уравнения с РКТ-матрицами и наоборот, правое нуль-пространство РКТ-матрицы является многообразием решений некоторой линейной стационарной динамической системы (теорема 1.3.1). Исследуются классы равносильных преобразований РКТ-систем, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между группой левых умножений РКТ-матрицы на невырожденные матрицы, сохраняющих РКТ-структуру, и группой левых умножений ассоциированной многочленной матрицы на квадратные многочленные матрицы. Тем самым, устанавливается новый способ перехода к многочленным описаниям стационарных систем: а) без использования преобразования Лапласа и б) на конечных интервалах наблюдения.

При таком подходе системные переменные не разделяются на входные и выходные, а свойства причинности записываются в виде условия минимальности многочленной матрицы описания системы в терминах линейной независимости строк. Тогда матрица содержит неособенную подматрицу наибольшего размера, и каждой такой подматрице ставятся естественным образом в соответствие переменные, которые могут интерпретироваться как выходные.

В первой главе устанавливается новое представление группы равносильных преобразований системы как группы левых умножений малой расширенной матрицы системы на неособенные матрицы (теорема 1.5.1). Этот результат является ключевым для получения новых конструктивных условий идентифицируемости во 2-й главе.

Вводится новое понятие продолжимых стационарных решений (траекторий) системы и на этом основании впервые определяется слабая равносильность систем как равносильность с точки зрения многообразия продолжимых решений. Отмечено, что только продолжимые решения имеют физический смысл. С точки зрения слабой равносильности оказалось возможным не различать системы с расширенными клеточно-теплицевыми матрицами и системы с "обычными" клеточно-теплицевыми матрицами, которые повсеместно встречаются в литературе. Тем самым, новое понятие слабой равносильности позволяет установить связь между развиваемой в диссертации аналитической техникой работы с конечно-траекторными системами и техникой работы с системами с актульно бесконечными интервалами наблюдения, широко представленной в современной литературе.

Результаты 1-й главы используются на протяжении всей диссертации.

1.1 Основные определения

Используемая нами система понятий следует работе Я. Виллемса (1989) [19], в той ее части, где говорится об отказе от описания динамических систем через соотношения "вход-выход" и определении системы через множество ее траекторий ("поведение"). Отличия наших определений от подхода Я. Виллемса, тем не менее, являются существенными. Первое, понятие системы мы уточняем, разделяя "объект" (явление, феномен), представленный набором измерений, и его математическую "модель". Поэтому вместо словосочетания "динамические системы" мы употребляем "динамические модели"; что, на наш взгляд, лучше отражает субъективность, заложенную в математические описания реальных объектов (по этому поводу см. статью Р. Калмана (1985) [48]). Сами объекты мы определяем, как и Я. Виллемс [19], через их "поведение" — наборы траекторий (процессов) из $\mathbb{R}^l$. Но объекты моделирования в общем случае мы не называем динамическими системами. Определение "динамической системы" из работы Я. Виллемса имеет следующий вид [19, с. 10]:

Определение. (Я. Виллемс) *Динамической системой* называется тройка $\Sigma \doteq \{T, W, \mathcal{B}\}$, в которой $T \subset \mathbb{R}$ — *множество моментов времени*, W — *алфавит сигналов* и $\mathcal{B} \subset W^T$ — *поведение* системы.

Это определение в *конечномерном* случае относит к "поведению динамических систем" *произвольные* точки и подмножества в $\mathbb{R}^l$: в наших обозначениях $T = \overline{1, N}$, $W = \mathbb{R}^{r+m}$, $\mathcal{B} \subset W^T = \mathbb{R}^{(r+m)N} \doteq \mathbb{R}^l$. Поэтому в конечномерном случае такое определение не содержательно. В *бесконечномерном* случае определение Я. Виллемса становится содержательным, когда он наделяет "динамические системы" свойством *полноты* (в нашем конечномерном случае это *продолжимость*, см. раздел 1.4.1) и показывает, что полнота и линейность динамической системы равносильна замкнутости линейного подпространства $\mathcal{B}$ в топологии поточечной сходимости [19, с. 23]. При этом "неполные" системы Я. Виллемс тоже называет динамическими, хотя и не считает их заслуживающими внимания с точки зрения теории систем. На наш взгляд, при таком определении недостаточно ясно отделяются понятия "объект" и "динамическая модель".

Заметим, что определение Я. Виллемса отличается от традиции, принятой в отечественной литературе. Согласно Математической энциклопедии*), ”в наиболее широком смысле под динамической системой понимают произвольное действие (полу-)группы $\mathcal{G}$ на некотором множестве W, именуемом фазовым пространством”. Приводимое в диссертации определение 1.1.1 динамической системы является частным случаем этого общего понятия: а именно, согласно определению 1.1.1, *динамические модели* в $\mathbb{R}^l$ — это специальный класс линейных подпространств, допускающий описания в виде системы уравнений 1-го порядка (1.1.2). В диссертации показано, что такое определение динамической системы равносильно условию *существования РКТ-описаний без переменных состояния* (раздел 1.3) или условию *продолжимости траекторий* (*процессов*) (раздел 1.4.1).

Одним из существенных достоинств подхода, предложенного Я. Виллемсом, является предложенный им изящный способ отказа от вход-выходных соотношений при определении динамической системы (посредством наложения условий линейности и полноты [19, с. 23]). Но, на наш взгляд, полностью отказаться от причинно-следственных взаимоотношений (”вход” — причина, ”выход” — следствие) при определении динамической системы не представляется возможным. Само слово ”динамика” (греч. $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ — сила) предполагает наличие *причины* движения, (как смены состояния в фазовом пространстве), и такая причинность задает *направление* причинно-следственных отношений, направление времени, направление действия группы. Поэтому вход-выходные отношения могут быть скрыты тем или иным способом, но, по нашему мнению, всегда должны лежать *в основе* определения динамической системы. В диссертации динамические системы (точнее, модели) определяются через системы уравнений 1-го порядка с выделенными входными и выходными переменными; и только после этого осуществляется переход к другим равносильным определениям без использования понятий ”входа” и ”выхода” (через РКТ-матрицы или продолжимость траекторий).

Мы намеренно уклоняемся от рассмотрения бесконечных интервалов наблюдения $T = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$, составляющих предмет исследования для Я. Виллемса (см. его замечание [19, с. 10]). Выше во введении была кратко описана традиционная парадигма рассмотрения задач идентификации, которая берет начало от классических работ А. Н. Колмогорова [54] и Н. Винера [265]. Эта парадигма *необходимо* приводит к случаю $T = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$. Ввиду избрания другого подхода при рассмотрении задач идентификации (см. введение), мы свободны от необходимости допущения бесконечных интервалов наблюдения. Создание аналитической техники, позволившей перенести основные алгебраические методы исследования динамических систем с бесконечными траекториями (см., в частности, [19, приложение N]) на системы с конечными траекториями является одним из основных результатов диссертации (глава 1).

Относительно исследуемого в диссертации класса систем можно сказать, что *идеи* приводимых в диссертации теорем и доказательств лучше видны на примере простей-

*) Виноградов И. М. (ред.) Математическая энциклопедия. Том 2. М.: Сов. энциклопедия, 1977.

ших объектов — а именно, стационарных линейных динамических систем с конечными траекториями в $\mathbb{R}^l$. Также немаловажно, что конечномерный случай позволяет яснее увидеть и *трудности* исследуемой области. Например, А. О. Егоршиным было показано [43], что при $N = 3$, $p = 1$, $m = 0$, $r = 1$ задача вариационной идентификации полностью решается аналитически; в частности, удается описать все критические точки и область неединственности оценок. Однако уже для $N = 4$ мы не знаем аналитического решения; в этом и других более сложных случаях в литературе исследованы только локальные свойства оценок.

Для более сложных динамических объектов условия существования описаний (реализаций) в виде систем дифференциальных уравнений (в том числе квазилинейных и нестационарных) изучались в работах В. А. Русанова, А. В. Данеева, А. В. Лакеева, Ю. Э. Линке (1994, 2001, 2011 и др.) [28, 29, 108]. Цели нашего исследования лежат в другой области, поэтому мы ограничиваемся простыми системами.

Итак, множество решений $\mathcal{N}(G) \subset \mathbb{R}^l$ системы линейных уравнений

$$Gz = 0, \qquad z \in \mathbb{R}^l, \tag{1.1.1}$$

с некоторой матрицей $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ в диссертации называется *модельным многообразием* (*линейной моделью*), а система (1.1) — *описанием модели* $\mathcal{N}(G)$.

Определим *стационарные динамические* линейные модели $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^l$. Пусть $\Sigma \doteq (A, B, C, D)$ — четверка матриц размеров $q \times q$, $q \times m$, $r \times q$, $r \times m$ соответственно, столбцы матрицы D линейно независимы, и *переменные состояния* $x[1]$, $x[2]$, ... $x[N+1]$ принадлежат $\mathbb{R}^q$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y[k] = Cx[k] + Du[k], \\ x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \end{cases} \quad k \in \overline{1, N}, \quad N \geqslant q+1, \tag{1.1.2}$$

относительно вектор-функций $u[1], \ldots, u[N] \in \mathbb{R}^m$ и $y[1], \ldots, y[N] \in \mathbb{R}^r$. Размерность $q \geqslant 0$ может принимать нулевое значение, в этом случае $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $x[\cdot] = 0$, и система (1.1.2) сводится к уравнению $y[k] = Du[k]$, $k \in \overline{1, N}$, $N \geqslant 1$. В этом случае говорится о динамической системе *нулевого* порядка, или просто о статической (нединамической) линейной системе.

Траекторией системы (1.1.2) (system trajectory, Б. Роорда (1995) [235]), или *процессом*, называется объединенный вектор

$$z = (y[1]; u[1]; \ldots; y[N]; u[N]) \in \mathbb{R}^l, \qquad l = N(r+m),$$

который также будем записывать в виде

$$z = (z_y; z_u), \qquad z_y = (y[1]; \ldots; y[N]), \qquad z_u = (u[1]; \ldots; u[N]). \tag{1.1.3}$$

Здесь и ниже, следуя Р. Брокетту (1970) [143], запятыми $(*,\dots,*)$ обозначаем вектор-строку, а точками с запятой $(*;\dots;*)$ — вектор-столбец. Аналогичные обозначения используются для клеточных матриц:

$$(A,B) \doteq \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \qquad (A;B) \doteq \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1.1. При каждом фиксированном значении $x[1] = x_0 \in \mathbb{R}^q$ вектора начальных условий описание (1.1.2) задает аффинное многообразие траекторий (1.1.2)

$$\mathcal{M}[x_0] = \left\{ z \in \mathbb{R}^l : \ (1.1.2),\ x[1] = x_0,\ z_u \in \mathbb{R}^{Nm} \right\}, \tag{1.1.4}$$

которое называется *стационарной динамической моделью с фиксированными начальными условиями*, а множество всех траекторий

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^q} \mathcal{M}[x_0] \tag{1.1.5}$$

называется *стационарной динамической моделью со свободными начальными условиями* (или просто *стационарной моделью*).

Замечание 1.1.1. В случае бесконечного интервала наблюдения оказывается возможным определить стационарные модели не через существование стационарного описания в пространстве состояний, а более изящным способом — через инвариантность траекторий относительно сдвига, линейность и замкнутость в топологии поточечной сходимости пространства $(\mathbb{R}^{r+m})^T$, $T = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ [19, теорема 5]. На конечных интервалах наблюдения, как будет показано ниже, стационарность может быть определена также через существование РКТ-описания (раздел 1.3), или продолжимость траекторий (раздел 1.4.1).

Для модели $\mathcal{M}$ определим *подпространство траекторий однородного движения*

$$\mathcal{M}_x \doteq \{ z \in \mathcal{M} : \ z_u = 0 \} \tag{1.1.6}$$

и *подпространство траекторий вынужденного движения*

$$\mathcal{M}_u \doteq \{ z \in \mathcal{M} : \ x_0 = 0 \}, \tag{1.1.7}$$

т. е. $\mathcal{M}_u$ — это стационарная модель с фиксированными нулевыми начальными условиями, и *функцию отклика*

$$T \doteq \left\{ z \in \mathcal{M}_u : z_u = (e_i; 0; \dots; 0),\ i \in \overline{1,m} \right\}, \tag{1.1.8}$$

где e_i — i-й столбец единичной матрицы I_m порядка m.

Замечание 1.1.2. Функция отклика T играет роль полного инварианта [170] модели $\mathcal{M}_u$, а именно: для двух описаний (1.1.2) с четверками матриц Σ' и Σ'' стационарные модели $\mathcal{M}'_u$ и $\mathcal{M}''_u$ с нулевыми начальными условиями совпадают тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие функции отклика $T' \subset \mathcal{M}'_u$ и $T'' \subset \mathcal{M}''_u$.

Напомним известные определения наблюдаемости и управляемости [114, глава 2].

Определение 1.1.2. Система (1.1.2) с размерностью $q \geqslant 1$ называется *наблюдаемой*, если любое изменение произвольного состояния $x[1] \in \mathbb{R}^q$ приводит к изменениям в векторе $z_y = (y[1]; \ldots ; y[q])$.

Система (1.1.2) с $q \geqslant 1$ наблюдаема тогда и только тогда, когда линейно независимы столбцы матрицы $(C; CA; \ldots ; CA^{q-1})$.

Определение 1.1.3. Система (1.1.2) с $q \geqslant 1$ называется *управляемой*, если выбором значения вектора $z_u = (u[1]; \ldots ; u[q])$ ее можно привести в любое наперед заданное состояние $x[q + 1]$.

Система (1.1.2) с $q \geqslant 1$ управляема тогда и только тогда, когда линейно независимы строки матрицы $(B, AB, \ldots , A^{q-1}B)$.

Понятия наблюдаемости и управляемости для систем нулевой размерности $q = 0$ не определяются.

Система (1.1.2) (четверка матриц $\Sigma \doteq (A, B, C, D)$) называется *стационарным описанием с пространством состояний* $\mathbb{R}^q$ для модели $\mathcal{M}$.

Поскольку система (1.1.2) определяется четверкой матриц $\Sigma \doteq (A, B, C, D)$, будем писать "описание Σ" или "описание (A, B, C, D)", имея в виду описание (систему) (1.1.2) с указанными матрицами.

* *Описание* (1.1.2) для заданной стационарной модели $\mathcal{M}$ (1.1.5) *минимально*, если размерность q пространства состояний наименьшая из всех возможных.

* *Описание* (1.1.1) для заданной модели $\mathcal{N}(G) \subset \mathbb{R}^l$ *минимально*, если матрица G содержит наименьшее возможное количество строк $n = \operatorname{codim} \mathcal{N}(G)$, т. е. ранг матрицы G равен числу ее строк.

Подчеркнем, что понятие "минимальность" для описания (1.1.2), как будет видно из дальнейшего, принципиально отличается от этого понятия для описания (1.1.1).

Выделив конкретный базис в $\mathbb{R}^l/\mathcal{M}$, можно построить некоторое минимальное описание вида (1.1.1) стационарной модели $\mathcal{M}$. Такое описание естественно называть "стационарное описание без переменных состояния".

Два описания называются *равносильными*, если они задают одну и ту же модель. Любое преобразование, приводящее к равносильному описанию, называется *равносильным преобразованием*.

1.2 Минимальные описания в форме 1-го порядка в пространстве состояний

Рассмотрим описание (A, B, C, D) (в виде системы уравнений уравнения 1-го порядка) для стационарной модели со свободными начальными условиями. Известно, что существует бесконечно много описаний (A', B', C', D') этой же модели. В частности, мы получим равносильное описанию (A, B, C, D) описание (A', B', C', D') при невырожденной замене $x' = P^{-1}x$ базиса в пространстве состояний:

$$A' = PAP^{-1}, \quad B' = PB, \quad C' = CP^{-1}, \quad D' = D. \tag{1.2.1}$$

Кроме того, всегда можно построить равносильное описание (A', B', C', D'), увеличив размерность пространства состояний и отказавшись от условия наблюдаемости:

$$A' \doteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, \quad B' \doteq (B; *), \quad C' \doteq (C, 0), \quad D' \doteq D;$$

здесь через $*$ обозначены некоторые произвольные подматрицы, а через 0 — нулевые подматрицы; при этом разбиение на клетки в матрицах B' и C' согласовано с разбиением в матрице A'. Имеет место (следствие 1.2.1, ниже) в определенном смысле обратное утверждение: если описание не наблюдаемо, то найдется равносильное наблюдаемое описание в пространстве состояний меньшей размерности.

Во многих случаях оправдано использование вместо всего множества равносильных описаний модели $\mathcal{M}$ некоторого собственного подмножества наиболее "экономных" описаний с наименьшей возможной для данной модели $\mathcal{M}$ размерностью пространства состояний. Согласно определению, приведенному в разделе 1.1, такие описания (реализации) называются минимальными.

В данном параграфе изучается класс равносильных минимальных описаний в форме матричных уравнений 1-го порядка для стационарной модели $\mathcal{M}$ со свободными начальными условиями.

Известная теорема Р. Калмана о минимальной реализации [171, 172] прямо переносится на модели $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{M}$ с нулевыми начальными условиями:

Теорема 1.2.1. (*о минимальной реализации*). *Пусть описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{M}_u$ (с нулевыми начальными условиями) минимально. Тогда (и только тогда) оно управляемо и наблюдаемо одновременно. При этом любое другое равносильное минимальное описание (A', B', C', D') данной модели $\mathcal{M}_u$ может быть получено из описания (A, B, C, D) преобразованием* (1.2.1).

Оказывается, что теорема 1.2.1 допускает в определенном смысле обобщение на рассматриваемый в статье случай стационарных моделей $\mathcal{M}$ со свободными начальными условиями.

Теорема 1.2.2. *Пусть описание* (A, B, C, D) *стационарной модели* $\mathcal{M}$ *(со свободными начальными условиями) минимально и* $q \geqslant 1$. *Тогда оно наблюдаемо (возможно, не управляемо). При этом любое другое равносильное минимальное описание* (A', B', C', D') *данной модели* $\mathcal{M}$ *может быть получено из описания* (A, B, C, D) *преобразованием* (1.2.1).

Заметим, что переход от моделей $\mathcal{M}_u$ (с нулевыми начальными условиями) к моделям $\mathcal{M}$ (со свободными начальными условиями) связан с отказом от условия управляемости. Эта связь, по-видимому, впервые была отмечена Я. Виллемсом (1989) [19]. В утверждении (i) [19, с. 20] сформулирован результат, аналогичный теореме 1.2.2, для предельного случая бесконечного интервала наблюдения $N \to \infty$. В заключении к своей работе Я. Виллемс пишет, что "изложенные в этой статье идеи обобщаются ... на системы с конечным временем" [19, с. 180], но детали обобщения *идей* не приводит.

Доказательство теоремы 1.2.2 начнем с известной теоремы о декомпозиции пространства состояний [171]. Для описания (A, B, C, D) в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ определим подпространство $\mathcal{V}_{\rm c}$ управляемых состояний и подпространство $\mathcal{V}_{\rm o}^{\perp}$ ненаблюдаемых состояний следующим образом:

$$\mathcal{V}_{\rm c} = \mathcal{R}(B, AB, \ldots, A^{q-1}B), \tag{1.2.2}$$

$\mathcal{V}_{\rm o}^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathcal{V}_{\rm o}$, где

$$\mathcal{V}_{\rm o} = \mathcal{R}(C^{\top}, A^{\top}C^{\top}, \ldots, A^{\top(q-1)}C^{\top}). \tag{1.2.3}$$

Теорема 1.2.3. (*О декомпозиции* [171]). *Для описания* (A, B, C, D) *в пространстве состояний* $\mathbb{R}^q$ *верны следующие утверждения.*

(1) *Подпространства* $\mathcal{V}_{\rm c}$ *и* $\mathcal{V}_{\rm o}^{\perp}$ *являются* A*-инвариантными, и пространство состояний* $\mathbb{R}^q$ *можно разложить в прямую сумму четырех подпространств:*

$$\mathbb{R}^q = (\mathcal{V}_{\rm o} \cap \mathcal{V}_{\rm c}) \dotplus (\mathcal{V}_{\rm o} \cap \mathcal{V}_{\rm c}^{\perp}) \dotplus (\mathcal{V}_{\rm o}^{\perp} \cap \mathcal{V}_{\rm c}) \dotplus (\mathcal{V}_{\rm o}^{\perp} \cap \mathcal{V}_{\rm c}^{\perp}), \tag{1.2.4}$$

где $\mathcal{V}_{\rm c}^{\perp}$ *— ортогональное дополнение подпространства* $V_{\rm c}$.

(2) *Существует невырожденная замена переменных* $x' = P^{-1}x$ *такая, что матрицы* $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$, $C' = CP^{-1}$ *имеют вид*

$$A' = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

В (1.2.5) через $*$ обозначены некоторые произвольные подматрицы, через 0 — нулевые подматрицы, и матрицы A', B', C' разбиты на клетки в соответствии с размерностями слагаемых в разложении (1.2.4).

Следствие 1.2.1. *Если описание* (A, B, C, D) *не наблюдаемо, то найдется равносильное ему наблюдаемое описание* (A', B', C', D') *в пространстве состояний меньшей размерности.*

Из теорем 1.2.1, 1.2.2 следует, что для минимальных описаний модели $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{M}$ (с нулевыми начальными условиями) разложение (1.2.4) пространства состояний $\mathbb{R}^q$ принимает вид

$$\mathbb{R}^q = \mathcal{V}_{\mathrm{o}} \cap \mathcal{V}_{\mathrm{c}} = \mathcal{V}_{\mathrm{o}} = \mathcal{V}_{\mathrm{c}}.$$

Опишем структуру пространства состояний $\mathbb{R}^q$ в случае минимальных описаний модели $\mathcal{M}$ со свободными начальными условиями. Справедлива

Теорема 1.2.4. *Пусть* (A, B, C, D) *— минимальное описание в пространстве состояний* $\mathbb{R}^q$ *стационарной модели* $\mathcal{M}$ *со свободными начальными условиями. Тогда*

(i) *декомпозиция* (1.2.4) *пространства состояний* $\mathbb{R}^q$ *принимает вид*

$$\mathbb{R}^q = (\mathcal{V}_{\mathrm{o}} \cap \mathcal{V}_{\mathrm{c}}) \dot{+} (\mathcal{V}_{\mathrm{o}} \cap \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{\perp}), \tag{1.2.6}$$

т. е. описание (A, B, C, D) *наблюдаемо* (*возможно, не управляемо*);

(ii) *представление* (1.2.5) *матриц* A', B', C' *принимает вид*

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}; \tag{1.2.7}$$

(iii) *описание* (A_{11}, B_1, C_1, D) *есть минимальное описание подпространства траекторий вынужденного движения* $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{M}$ (*рассматриваемого как стационарная модель с нулевыми начальными условиями*);

(iv) *размерность первого слагаемого в разложении* (1.2.6) *равна размерности пространства состояний* $\mathbb{R}^{q_u}$ *для описания* (A_{11}, B_1, C_1, D), *т. е.* $\dim \mathcal{V}_{\mathrm{o}} \cap \mathcal{V}_{\mathrm{c}} = q_u$;

(v) *размерность пространства состояний* $\mathbb{R}^q$ *равна размерности подпространства траекторий однородного движения, т. е.* $q = \dim \mathcal{M}_x$.

Доказательство. Утверждения (i)–(iv) следуют из теоремы 1.2.3 о декомпозиции. Докажем (v). Согласно (1.1.2), (1.1.6) подпространство $\mathcal{M}_x$ траекторий однородного движения есть линейная оболочка столбцов матрицы

$$F = \Big(C; \;\; 0; \;\; CA; \;\; 0; \;\; CA^2; \;\; 0; \;\; \ldots; \;\; CA^{N-1}; \;\; 0\Big).$$

Ввиду наблюдаемости ранг матрицы F максимален, следовательно, равен размерности пространства состояний $\mathbb{R}^q$. Поэтому $\dim \mathcal{M}_x = \operatorname{rank} F = q$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1.2.3 сразу следует первое утверждение теоремы 1.2.2. В оставшейся части параграфа доказывается второе утверждение теоремы 1.2.2.

Для наглядности изложения иногда будем записывать вектор z в виде (1.1.3):

$$z = (y[1]; \ldots; y[N]; u[1]; \ldots; u[N]).$$

Непосредственно из определений, приведенных в разделе 1.1, вытекает

Лемма 1.2.1. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}(H), \qquad \mathcal{M}_x = \mathcal{R}(H_x), \qquad \mathcal{M}_u = \mathcal{R}(H_u),$$

где

$$H = \left(\; H_x \; \middle| \; H_u \; \right) = \left(\begin{array}{c|cccc} C & D & & & 0 \\ CA & CB & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \ldots & CB & D \\ \hline 0 & I_m & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & I_m \end{array} \right). \tag{1.2.8}$$

Поскольку преобразование (1.2.1) не изменяет матрицы H вида (1.2.8), справедливо

Следствие 1.2.2. *Если матрицы A, B, C, D и A', B', C', D' описаний* (A, B, C, D) *и* (A', B', C', D') *связаны преобразованием* (1.2.1), *то эти описания равносильны.*

Лемма 1.2.2. *Стационарная модель $\mathcal{M}$ есть прямая сумма подпространств $\mathcal{M}_u$ и $\mathcal{M}_x$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2.2 и ее следствия существует наблюдаемое описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{M}$. Столбцы подматрицы H_x в этом случае линейно независимы и образуют базис пространства $\mathcal{M}_x$. Столбцы подматрицы H_u линейно независимы и образуют базис пространства $\mathcal{M}_u$. Ни один из столбцов подматрицы H_u не принадлежит линейной оболочке $\mathcal{R}(H_x)$. Следовательно, $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}_x + \dim \mathcal{M}_u$. Отсюда заключаем [139, Ch. X, par. 8, theor. 20], что сумма $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x + \mathcal{M}_u$ прямая. Лемма доказана. □

Согласно теореме 1.2.3, любое минимальное описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{M}$ наблюдаемо, но возможно, неуправляемо. При этом управляемость описания (A, B, C, D) прямо связана с равенством нулю второго слагаемого в разложении (1.2.6). Будем называть стационарную модель $\mathcal{M}$ *управляемой*, если для любого минимального описания модели $\mathcal{M}$ второе слагаемое в разложении (1.2.6) равно нулю, и *неуправляемой* в противном случае.

Следствие 1.2.3. *Если стационарная модель $\mathcal{M}$ управляема, то любые два равносильных минимальных описания* (A, B, C, D) *и* (A', B', C', D') *этой модели связаны преобразованием* (1.2.1).

Доказательство. По лемме 1.2.2 стационарная модель $\mathcal{M}$ есть прямая сумма подпространств $\mathcal{M}_u$ и $\mathcal{M}_x$, где оба слагаемых определены однозначно. По теореме 1.2.3 для любого минимального описания (A, B, C, D) управляемой стационарной модели $\mathcal{M}$ матрицы A, B, C с точностью до преобразования (1.2.1) равны матрицам A_{11}, B_1, C_1, где (A_{11}, B_1, C_1) — некоторое минимальное описание подпространства траекторий вынужденного движения $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{M}$. Далее следует применить теорему 1.2.1. $\square$

Следствие 1.2.4. *Размерность стационарной модели $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{N(r+m)}$ равна величине $q + Nm$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что сумма $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x + \mathcal{M}_u$ прямая и размерность слагаемого $\mathcal{M}_u$ равна Nm — числу столбцов подматрицы H_u в выражении (1.2.8), а размерность слагаемого $\mathcal{M}_x$ равна q в силу утверждения (v) теоремы 1.2.3. $\square$

Обозначим через $E(\mathcal{M})$ класс равносильных минимальных описаний стационарной модели $\mathcal{M}$. Для простоты будем отождествлять описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{M}$ с тройкой матриц A, B, C, учитывая, что матрица D для данной модели $\mathcal{M}$ определяется однозначно. Для завершения доказательства теоремы 1.2.2 нужно показать, что любые два описания из класса $E(\mathcal{M})$ связаны преобразованием (1.2.1), т. е. следствие 1.2.3 сохраняет силу для неуправляемых моделей.

Пусть $\Sigma \doteq (A, B, C, D) \in E(\mathcal{M})$, $\Sigma' \doteq (A', B', C', D') \in E(\mathcal{M})$ — два минимальных описания стационарной модели $\mathcal{M}$. Ввиду минимальности, каждая из матриц $(C; CA; \ldots)$ и $(C'; C'A'; \ldots)$ имеет q линейно независимых столбцов. Поскольку Σ и Σ' описывают одно и то же многообразие $\mathcal{M}$, верно соотношение

$$\mathcal{R}\,(C; CA; \ldots) = \mathcal{R}\,(C'; C'A'; \ldots) = \mathcal{M}_x.$$

Поэтому

$$(C; CA; \ldots) = (C'; C'A'; \ldots)\, P \tag{1.2.9}$$

для некоторой неособенной матрицы $P \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Заметим, что отсюда следует равенство $C' = CP^{-1}$.

Из соотношения (1.2.9) получаем систему уравнений

$$(C; CA; \ldots)\, A^k = (C'; C'A'; \ldots)\, A'^k P, \qquad k \geqslant 0. \tag{1.2.10}$$

Обозначим W' некоторую произвольную неособенную подматрицу из строк матрицы $(C'; C'A'; \ldots)$. Ввиду соотношения (1.2.9) соответствующая подматрица W из строк матрицы $(C; CA; \ldots)$ также неособенная. Согласно соотношениям (1.2.10),

$$W'A'^k P = WA^k, \qquad k \geqslant 0,$$

или,

$$A'^k = UA^kP^{-1}, \qquad U \doteq W'^{-1}W, \qquad k \geqslant 0. \tag{1.2.11}$$

Далее из (1.2.11) получаем:

$$(A')^{i+j} = A'^iA'^j = UA^iP^{-1}UA^jP^{-1};$$

также

$$(A')^{i+j} = UA^{i+j}P^{-1}.$$

Из последних двух уравнений следуют равенства

$$A^iP^{-1}UA^j = A^{i+j} \qquad i, j \geqslant 0.$$

В частности, при $j = 0$ имеем

$$CA^iP^{-1}U = CA^i, \qquad i \geqslant 0,$$

что означает

$$(C; CA; \ldots)\, P^{-1}U = (C; CA; \ldots)\, .$$

Поэтому $P^{-1}U = I$, и с учетом (1.2.11) получаем соотношение

$$A' = PAP^{-1}.$$

Остается показать, что $B' = PB$. Поскольку $\mathcal{M}_u = \mathcal{R}\,(H_u) = \mathcal{R}\,(H'_u)$, имеем $D = D'$,

$$(C; CA; \ldots)\, B = (C'; C'A'; \ldots)\, B'$$

(чтобы это увидеть, достаточно учесть структуру матрицы H_u (1.2.8) и линейную независимость столбцов матрицы $D = D'$; см. замечание 1.1.2). Кроме того, учитывая (1.2.9), имеем

$$(C; CA; \ldots)\, B = (C; CA; \ldots)\, P^{-1}B'.$$

Следовательно, $B' = PB$. Второе утверждение теоремы 1.2.2 доказано. $\square$

1.3 Минимальные описания в пространстве траекторий. РКТ-матрицы

В этом разделе строится множество минимальных описаний стационарных систем в пространстве траекторий. Будет показано, что матрица минимального описания вида (1.1.1) равносильным преобразованием всегда может быть приведена к специальному расширенному клеточно-теплицевому виду (РКТ).

Определение 1.3.1. *Расширенной клеточно-теплицевой матрицей* называется матрица вида

$$G^+ = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \\ 0 & & & \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_p \end{pmatrix}, \tag{1.3.1}$$

где γ_j, $j \in \overline{0,p}$, — клетки размера $r \times (r+m)$ такие, что многочленная матрица $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p$ двусторонне строчно-минимальна (см. определение 1.6.4), и "расширение" $\delta(s) = \delta_0 s^0 + \ldots + \delta_p s^p$ имеет вид

$$\delta(s) = \begin{pmatrix} s & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ s^{p_r - p_1} & & \\ & s & \\ 0 & \vdots & \\ & s^{p_r - p_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \gamma(s); \tag{1.3.2}$$

Здесь p_i, $i = \overline{1,r}$ — степени строк $\gamma(s)$, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_r = p$.

Подматрицу $\gamma = (\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_p)$ назовем *образующей* для матрицы G^+. Заметим, что структура расширения $\delta(s)$ такова, что из РКТ-матрицы G^+ путем удвоения некоторых строк можно получить клеточно-теплицеву матрицу

$$G^\dagger = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p & & & 0 \\ & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

Самым сложным в определении РКТ-матрицы является конструкция расширения $\delta(s)$ (1.3.2). Она образована всеми возможными “сдвигами вправо” (умножениями на s^i) тех строк $\gamma_\theta(s)$, степени которых меньше p.

Отметим важное свойство РКТ-матриц.

Утверждение 1.3.1. *Строки матрицы G^+ вида* (1.3.1)–(1.3.3) *линейно независимы и размерность правого нуль-пространства $\mathcal{N}(G^+)$ равна $q+Nm$, где $q = p_1 + \ldots + p_r$.*

Доказательство. Согласно определению матрица $\gamma(s)$ (двусторонне) приведена по строкам и не имеет нулевых строк; ее ранг максимален (см. предложения 1.6.6 и 1.6.6 ниже). Поэтому матрица G^+ не имеет нулевых строк. Несложно убедиться, что перестановкой строк матрицу G^+ можно привести к некоторому клеточному нижнетреугольному виду G^+_*. В силу строчной минимальности матрицы $\gamma(s)$ клетки на диагонали матрицы G^+_* имеют линейно независимые строки. Отсюда следует линейная независимость строк G^+. Затем простым подсчетом числа строк и столбцов определяется размерность правого нуль-пространства $\mathcal{N}(G^+)$ матрицы G^+. $\square$

Сформулируем одно из основных утверждений главы.

Теорема 1.3.1. *Описание в пространстве состояний* (1.1.2) *равносильно системе* (1.1.1) *с некоторой* РКТ-*матрицей* G^+ *вида* (1.3.1)–(1.3.3). *При этом строки матрицы* G^+ *линейно независимы, т. е. описание* (1.1.1) *с матрицей* G^+ *минимально в смысле определений из раздела 1.1.*

1.3.1 Доказательство теоремы 1.3.1

Предполагается, что система (1.1.2) наблюдаема. Если система (1.1.2) не наблюдаема, то сначала следует построить равносильную (1.1.2) наблюдаемую систему в пространстве состояний меньшей размерности.

Для перехода к системе вида (1.1.1) в пространстве траекторий наблюдаемая система (1.1.2) преобразованием (1.2.1) приводится к равносильной *форме восстанавливаемости* [170, 6.4.3].

Определение 1.3.2. *Описание* (A, B, C) *в пространстве состояний имеет форму восстанавливаемости*, если

$$A = \|A_{ij}\|^{i\in\overline{1,r}}_{j\in\overline{1,r}}, \qquad B = \|B_i\|^{i\in\overline{1,r}}, \qquad C = \|C_j\|_{j\in\overline{1,r}},$$

где матрицы A_{ij}, B_i, C_j размеров соответственно $q_i \times q_j$, $q_i \times m$, $r \times q_j$ имеют следующий вид:

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{ii}^{(0)} \\ 1 & \dots & 0 & -a_{ii}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{ii}^{(q_i-1)} \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{ij}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{ij}^{(q_i-1)} \end{pmatrix}, \quad i \neq j, \tag{1.3.4}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{i1}^{(0)} & \dots & b_{im}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}^{(q_i-1)} & \dots & b_{im}^{(q_i-1)} \end{pmatrix}, \qquad C_j = \alpha_{[0]}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & e_j \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \tag{1.3.5}$$

e_j — j-й столбец единичной матрицы I_r и $q_1 + \ldots + q_r = q$, $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$.

Замечание 1.3.1. Описание (A, B, C) в форме восстанавливаемости (1.3.4)–(1.3.5) в общем случае не является единственным на множестве равносильных преобразований (1.2.1). Для единственности следует потребовать, чтобы матрица $\alpha_{[0]}^{-1}$ была нижнетреугольной с единицами на диагонали. В этом случае уравнения (1.3.4)–(1.3.5) определяют каноническую форму восстанавливаемости [115, с. 126].

Предложение 1.3.1. *Для любой стационарной модели $\mathcal{M}$ существует минимальное описание в пространстве состояний в форме восстанавливаемости* (1.3.4)–(1.3.5).

Доказательство. Описание (A, B, C) в форме восстанавливаемости (1.3.4)–(1.3.5) всегда наблюдаемо [112, 170, 268]. Обратно, если некоторое описание (A, B, C) наблюдаемо, то преобразованием (1.2.1) оно может быть приведено к форме (1.3.4)–(1.3.5) [112, 170, 268]. Далее теорема 1.2.2. Предложение доказано. □

Пусть система (1.1.2) имеет форму восстанавливаемости:

$$s\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}[k] = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}[k] + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix}u[k], \tag{1.3.6}$$

$$y[k] = \alpha_{[0]}^{-1}\left[\begin{pmatrix} x_{1,q_1}; & x_{2,q_2}; & \dots; & x_{r,q_r} \end{pmatrix}[k] + Du[k]\right], \qquad k \in \overline{1, N},$$

где строки $X_i \doteq \left(x_{i,1}; \dots; x_{i,q_i} \right)$, $i \in \overline{1, r}$, и матрицы $\alpha_{[0]}$, A_{ij}, B_i определены в (1.3.4)–(1.3.5).

Системе (1.3.6) сопоставим многочленную матрицу $\gamma(s)$ согласно формулам:

$$\begin{aligned} &\gamma(s) = \begin{pmatrix} \alpha(s), & -\beta(s) \end{pmatrix}, \\ &\alpha(s) = a(s)\alpha_{[0]}, \qquad \beta(s) = \alpha(s)D + b(s), \\ &a(s) = \|a_{ij}(s)\|_{j\in\overline{1,r}}^{i\in\overline{1,r}}, \qquad b(s) = \|b_{ij}(s)\|_{j\in\overline{1,m}}^{i\in\overline{1,r}}, \\ &a_{ij}(s) = a_{ij}^{(0)}s^0 + \dots + a_{ij}^{(q_i-1)}s^{q_i-1} + \delta_{ij}s^{q_i}, \\ &b_{ij}(s) = b_{ij}^{(0)}s^0 + \dots + b_{ij}^{(q_i-1)}s^{q_i-1}, \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Утверждение 1.3.2. *Решения системы* (1.3.6) *удовлетворяют системе уравнений* (1.1.1) *с матрицей*

$$G = \begin{pmatrix} G_1; & \dots; & G_r \end{pmatrix}, \tag{1.3.8}$$

где $G_i \in \mathbb{R}^{(N-q_i)\times N(r+m)}$,

$$G_i = \begin{pmatrix} \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) & & & 0 \\ & \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_k(i) = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}^{(k)} & \dots & \alpha_{ir}^{(k)} & -\beta_{i1}^{(k)} & \dots & -\beta_{im}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(r+m)},$$

$$k \in \overline{0, q_i}, \qquad q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r.$$

Нумерация элементов $\alpha_{ij}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$ *многочленных матриц* $\alpha(s)$, $\beta(s)$, *определенных в* (1.3.7), *аналогична нумерации элементов* $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$ *в матрицах* $a(s)$, $b(s)$.

Отметим, что число строк в матрицах G_i зависит от номера i, и матрица G вида (1.3.8) отличается от матрицы G^+ вида (1.3.1)–(1.3.3) только перестановкой строк.

Доказательство. Проведем для $\alpha_{[0]} = I$ (обобщение на случай $\alpha_{[0]} \neq I$ не составляет принципиальных трудностей). Выберем произвольное $i \in \overline{1, r}$. Покажем, что если траектория $z = (y[1]; u[1]; \ldots; y[N]; u[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ удовлетворяет (1.3.6), то $G_i z = 0$. Выпишем i-ю группу уравнений системы (1.3.6):

$$\begin{aligned} sX_i[k] = (A_{i1}, \ldots, A_{ii}, \ldots, A_{ir}) \cdot (X_1; \ldots; X_r)[k] + B_i u[k], \\ k \in \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Учитывая вид матриц A_{ij}, B_i (см. (1.3.4)–(1.3.5)), из последней строки (1.3.9) получаем

$$\begin{aligned} &s^{q_i} x_{i,q_i}[k] + s^{q_i-1} x_{i,q_i-1}[k] + \\ &+ s^{q_i-1} \left(a_{i1}^{(q_i-1)} x_{1,q_1}[k] + \ldots + a_{ir}^{(q_i-1)} x_{r,q_r}[k] \right) = \\ &= s^{q_i-1} \left(b_{i1}^{(q_i-1)} u_1[k] + \ldots + b_{im}^{(q_i-1)} u_m[k] \right), \\ &k \in \overline{1, N - q_i + 1}. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Выразим $s^{q_i-1} x_{i,q_i-1}[k]$ с помощью предпоследнего уравнения системы (1.3.9):

$$\begin{aligned} &s^{q_i-1} x_{i,q_i-1}[k] + s^{q_i-2} x_{i,q_i-2}[k] + \\ &+ s^{q_i-2} \left(a_{i1}^{(q_i-2)} x_{1,q_1}[k] + \ldots + a_{ir}^{(q_i-2)} x_{r,q_r}[k] \right) = \\ &= s^{q_i-2} \left(b_{i1}^{(q_i-2)} u_1[k] + \ldots + b_{im}^{(q_i-2)} u_m[k] \right), \\ &k \in \overline{1, N - q_i + 1}. \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Используя (1.3.11), из (1.3.10) получим

$$\begin{aligned} &s^{q_i} x_{i,q_i}[k] + s^{q_i-2} x_{i,q_i-2}[k] + \\ &+ s^{q_i-1} \left(a_{i1}^{(q_i-1)} x_{1,q_1}[k] + \ldots + a_{ir}^{(q_i-1)} x_{r,q_r}[k] \right) + \\ &+ s^{q_i-2} \left(a_{i1}^{(q_i-2)} x_{1,q_1}[k] + \ldots + a_{ir}^{(q_i-2)} x_{r,q_r}[k] \right) = \\ &= s^{q_i-1} \left(b_{i1}^{(q_i-1)} u_1[k] + \ldots + b_{im}^{(q_i-1)} u_m[k] \right) + \\ &+ s^{q_i-2} \left(b_{i1}^{(q_i-2)} u_1[k] + \ldots + b_{im}^{(q_i-2)} u_m[k] \right), \\ &k \in \overline{1, N - q_i + 1}. \end{aligned}$$

Затем таким же образом заменим переменную $s^{q_i-2} x_{i,q_i-2}[k]$ ее выражением из третьего снизу уравнения системы (1.3.9), и т. д. Нетрудно заметить, что, проделав $q_i - 1$

подстановок, придем к уравнению

$$
\begin{aligned}
&s^{q_i}x_{i,q_i}[k]+a_{i1}^{(0)}x_{1,q_1}[k]+\ldots+a_{ir}^{(0)}x_{r,q_r}[k]+\\
&+s\left(a_{i1}^{(1)}x_{1,q_1}[k]+\ldots+a_{ir}^{(1)}x_{r,q_r}[k]\right)+\\
&+\ldots+s^{q_i-1}\left(a_{i1}^{(q_i-1)}x_{1,q_1}[k]+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}x_{r,q_r}[k]\right)=\\
&=b_{i1}^{(0)}u_1[k]+\ldots+b_{im}^{(0)}u_m[k]+s\left(b_{i1}^{(1)}u_1[k]+\ldots+b_{im}^{(1)}u_m[k]\right)+\\
&+\ldots+s^{q_i-1}\left(b_{i1}^{(q_i-1)}u_1[k]+\ldots+b_{im}^{(q_i-1)}u_m[k]\right),\\
&k\in\overline{1,N-q_i+1}.
\end{aligned}
\tag{1.3.12}
$$

Из (1.3.6) следует, что уравнение для $y[k]$ имеет вид

$$
y_j[k]=x_{j,q_j}[k]+d_ju[k],\qquad j\in\overline{1,r},\ k\in\overline{1,N},
$$

где d_j — j-я строка матрицы D и $\alpha_{[0]}=I$. Из уравнения (1.3.12) получим

$$
\begin{aligned}
&s^{q_i}y_i[k]+a_{i1}^{(0)}y_1[k]+\ldots+a_{ir}^{(0)}y_r[k]+\\
&+\ldots+s^{q_i-1}\left(a_{i1}^{(q_i-1)}y_1[k]+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}y_r[k]\right)=\\
&=b_{i1}^{(0)}u_1[k]+\ldots+b_{im}^{(0)}u_m[k]+\\
&+\ldots+s^{q_i-1}\left(b_{i1}^{(q_i-1)}u_1[k]+\ldots+b_{im}^{(q_i-1)}u_m[k]\right)+\\
&+s^{q_i}d_iu[k]+a_{i1}^{(0)}d_1u[k]+\ldots+a_{ir}^{(0)}d_ru[k]+\\
&+\ldots+s^{q_i-1}\left(a_{i1}^{(q_i-1)}d_1u[k]+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}d_ru[k]\right),\\
&k\in\overline{1,N-q_i}.
\end{aligned}
\tag{1.3.13}
$$

Запишем равенство (1.3.13) через строки $a_i(s)$ и $b_i(s)$ матриц $a(s)$ и $b(s)$ вида (1.3.7) (s понимается как оператор сдвига). Окончательно получим

$$
a_i(s)y[k]=\left(b_i(s)+a_i(s)D\right)u[k],\qquad k\in\overline{1,N-q_i}.
$$

Следовательно, $G_iz=0$. Утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 1.3.1. Ввиду предложения 1.3.1 для (1.1.2) существует равносильная система (1.3.6). По утверждению 1.3.2 многообразие траекторий системы (1.3.6) вложено в правое нуль-пространство $\mathcal{N}(G)$ матрицы G вида (1.3.8), которая отличается от G^+ только перестановкой строк (см. (1.3.1)–(1.3.3), (1.3.7)). Из утверждения 1.3.1 и следствия 1.2.4 вытекает равенство $\mathcal{M}=\mathcal{N}(G^+)$. Теорема 1.3.1 доказана. □

Следствие 1.3.1. *Для стационарных моделей* $\mathcal{M}$ *со свободными начальными условиями минимальными описаниями в пространстве траекторий являются те* (*и только те*) *системы* (1.1.1), *у которых матрицу* G *путем умножения слева на некоторую неособенную матрицу можно привести к виду* (1.3.1)–(1.3.3).

Доказательство. Действительно, все равносильные преобразования на множестве описаний вида (1.1.1) являются левыми умножениями матрицы G на неособенные матрицы. Отсюда следует, что, имея одно минимальное описание (1.1.1) с матрицей G^+, все остальные можно получить из него вышеназванными левыми умножениями. Следствие доказано. □

Среди всех минимальных описаний данной стационарной модели $\mathcal{M}$ можно выделить подкласс описаний с РКТ-матрицами. Согласно следствию 1.3.1, все элементы этого подкласса связаны между собой левыми умножениями на неособенные матрицы. В разделе 1.5 (далее) описано множество левых умножений, сохраняющих структуру РКТ-матриц, и установлено соответствие между этим множеством и некоторой алгеброй многочленных матриц.

Наличие в классе равносильных РКТ-описаний более одного элемента обусловлено неединственностью формы (1.3.4)–(1.3.5) на множестве преобразований вида (1.2.1) (см. замечание 1.3.1) и неединственностью строчно-приведенной формы матрицы $\gamma(s)$ на множестве левых унимодулярных преобразований.

Следствие 1.3.2. *Два* РКТ-*описания с образующими подматрицами* γ *и* γ' *равносильны тогда* (*и только тогда*), *когда множества строчно-приведенных форм многочленных матриц* $\gamma(s)$, $\gamma'(s)$ (*раздел* 1.6) *имеют непустое пересечение.*

Замечание 1.3.2. Доказательства утверждений этого раздела сохраняют силу, если понимать символ s как дифференцирование и считать вектор-функции $u[k] \doteq u(t)$, $y[k] \doteq y(t)$, $X[k] \doteq X(t)$, $t = kh$, p раз дифференцируемыми на отрезке $t \in [h, Nh] \subset \mathbb{R}$ числовой прямой. Ввиду замечания 1.6.1 (ниже) в случае систем с непрерывным временем многочленную матрицу $\gamma(s)$ нужно считать строчно-минимальной только со старшего конца (определение 1.6.1).

1.4 Многочленные (операторные) описания. Системы АРСС

Определение 1.4.1. Матричное линейное разностное уравнение

$$\begin{aligned} \alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] \;&=\; \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \\ & k \in \overline{1, N-p}, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

относительно вектор-функций $y[k] \in \mathbb{R}^r$, $u[k] \in \mathbb{R}^m$ с постоянными матричными коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m}$ называется *системой уравнений "авторегрессия —*

скользящее среднее" [256, p. 48]. Многочленные матрицы

$$\beta(s) = \beta_p s^p + \beta_{p-1} s^{p-1} + \ldots + \beta_0,$$
$$\alpha(s) = \alpha_p s^p + \alpha_{p-1} s^{p-1} + \ldots + \alpha_0,$$

называются [170, 6.2.3] соответственно *числителем* и *знаменателем* матричного уравнения (1.4.1). Предполагается, что матрица знаменателя неособенная, т. е. определитель $\det \alpha(s)$ обращается в нуль не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{C}$ или (равносильно) $s \in \mathbb{R}$.

Системы вида (1.4.1) возникают, в частности, при описании электрических цепей и механических систем как результат дискретизации уравнений Кирхгофа и Лагранжа [19, 271].

Матричное уравнение (1.4.1) допускает равносильную форму записи

$$\begin{aligned} &\gamma_p z[k+p] + \ldots + \gamma_0 z[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p}, \\ &\gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i) \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)}, \qquad z[k] = (y[k]; u[k]), \\ &\gamma(s) = (\alpha(s), -\beta(s)) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

которая соответствует системе (1.1.1) с клеточно-теплицевой матрицей размера $(N - p)r \times N(r+m)$:

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \end{pmatrix}. \tag{1.4.3}$$

Замечание 1.4.1. Ввиду условия $\operatorname{rank} \alpha(s) = r$ всегда можно выбрать неособенную подматрицу $\alpha'(s)$ из столбцов матрицы $\gamma(s)$. Если степень определителя $\alpha'(s)$ наибольшая среди всех таких подматриц, то $\alpha'(s)$ можно принять в качестве знаменателя $\alpha(s) = \alpha'(s)$ и поставить матрице $\gamma(s)$ в соответствие некоторую систему АРСС вида (1.4.1). Для этого согласно расположению столбцов $\alpha(s)$ в $\gamma(s)$ выбираются компоненты вектора переменных $z[k]$ и объявляются выходными переменными $y[k]$, а остальные компоненты — переменными правой части (входными) $u[k]$; без ограничения общности можно считать, что выходные переменные $y[k]$ в векторе $z[k]$ расположены на первых местах:

$$z[k] \doteq (y[k]; u[k]), \qquad \gamma(s) \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & -\beta(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (1.4.2) примет вид (1.4.1):

$$\alpha(s) y[k] = \beta(s) u[k], \qquad k = \overline{1, N-p}.$$

После выбора знаменателя построение равносильной нормальной формы 1-го порядка

(1.1.2) делается стандартным способом [267]. По поводу соответствия разных типов описаний см. также [19, теорема 2].

Определение 1.4.2. *Описание* (1.4.1) *минимально*, если строки матрицы G линейно независимы.

Сформулируем и докажем простой критерий минимальности описания (1.4.1). Напомним, при $r \leqslant t$ ранг $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$ равен наибольшему возможному значению r тогда (и только тогда), когда для любой ненулевой r-строки $\tau(s)$ произведение $\tau(s)\gamma(s)$ не равно нулю хотя бы в одной точке $s \in \mathbb{C}$ или (равносильно) $s \in \mathbb{R}$.

Предложение 1.4.1. *При условии $N \geqslant 2(p+1)$ описание* (1.4.1) *минимально, если (и только если) ранг многочленной матрицы $\gamma(s)$ равен наибольшему возможному значению r, т. е. каноническая форма $\gamma(s)$ не содержит строк, тождественно по s равных нулю.*

Доказательство. Пусть описание (1.4.1) не минимально, т. е. строки матрицы G линейно зависимы. Тогда существует числовая строка $\tau \neq 0$ такая, что $\tau G = 0$. Пронумеруем элементы τ двойным индексом (j,k) так, что $j \in \overline{1,r}$, $k \in \overline{1,N-p}$, где k соответствует номеру клеточной строки

$$G_k = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\gamma_0,\ldots,\gamma_p,0,\ldots,0)\,,$$

а j — номеру строки внутри G_k. Тогда для многочленной строки

$$\tau(s) = \|\tau_j(s)\|_{j\in\overline{1,r}}\,, \qquad \tau_j(s) = \sum_{k=1}^{N-p} \tau_{(j,k)} s^{k-1}, \tag{1.4.4}$$

имеет место тождество $\tau(s)\gamma(s) \equiv 0$. Обратно, пусть существует ненулевая многочленная строка $\tau(s) \in \mathbb{R}^r[s]$ такая, что $\tau(s)\gamma(s) \equiv 0$. Представим $\tau(s)$ и $\gamma(s)$ в виде $\tau(s) = \tau_0 s^0 + \ldots + \tau_d s^d$, $\tau_j \in \mathbb{R}^r$, и $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p$. Тогда из тождества $\tau(s)\gamma(s) \equiv 0$ следует

$$\begin{aligned}
&\tau_0\gamma_0 = 0\,,\\
&\tau_1\gamma_0 + \tau_0\gamma_1 = 0\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\tau_{d-1}\gamma_p + \tau_d\gamma_{p-1} = 0\,,\\
&\tau_d\gamma_p = 0\,,
\end{aligned}$$

т. е. $\overline{\tau}\,\overline{G} = 0$, где $\overline{\tau} = (\tau_0,\ldots,\tau_d) \in \mathbb{R}^{(d+1)r}$ — числовая строка, и $\overline{G} \in \mathbb{R}^{(d+1)r\times N(r+m)}$ —

подматрица матрицы G,

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 & \vdots & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & \vdots & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, строки матрицы G линейно зависимы, $\tau G = 0$. В рассуждениях неявно предполагалось, что размеры матрицы G позволяют выбрать в ней подматрицу $\overline{G}$. Это возможно при $N \geqslant 2(p+1)$, так как число d всегда можно выбрать меньшим $p+1$. Предложение доказано. □

На основе сказанного можно ввести следующее определение.

Определение 1.4.3. Многочленная матрица $\gamma(s)$ (1.4.2) называется *многочленным* (*операторным*) *представлением* системы (1.4.1), (1.4.2).

1.4.1 Структура множества решений и равносильные преобразования систем АРСС

Здесь будет показано, что множество решений системы (1.4.1)–(1.4.3) в общем случае не совпадает со стационарной моделью $\mathcal{M}$ вида (1.4.1).

В предположении, что длина N интервала наблюдения конечна, мы построим класс описаний, ”почти”, или ”слабо” равносильных (1.4.1), и покажем, что этот класс естественным образом соответствует классу точно равносильных систем в предельном случае $N = \infty$ [141, 12.2], [19, sec. 4]. Такое соответствие устанавливается с помощью введенного в разделе 1.3 понятия РКТ-матрицы.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\gamma^*(s) = \gamma_p^* s^p + \ldots + \gamma_0^* s^0$ *— двусторонне строчно-приведенная форма матрицы* $\gamma(s)$ (*определение 1.6.4*)*, и пусть* G^{*+} *—* РКТ*-матрица вида* (1.3.1)–(1.3.2) *с образующей подматрицей* $\gamma^* = (\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_p^*)$ *и числом клеточных столбцов* $N \geqslant 2(p+1)$. *Тогда ненулевые строки матрицы* G^{*+} *линейно независимы. Матрица* G^{*+} *не имеет нулевых строк, если* (*и только если*) *линейно независимы строки многочленной матрицы* $\gamma(s)$.

Доказательство. Следует из определения 1.6.4 двусторонне строчно-приведенной формы и утверждения 1.3.2. □

Следствие 1.4.1. *Описание* (1.1.1) *с* РКТ*-матрицей* G^+ *вида* (1.3.1)–(1.3.3) *минимально, если* (*и только если*) *матрица* G^+ *не имеет нулевых строк.*

Прямой подсчет размерности правого нуль-пространства матрицы G (1.4.3) показывает, что это нуль-пространство в общем случае шире многообразия $\mathcal{M}'$ решений равносильной системы (1.1.2). Действительно,

$$\dim \mathcal{N}(G) = N(r+m) - (N-p)r = pr + Nm,$$

$$\dim \mathcal{M}' = q + Nm, \qquad q = \deg \alpha(s) \leqslant pr.$$

Опишем структуру многообразия $\mathcal{M} \doteq \mathcal{N}(G)$.

Теорема 1.4.1. *Линейное многообразие $\mathcal{M}$ всех решений*

$$z = (y[1]; u[1]; \ldots; y[N]; u[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$$

системы уравнений АРСС (1.4.1) *представимо в виде суммы подпространства "стационарных" решений $\mathcal{M}'$ и подпространства "нестационарных" решений $\mathcal{M}''$:*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' + \mathcal{M}''.$$

Для первого слагаемого $\mathcal{M}'$ существует стационарное описание (1.1.2) *в пространстве состояний. т. е. многобразие $\mathcal{M}'$ является стационарной динамической моделью в смысле определения* (1.1.1). *Второе слагаемое $\mathcal{M}''$ не вложено в $\mathcal{M}'$, т. е. $\mathcal{M}'' \not\subseteq \mathcal{M}'$, и образовано траекториями $z'' = (0; \ldots; 0; *; \ldots; *)$ с нулевым начальным отрезком и ненулевым окончанием $(*; \ldots; *)$, длина которого не превосходит величины $d = (p-q_1)(r-1)(r+m)$, где q_1 — наименьший строчный индекс* (*см. ниже определение 1.6.2*) *многочленной матрицы $\gamma(s)$.*

Заметим, что с ростом длины N интервала наблюдения относительная длина ненулевых участков траекторий $z'' \in \mathcal{M}''$ стремится к нулю.

Числовую матрицу $\gamma = (\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_p)$ будем называть (*двусторонне*) *приведенной по строкам*, если (двусторонне) приведена по строкам соответствующая многочленная матрица $\gamma(s)$ (см. определения 1.6.2, 1.6.4).

Доказательство. Умножая слева на некоторую неособенную матрицу P, можно привести матрицу G (1.4.3) к виду

$$G^* = PG = \left(\begin{array}{cccccc} & \overline{G}^+ & & \vdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \vdots & & \Delta G & \end{array} \right), \quad d = (p-q_1)(r-1)(r+m).$$

где $\overline{G}^+$ — РКТ-матрица вида (1.3.1)–(1.3.3), образующей подматрицей которой является двусторонне строчно-приведенная форма γ^* матрицы $\gamma = (\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_p)$ вида (4.2), и ΔG — некоторый "остаток". Действительно, пусть $\gamma^*(s)$ — двусторонне строчно-приведенная форма $\gamma(s)$. Тогда $\gamma^*(s)$ и $\gamma(s)$ связаны левым унимодулярным преобразованием $u(s)$: $\gamma(s) = u(s)\gamma^*(s)$ (см. раздел 1.6). Пользуясь линейной независимостью строк матрицы $\gamma^*_{[0]}$ (см. определение 1.6.2), несложно получить неравенство $\deg u_{ij}(s) \leqslant |p_i - q_j|$, где p_i — степень i-й строки $\gamma(s)$ и q_j — степень j-й строки $\gamma^*(s)$ (без ограничения общности считаем, что $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_r = p$, $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$). Ясно, что $\gamma^*(s) = u(s)^{-1}\gamma(s)$, и степени элементов обратной матрицы $u(s)^{-1}$ ограничены сверху числом $(p_r - q_1)(r-1) = (p-q_1)(r-1)$, так как эти элементы суть $(r-1)$-миноры матрицы $u(s)$ с точностью до умножения на константу $\det u(s)$. После этого несложно по аналогии с доказательством предложения 1.4.1 построить из коэффициентов многочленов обратной матрицы $u(s)^{-1}$ числовую матрицу P в соотношении $G^* = PG$. В силу унимодулярности $u(s)^{-1}$ матрица P оказывается произведением матриц элементарных преобразований [23], и потому она неособенная. Пусть G^+ — РКТ-матрица, построенная по двусторонней строчно-приведенной форме γ^* матрицы γ и имеющая то же число столбцов, что и матрица G^*. По построению матрицы G^+ и $\overline{G}^+$ имеют одну и ту же образующую подматрицу γ^*. Из соотношения $\gamma(s) = u(s)\gamma^*(s)$ следует, что все строки матрицы G вложены в линейную оболочку строк матрицы G^+. Поэтому $\mathcal{N}(G^*) = \mathcal{N}(G) \supseteq \mathcal{N}(G^+)$. Согласно предложению 1.4.1 и лемме 1.4.1 строки матриц G и G^+ линейно независимы. Следовательно, размерности подпространств $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(G^+)$ определяются простым подсчетом числа строк:

$$\dim \mathcal{N}(G) = N(r+m) - (N-p)r = Nm + pr,$$
$$\dim \mathcal{N}(G^+) = Nm + q = Nm + q_1 + \ldots + q_r \leqslant Nm + pr.$$

Заметим, что $\dim \mathcal{N}(G^+) = \dim \mathcal{N}(G)$ тогда (и только тогда), когда $q_1 = q_2 = \ldots = q_r = p$. Это равносильно линейной независимости строк числовой матрицы γ_p из (1.4.2).

Обозначим $\mathcal{M}' \doteq \mathcal{N}(G^+)$, и пусть $\mathcal{M}''$ — ортогональное дополнение $\mathcal{M}'$ до $\mathcal{N}(G)$. Всякий вектор $z \in \mathcal{N}(G)$ представим в виде суммы ортогональных слагаемых $z = z' + z''$, где $z' \in \mathcal{M}'$, $z'' \in \mathcal{M}''$. Обозначим через $\overline{z}$ вектор из первых $N(r+m) - d$ элементов z. Аналогично определим векторы $\overline{z}'$ и $\overline{z}''$ так, что $\overline{z} = \overline{z}' + \overline{z}''$. Из равенства $\mathcal{N}(G^*) = \mathcal{N}(G)$ следует равенство $G^* z = 0$, откуда $\overline{G}^+ \overline{z} = \overline{G}^+(\overline{z}' + \overline{z}'') = 0$. Поскольку $\overline{G}^+ \overline{z}' = 0$ (ввиду включения $z' \in \mathcal{N}'$ и структуры матрицы G^+), имеем $\overline{G}^+ \overline{z}'' = 0$. Покажем, что $\overline{z}'' = 0$. Действительно, в противном случае вектор $(\overline{z}''; 0)$ принадлежит $\mathcal{M}'$, и траекторию $z'' = (\overline{z}''; *) \in \mathcal{M}''$ можно представить в виде суммы ортогональных слагаемых $(\overline{z}''; 0)$ и $(0; *)$, первое из которых принадлежит $\mathcal{M}'$. Это противоречит взаимной ортогональности подпространств $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$. Следовательно, всякий вектор $z'' \in \mathcal{M}''$ имеет вид $(0; *)$, и при этом длина ненулевого отрезка $(*)$ не превосходит $d = (p - q_1)(r-1)(r+m)$. Теорема доказана. □

Следствие 1.4.2. *Система* (1.4.2) *равносильна некоторому описанию* (1.1.2) *в пространстве состояний тогда* (*и только тогда*), *когда строки матричного коэффициента* γ_p *в* (1.4.2) *линейно независимы, т. е.* $p = q_1$.

Обозначим $\overline{\mathcal{M}}' = \mathcal{N}(\overline{G}^+) \subset \mathbb{R}^{l-d}$, где $\mathbb{R}^{l-d}$ — линейная оболочка первых $l-d$ ортов пространства $\mathbb{R}^l$ и $l = N(r+m)$.

Предложение 1.4.2. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\overline{z} \in \overline{\mathcal{M}}' \subset \mathbb{R}^{l-d} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \Delta z \in \mathbb{R}^d: \;\; z = (\overline{z}; \Delta z) \in \mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^l \,. \tag{1.4.5}$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость легко показать, построив описание (1.1.2) в прстранстве состояний для множества траекторий $\overline{\mathcal{M}}'$ (окончание Δz однозначно задается произвольным доопределением переменных $u[k]$ в правой части (1.1.2)). □

Предложение 1.4.2 показывает, что подпространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(G)$ допускает стационарное описание в пространстве состояний тогда и только тогда, когда все траектории из $\mathcal{M}$ *продолжимы* в смысле соотношения (1.4.5). Это утверждение является аналогом теоремы 5 [19] в рассматриваемом нами случае дискретных траекторий конечной длины. Свойство продолжимости здесь играет ту же роль, что и полнота в смысле [19, определение 3].

Определение 1.4.4. Траектория системы (1.4.1) называется *продолжимой*, если она является частью какой-либо “более длинной” траектории той же системы на большем интервале наблюдения $t \in \overline{1, N' - p}$, $N' > N$.

Условие продолжимости означает, что траектории описываются одними и теми же уравнениями (1.4.1) как на интервале наблюдения, так и вне его. По сути, это предположение о стационарности траекторий или системы, их порождающей. Поэтому продолжимые траектории называются также *стационарными*, а линейные многообразия, состоящие только из продолжимых траекторий некоторой системы АРСС — стационарными моделями.

Опишем класс всех систем АРСС, ”слабо” равносильных матричному уравнению (1.4.1). Начнем с рассмотрения предельного случая $N = \infty$. Известен следующий факт ([141, 12.2], [19, sec. 4]).

Теорема 1.4.2. *При $N = \infty$ множество всех систем* АРСС*, равносильных системе* (1.4.1)*, описывается левыми умножениями многочленного представления $\gamma(s)$* (1.4.2) *на унимодулярные матрицы.*

Обозначим $d_N = d/(r + m) = (p - q_1)(r - 1)$, где d определено в теореме 1.4.1.

Определение 1.4.5. Две системы АРСС вида (1.4.1) с конечными $N \geqslant p + 1 + d_N$ называются *слабо равносильными*, если существует число $N' \in \overline{p + 1, N - d_N}$ такое, что начальный отрезок длины N' любой траектории первой системы является начальным отрезком некоторой траектории второй системы, и наоборот.

Следствие 1.4.3. *Две системы АРСС вида* (1.4.1) *слабо равносильны тогда* (*и только тогда*)*, когда множества двусторонних строчно-приведенных форм их многочленных представлений имеют непустое пересечение.*

Из следствия 1.4.3 и определения 1.6.4 двусторонней строчно-приведенной формы вытекает

Теорема 1.4.3. *Множество всех систем* АРСС*, слабо равносильных данной системе* (1.4.1)*, описывается левыми умножениями многочленного представления* $\gamma(s)$ (1.4.2) *на унимодулярные матрицы.*

1.5 Равносильные преобразования, сохраняющие структуру РКТ-матриц

Ограничимся рассмотрением матриц без нулевых строк. Ясно, что множество равносильных преобразований РКТ-матрицы исчерпывается левыми умножениями на некоторые неособенные матрицы. Выделим среди этих умножений преобразования, которые сохраняют структуру РКТ. Пусть G и G' — РКТ-матрицы. Обозначим через $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ и $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_p)$ образующую подматрицу и подматрицу расширения (см. (1.3.1)–(1.3.3)). Введем многочленную матрицу $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \ldots \gamma_p s^p$ (по определению $\gamma(s)$ двусторонне строчно-минимальна) и матрицу $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, $\varepsilon_i = \left(\begin{smallmatrix}\gamma_i \\ \delta_i\end{smallmatrix}\right)$. Число строк матрицы ε обозначим через σ. Аналогично определим величины γ', $\gamma'(s)$, ε', δ' σ' для G'.

Теорема 1.5.1. *Пусть* РКТ-*матрицы* G *и* G' *связаны равносильным преобразованием*

$$\exists\, P:\ \det P \neq 0\,, \quad PG = G'\,. \tag{1.5.1}$$

Тогда (*и только тогда*) *существует многочленная матрица* $\rho(s)$ *такая, что*

$$\det \rho(s) = \mathrm{const} \neq 0\,, \qquad \rho(s)\gamma(s) = \gamma'(s)\,, \tag{1.5.2}$$

и одновременно выполняются равенство $\sigma = \sigma'$ *и соотношение*

$$\exists \pi \in \mathbb{R}^{\sigma\times\sigma}\ :\quad \pi\varepsilon = \varepsilon'\,. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. Предположим, что существует матрица P такая, что $PG = G'$. Пронумеруем строки матрицы G двойными индексами (j,k) так, что $j \in \overline{1,r}$, $k \in \overline{1, N-q_r}$, где j соответствует номеру подматрицы G_j в (1.3.8), а k — номеру строки внутри G_j (отметим, что при доказательстве предложения 1.4.1 использовалась аналогичная нумерация). Таким же образом пронумеруем столбцы матрицы P:

$$P \doteq \left(\rho_{(1,1)}, \ldots, \rho_{(1,N-q_1)}, \ldots, \rho_{(r,1)}, \ldots, \rho_{(r,N-q_r)}\right).$$

Элемент с номером (i,l) в столбце $\rho_{(j,k)}$ обозначим через $\rho_{(i,l),(j,k)}$. Установим соответствие между матрицей P и некоторой многочленной матрицей $\rho(s)$ размера $r\times r$ по формуле

$$\rho_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{N-q_j} \rho_{(i,1),(j,k)} s^{k-1} \,. \tag{1.5.4}$$

Заметим, что в формуле (1.5.4) степени строк матрицы $\rho(s)$ ограничены сверху некоторыми числами, определяемыми через степени строк матрицы $\gamma(s)$. Действительно, согласно следствию 1.3.2 и предложению 1.6.7 матрицы $\gamma(s)$ и $\gamma'(s)$ имеют одни и те же степени строк:

$$\deg \rho_i(s)\gamma(s) = \deg \gamma'_i(s) = \deg \gamma_i(s), \qquad i \in \overline{1,r}\,,$$

где $\gamma_i(s)$ обозначает i-ю строку матрицы $\gamma(s)$. Отсюда получаем равенство $\sigma = \sigma'$ и унимодулярность матрицы $\rho(s)$, определенной по формуле (1.5.4). Таким образом, верна импликация (1.5.1) $\Rightarrow$ (1.5.2). Кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \deg \rho_{ij}(s) \in \overline{0, \deg\gamma_i(s) - \deg\gamma_j(s)}\,, &\quad \text{если} \quad \deg\gamma_i(s) \geqslant \deg\gamma_j(s)\,, \\ \deg \rho_{ij}(s) = 0\,, &\quad \text{если} \quad \deg\gamma_i(s) < \deg\gamma_j(s)\,. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Действительно, в противном случае матрица $\gamma(s)$ не может быть строчно-минимальной. В силу (1.5.4), (1.5.5) условие (1.5.2) равносильно равенству

$$\varphi\varepsilon = \gamma' \tag{1.5.6}$$

с некоторой числовой матрицей $\varphi \in \mathbb{R}^{r\times\sigma}$, составленной из коэффициентов многочленов $\rho_{ij}(s)$ (1.5.4). Остается дополнить матрицу φ до искомой матрицы $\pi \in \mathbb{R}^{\sigma\times\sigma}$, а уравнение (1.5.6) — до уравнения $\pi\varepsilon = \varepsilon'$. Это легко сделать, используя ограничение (1.5.5): достаточно заметить, что строки дополняющей подматрицы $\Delta\pi = \pi\backslash\varphi$ состоят из нулей и элементов некоторых строк матрицы φ, сдвинутых на несколько клеток вправо. Таким образом, (1.5.2) $\Leftrightarrow$ (1.5.6) $\Rightarrow$ (1.5.3).

Очевидна импликация (1.5.3) $\Leftrightarrow$ (1.5.1). Действительно, из равенства $\pi\varepsilon = \varepsilon'$ следует уравнение $\begin{pmatrix} \pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi \end{pmatrix} G^\dagger = G'^\dagger$ для клеточно-теплицевых матриц $G^\dagger$, $G'^\dagger$ вида (1.3.3). Отсюда легко получить уравнение $PG = G'$, удалив повторяющиеся строки матриц $G^\dagger$, $G'^\dagger$ и соответствующие им строки и столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi \end{pmatrix}$. В итоге получаем импликацию (1.5.1) $\Rightarrow$ (1.5.2) $\Rightarrow$ (1.5.3) $\Rightarrow$ (1.5.1), которая означает равносильность утверждений (1.5.1), (1.5.2), (1.5.3). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.5.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством равносильных преобразований* РКТ*-матрицы* G^+ *вида* (1.3.1)–(1.3.3) *и алгеброй левых умножений многочленной матрицы* $\gamma(s)$ *вида* (1.4.2) *на унимодулярные матрицы, сохраняющих свойство* (*двусторонней*) *строчной минимальности.*

Теорема 1.3.1 является ключевым утверждением для установления взаимно-однозначного соответствия между классом стационарных систем с конечными длинами траекторий и классом систем, описываемых РКТ-матрицами. Вместе с теоремой 1.5.1, которая описывает все равносильные преобразования РКТ-описаний, мы получаем возможность построить взаимно-однозначное соответствие между классами равносильных стационарных систем (моделей) с конечными длинами траекторий и алгебрами ассоциированных с ними многочленных матриц. Это позволяет корректно применить аналитический аппарат теории многочленных матриц к анализу систем с конечными интервалами наблюдения. Известные до настоящего времени способы перехода к многочленным представлениям стационарных систем существенно опирались на предположение бесконечности длины системных траекторий [19, 141, 174, 237, 268].

1.6 Приложение. Специальные формы многочленных матриц

Этот раздел носит справочный характер. Доказательства утверждений можно найти в [19, 170, 268].

Степенью многочленной строки $\alpha_i(s)$ размера $1 \times r$ называется наибольшая из степеней образующих ее элементов:

$$\deg \alpha_i(s) = \max \left\{ \deg \alpha_{ij}(s),\ j \in \overline{1, r} \right\}.$$

Пусть $\gamma(s)$ — многочленная $(r \times t)$-матрица, $r \leqslant t$, полного ранга r, т. е. строки матрицы $\gamma(s)$ линейно зависимы не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{C}$ или (равносильно) $s \in \mathbb{R}$. Пусть $\{p_1, \ldots, p_r\}$ — множество степеней строк матрицы $\gamma(s)$. Тогда $\gamma(s)$ допускает представление

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s^{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{p_r} \end{pmatrix} \left\{ \gamma_{[0]} + s^{-1}\gamma_{[-1]} + \ldots + s^{-p_0}\gamma_{[-p_0]} \right\}, \tag{1.6.1}$$

где $p_0 = \max\{p_1, \ldots, p_r\}$ и $\gamma_{[-i]}$, $i \in \overline{0, p_0}$, — числовые $(r \times t)$-матрицы.

Предложение 1.6.1. *Для произвольной* $(r \times t)$*-матрицы* $\gamma(s)$ *полного ранга* r *можно указать унимодулярную матрицу* $u(s)$ *такую, что сумма степеней строк произведения* $u(s)\gamma(s)$ *принимает наименьшее значение, равное максимальной степени среди всех* r*-миноров матрицы* $\gamma(s)$.

Предложение 1.6.2. *Сумма степеней строк произведения* $u(s)\gamma(s)$ *принимает наименьшее значение тогда (и только тогда), когда у числовой матрицы* $\gamma^*_{[0]}$ *в разложении* (1.6.1) *произведения* $u(s)\gamma(s) = \gamma^*(s)$ *строки линейно независимы.*

Определение 1.6.1. В условиях предложения 1.6.2 матрица $\gamma^*(s)$ называется строчно-минимальной (или минимальной по строкам) формой матрицы $\gamma(s)$. Степени строк матрицы $\gamma^*(s)$ — $\{q_1, \ldots, q_r\}$ — называются (строчными) индексами матрицы $\gamma(s)$. Без ограничения общности можно считать, что строки матрицы $\gamma^*(s)$ упорядочены по неубыванию степеней: $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$. В литературе для минимальных по строкам матриц также встречается название *собственные по строкам* [19, приложение N].

Предложение 1.6.3. *Индексы многочленной $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$ полного ранга r определены единственным образом.*

Пусть $\gamma(s)$ — многочленная $(r \times t)$-матрица, $r \leqslant t$, ранга $\tau \leqslant r$, и пусть $\{p_1, \ldots, p_r\}$ — множество степеней строк матрицы $\gamma(s)$. Тогда для $\gamma(s)$ имеет место представление (1.6.1).

Левым умножением на некоторую унимодулярную матрицу $w(s)$ можно привести $\gamma(s)$ к виду $w(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}(s); 0) = \gamma'(s)$, где $\overline{\gamma}(s)$ — подматрица размера $\tau \times t$ с линейно независимыми строками. В качестве $\gamma'(s)$ можно взять, например, каноническую форму на множестве левых элементарных преобразований [23].

Несложно показать, что подматрица $\overline{\gamma}(s)$ определена с точностью до левых элементарных преобразований. Для этого достаточно рассмотреть равенства $w_1(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}_1(s); 0)$, $w_2(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}_2(s); 0)$, из которых следует $(\overline{\gamma}_1(s); 0) = v(s)(\overline{\gamma}_2(s); 0)$, где $v(s)$ — унимодулярная матрица. Разбив $v(s)$ на клетки, $v(s) = \left(\begin{smallmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{smallmatrix}\right)$, получим $\overline{\gamma}_1(s) = v_{11}(s)\overline{\gamma}_2(s)$, $0 = v_{21}(s)\overline{\gamma}_2(s)$. Из последнего равенства в силу линейной независимости строк матрицы $\overline{\gamma}_2(s)$ вытекает $v_{21}(s) = 0$. Следовательно, $\det v(s) = \det v_{11}(s) \times$ $\times \det v_{22}(s)$. Поэтому матрица $v_{11}(s)$ унимодулярная вместе с $v(s)$, т. е. $\overline{\gamma}_1(s)$ и $\overline{\gamma}_2(s)$ связаны левыми элементарными преобразованиями.

Пусть q^* — максимальная степень миноров матрицы $\overline{\gamma}(s)$:

$$q^* = \max_{i \in \overline{1,r}} \max_{M_i} \deg M_i = \max_{M_\tau} \deg M_\tau,$$

где M_i обозначает произвольный минор порядка i матрицы $\overline{\gamma}(s)$. Ввиду вышесказанного заключаем, что число q^* для матрицы $\gamma(s)$ определено единственным образом, поскольку левые элементарные преобразования матрицы $\overline{\gamma}(s)$ полного ранга τ не изменяют τ-миноров.

Предложение 1.6.4. *Для произвольной $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, можно указать унимодулярную матрицу $u(s)$ такую, что сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ принимает наименьшее значение, равное q^*.*

Предложение 1.6.5. *Сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ имеет наименьшее значение q^*, если у числовой матрицы $\gamma^*_{[0]}$ в разложении (1.6.1) произведения $u(s)\gamma(s) = \gamma^*(s)$ ненулевые строки линейно независимы и на местах нулевых строк матрицы $\gamma^*_{[0]}$ во всех остальных матрицах $\gamma^*_{[-i]}$, $i = \overline{1, p_0}$, стоят также нулевые строки.*

Предложение 1.6.6. *Число ненулевых строк матрицы* $\gamma^*(s)$ *равно рангам матриц* $\gamma(s)$ *и* $\gamma^*(s)$.

Определение 1.6.2. В условиях предложения 1.6.6 матрица $\gamma^*(s)$ называется *строчно-приведенной* (или *приведенной по строкам*) формой матрицы $\gamma(s)$. Числовая матрица $\gamma_{[0]}$ в разложении (1.6.1) называется матрицей ведущих коэффициентов строк. Степени ненулевых строк матрицы $\gamma^*(s)$ — $\{q_1, \ldots, q_\tau\}$ — называются (строчными) индексами матрицы $\gamma(s)$. Без ограничения общности можно считать, что ненулевые строки матрицы $\gamma^*(s)$ упорядочены по неубыванию степеней: $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$.

Предложение 1.6.7. *Индексы многочленной* $(r\times t)$*-матрицы* $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, *определены единственным образом.*

Определение 1.6.3. Многочленная $(r \times t)$-матрица $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, называется *строчно-минимальной слева* (*с младшего конца*), если в разложении

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p$$

строки числовой матрицы γ_0 линейно независимы.

Для приведения произвольной матрицы $\gamma(s)$ к равносильной строчно-минимальной слева форме нужно расширить множество равносильных преобразований. Наряду с элементарными левыми преобразованиями нужно считать равносильными преобразованиями умножения и деления строк на s. Чтобы преобразованные матрицы оставались многочленными, достаточно ограничиться делениями строк на общий сомножитель вида s^k, $k \geqslant 0$, у элементов строки. Если s — оператор сдвига, то такое деление соответствует сдвигу уравнения строки на k клеток влево. Ясно, что указанные преобразования приводят к системам, слабо равносильным исходной системе в смысле определения 1.4.5.

Замечание 1.6.1. Для систем с непрерывным временем, где s выступает в роли оператора дифференцирования, умножения строк на s или на s^{-1} не являются равносильными преобразованиями в слабом смысле.

Укажем алгоритм построения строчно-минимальной слева формы. Обозначим $\zeta \doteq s^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma(\zeta) &= \gamma_0 + \gamma_1\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_p\zeta^{-p} = \\ &= \zeta^{-p}\left(\gamma_p + \gamma_{p-1}\zeta^1 + \ldots + \gamma_0\zeta^p\right).\end{aligned}$$

Определим матрицу

$$\gamma'(\zeta) \doteq \zeta^p\gamma(\zeta) = \gamma_p + \gamma_{p-1}\zeta^1 + \ldots + \gamma_0\zeta^p.$$

Согласно предложению 1.6.4, всегда можно привести эту матрицу в равносильную строчно-минимальную форму:

$$\gamma'(\zeta) \sim \gamma'^{\#}(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^{p'_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta^{p'_r} \end{pmatrix} \left\{ \gamma'_{[0]} + \zeta^{-1}\gamma'_{[-1]} + \ldots + \zeta^{-p'_0}\gamma'_{[-p'_0]} \right\},$$

где числовая матрица $\gamma'_{[0]}$ имеет линейно независимые строки и $p'_i \leqslant p$ — строчные индексы $\gamma'(\zeta)$ (определение 1.6.1). Обозначим правый сомножитель в последнем разложении через $\gamma^{\#}(\zeta)$:

$$\gamma^{\#}(\zeta) \doteq \gamma'_{[0]} + \zeta^{-1}\gamma'_{[-1]} + \ldots + \zeta^{-p'_0}\gamma'_{[-p'_0]}.$$

Нетрудно увидеть, что матрица

$$\gamma^{\#}(s) \doteq \gamma'_{[0]} + s\gamma'_{[-1]} + \ldots + s^{p'_0}\gamma'_{[-p'_0]}$$

строчно-минимальна слева согласно определению 1.6.3, и описание с этой матрицей слабо-равносильно описанию с исходной матрицей $\gamma(s)$.

Определение 1.6.4. Многочленная $(r \times t)$-матрица $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, называется *двусторонне строчно-минимальной*, если она строчно-минимальна и одновременно строчно-минимальна слева, т. е. в разложении строчно-минимальной матрицы $\gamma(s)$

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p$$

строки числовой матрицы γ_0 линейно независимы. Если ранг матрицы $\gamma(s)$ не максимален, для нее аналогично определению 1.6.2 определяется *двусторонне строчно-приведенная* (или двусторонне приведенная по строкам) форма.

Предложение 1.6.8. *Левые элементарные преобразования сохраняют свойство левой строчной минимальности.*

Доказательство. Достаточно заметить, что матрица $u(s)$ элементарного преобразования [23, с. 135] всегда может быть представлена в виде суммы $u(s) = u_0 + u_1 s$, где u_0 и u_1 — числовые матрицы, и u_0 неособенная. Как следствие, в произведении

$$u(s)\gamma(s) = (u_0 + u_1 s)(\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p) \doteq \gamma'_0 + \gamma'_1 s + \ldots$$

числовая матрица $\gamma'_0 = u_0\gamma_0$ имеет (или не имеет) линейно независимые строки вместе с γ_0. Предложение доказано. □

В итоге мы получаем, что для приведения произвольной "невертикальной" матрицы $\gamma(s)$ к (слабо-) равносильной двусторонней строчно-минимальной форме $\gamma^{@}(s)$ достаточно привести $\gamma(s)$ описанным выше способом к левой строчно-минимальной форме

$\gamma^{\#}(s)$ и затем левыми элементарными преобразованиями привести $\gamma^{\#}(s)$ к строчно-минимальной форме $\gamma^{@}(s)$, которая и будет согласно предложению 1.6.8 двусторонней строчно-минимальной.

Замечание. В приложении N статьи [19] понятие двусторонней собственности по строкам (т. е. двусторонней строчно-минимальности), вводилось на множестве многочленных матриц от положительных и отрицательных степеней s. Такой подход выглядит более изящным, но предполагает, вообще говоря, определение динамических моделей не как подмножеств конечномерного пространства $\mathbb{R}^{nN}$, а как подмножеств пространства бесконечных последовательностей $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}}$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Глава 2

Параметрическая идентифицируемость

В научном понимании то, что не может быть идентифицировано,
не имеет конкретного существования
(Р. Калман (1985) [48])

Во 2-й главе исследуется идентифицируемость параметров линейных динамических систем — сначала без возмущений, а затем со стохастическими возмущениями. Под идентифицируемостью в детерминированном случае (т. е. без возмущений) понимается одноэлементность множества допустимых значений параметра при заданном множестве всех решений системы. В стохастическом случае роль "множества всех решений" играет распределение наблюдаемых переменных.

Сначала рассматриваются вопросы так называемой структурной идентифицируемости, т. е. аспекты, связанные с влиянием расположения зависимых от параметра элементов матрицы системы на идентифицируемость. Изучаются системы нулевого порядка, используемые в эконометрике. Для них доказаны новые теоремы: о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для сохранения максимального ранга матрицы системы на множестве значений параметров (теорема 2.2.4); о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для обеспечения структурной идентифицируемости на множестве значений параметров (теорема 2.2.5).

Для динамических систем порядка $p > 0$ получены новые самые слабые из известных достаточные условия идентифицируемости в виде ограничений на ранги подматриц малой расширенной матрицы системы (теорема 2.3.1). Описан широкий класс локально-свободных параметризаций, для которых полученные в диссертации ранговые условия идентифицируемости становятся необходимыми и достаточными (теорема 2.3.2).

Отдельно исследован случай полином-операторных параметризаций — когда вместо оператора сдвига s стоит заданный многочлен $\varphi(s)$, например $\varphi(s) = [(s-1)/h]^p$. Впервые показано, что для таких систем сохранят силу все результаты по идентифицируемости, полученные для случая $\varphi(s) \equiv s$. Также показано, что благодаря применяемой технике доказательств полученные результаты по идентифицируемости без существенных изменений переносятся на системы с непрерывным временем, когда символ s понимается как оператор дифференцирования.

Далее в этой главе исследуется идентифицируемость линейных систем со стохастическими возмущениями различных типов. В стохастическом случае под идентифицируемостью понимается единственность восстановления параметра по заданному вероятностному распределению наблюдаемых переменных системы, см. Т. Розенберг (1971) [238]. Получен новый критерий идентифицируемости в виде неразрешимости матричного уравнения специального вида. Этот критерий при условии нормальности распределений становится необходимым и достаточным (теорема 2.5.1). Описаны частные случаи, в которых полученный критерий совпадает с ранговыми условиями идентифицируемости для детерминированных систем. Показано, что на основании сравнения сложности условий идентифицируемости можно предложить новую классификацию стохастических динамических систем, отличающуюся от известной классификации Л. Льюнга (1987) [195].

2.1 Определения

Изложим принятую в диссертации систему определений. Другие подходы можно найти в [10,25,28,195,216]. В частности, в монографии [10] исследовалась локальная идентифицируемость переменного параметра системы линейных дифференциальных уравнений по наблюдениям на концах промежутка через построение *функций чувствительности* значений на концах премежутка к малым изменениям параметра. Используемый нами подход к исследованию идентифицируемости можно назвать методом *равносильных преобразований*, зарубежный термин — similarity transformation approach [253]. Название происходит от преобразования подобия $A' = PAP^{-1}$. Как следует из теоремы 1.2.1, преобразование (1.2.1) исчерпывает все множество равносильных преобразований линейной системы в форме 1-го порядка (1.1.2). Необходимым условием идентифицируемости является условие однозначной вычислимости параметра системы по заданному множеству ее решений; например, из равенства $\mathcal{N}(G_\theta) = \mathcal{N}(G_\xi)$ должно следовать $\theta = \xi$. Чтобы установить единственность, нужно уметь обнаруживать факт совпадения $\mathcal{N}(G_\theta) = \mathcal{N}(G_\xi)$. Множество всех равносильных линейных систем описывается представлениями группы GL_n:

$$E(G) \doteq \{G' : \mathcal{N}(G') = \mathcal{N}(G)\} = \{G' = PG :\ P \in \mathrm{GL}_n\}, \tag{2.1.1}$$

$$E(A,B,C,D) = \left\{(PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D) :\ P \in \mathrm{GL}_n\right\}. \tag{2.1.2}$$

Поэтому совпадение $\mathcal{N}(G_\theta) = \mathcal{N}(G_\xi)$ означает непустое пересечение орбит $E(G_\theta) \cap E(G_\xi) \neq \varnothing$, т. е. оно равносильно равенству

$$PG_\theta = QG_\xi \tag{2.1.3}$$

для некоторых неособенных матриц P, Q, или в случае систем в форме 1-го порядка

$$PA_\theta P^{-1} = QA_\xi Q^{-1}, \qquad PB_\theta = QB_\xi, \qquad C_\theta P^{-1} = C_\xi Q^{-1}.$$

Проверка разрешимости таких уравнений обычно сводится к конструктивным полиномиальным алгоритмам.

По-видимому, первыми применили метод равносильных преобразований К. Гловер и Я. Виллемс (1974); они исследовали идентифицируемость систем в нормальной форме 1-го порядка [160]. В нашей стране в этом направлении много новых результатов получила Т. В. Авдеенко [2]. Этот метод также систематически использовал Э. Уолтер в своей монографии (1982) [263]. С. Важда и Х. Рабиц (1989) [252, 253] использовали название "подход на основе изоморфизма состояний" (state isomorphism approach) или "подход на основе преобразования подобия" (similarity transformation approach), применяя его в том числе и для нелинейных систем. Мы придерживаемся более общего названия "метод равносильных преобразований", в виду того, что варианты, предложенные С.Важдой, относятся к равносильным преобразованиям линейных или линеаризованных систем только в нормальной форме 1-го порядка.

В диссертации используется метод равносильных преобразований по отношению к линейным системам без переменных состояния. Множество равносильных систем (2.1.1) здесь устроено проще, чем аналогичное множество (2.1.2) для систем с переменными состояния, поэтому получаемые в диссертации результаты имеют более исчерпывающий характер. Б. Г. Ворчик (1985) был, по-видимому, первым, кто применил метод равносильных преобразований к системам без переменных состояния [22]. В его работах исследовались стохастические системы; условие идентифицируемости сводилось к неразрешимости уравнений для многочленных матриц $\rho(s)\varphi_\theta(s) \equiv \varphi_\xi(s)$ при несовпадающих значениях параметров $\theta \neq \xi$. Многочленные уравнения, вообще говоря, неконструктивны в том смысле, что для проверки неразрешимости нужно применять символьные вычисления, результат которых неочевиден. Но для матриц малой размерности проблема по сути была решена.

Мы идем в направлении работ Б. Г. Ворчика, устанавливая равносильность многочленных уравнений идентифицируемости некоторым уравнениям вида (2.1.3) со специально определенными матрицами. Затем указываем широкий класс параметризаций, при которых уравнения (2.1.3) равносильны конечному набору условий на ранги специальных подматриц. Тем самым проблема проверки идентифицируемости сводится к полиномиальным конструктивным алгоритмам проверки рангов конечного (небольшого) числа подматриц. Кроме того, показываем, что посредством анализа клеточно-теплицевой структуры матриц динамических систем удается установить равносильность многочленных уравнений идентифицируемости уравнениям вида (2.1.3) с числовыми матрицами без использования преобразования Лапласа и без обращения к актуально бесконечным интервалам наблюдения. Этот момент является существенным для обоснования корректности применяемого нами способа анализа идентифицируемости на конечных интервалах наблюдения. Благодаря такой технике удается снять ограничение на управляемость и устойчивость исследуемых систем.

Сначала будем рассматривать системы с матрицами общего вида, без ограничений на расположение нулевых элементов; затем рассматриваем РКТ-матрицы, соответствующие динамическим разностным системам порядка $p > 0$.

Итак, задачу идентификации представим как восстановление значений параметров математической модели по измерениям характеристик моделируемого объекта.

Пусть характеристики являются точками $z_{(1)}, \ldots, z_{(L)}$ в конечномерном евклидовом пространстве: $\left\{z_{(1)}, \ldots, z_{(L)}\right\} \subset \mathbb{R}^l$. *Моделью* (объекта, явления) назовем некоторое заданное линейное многообразие характеристик $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^l$. Таким образом, мы рассматриваем только линейные модели. Если объект точно описывается некоторой линейной моделью, и измерения характеристик выполняются точно, то существует линейное многообразие $\mathcal{M}_*$, в которое укладываются все измерения: $\left\{z_{(1)}, \ldots, z_{(L)}\right\} \subset \mathcal{M}_*$.

Описанием линейной модели $\mathcal{M}$ назовем уравнение $Az = 0$ с матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times l}$ такое, что множество его решений совпадает с $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} = \left\{z \in \mathbb{R}^l :\ Az = 0\right\}$, или $\mathcal{M} = \mathcal{N}(A)$.

Пусть теперь матрица $A = A_\theta$ зависит от векторного параметра θ в некоторой области $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$, $v \leqslant nl$. Определим *множество описаний*

$$\mathfrak{A}_\Theta \doteq \{A_\theta :\ \theta \in \Theta\}.$$

Отображение

$$\tau :\ \theta \leftrightarrow A_\theta :\ \Theta \leftrightarrow \mathfrak{A}_\Theta, \tag{2.1.4}$$

назовем *параметризацией* множества описаний. Везде далее это отображение предполагается взаимно-однозначным и сильно дифференцируемым в смысле Фреше.

Для каждого значения параметра θ уравнение

$$A_\theta z = 0 \tag{2.1.5}$$

задает модель

$$\mathcal{M}_\theta \doteq \mathcal{N}(A_\theta). \tag{2.1.6}$$

Множество моделей $\mathcal{M}_\theta$ при различных $\theta \in \Theta$ обозначим $\mathfrak{M}_\Theta \doteq \{\mathcal{M}_\theta :\ \theta \in \Theta\}$. Отображение

$$\mu :\ \Theta \to \mathfrak{M}_\Theta \tag{2.1.7}$$

называем *параметризацией множества моделей* $\mathfrak{M}_\Theta$.

Определение 2.1.1. Описания (2.1.5) A_α, A_β *неразличимы* (или *равносильны*, *эквивалентны*) $(A_\alpha \sim A_\beta)$, если совпадают соответствующие им модельные многообразия: $A_\alpha \sim A_\beta \Leftrightarrow \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\beta$. Иногда будем говорить *параметры* α, β *различимы*, имея в виду, что различимы описания A_α, A_β.

Обозначим $\nu: \mathbb{R}^{n\times l} \mapsto 2^{\mathbb{R}^l}$ отображение, которое сопоставляет матрице $A \in \mathbb{R}^{n\times l}$ ее правое нуль-пространство $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{R}^l$. Параметризация μ является суперпозицией $\mu = \nu \circ \tau$.

Определение 2.1.2. Параметризации μ и τ множеств $\mathfrak{M}_\Theta$ и $\mathfrak{A}_\Theta$ называются *корректными*, если отображение $\mu = \nu \circ \tau$ взаимно-однозначно. Иногда будем говорить *модель* $\mathcal{M}_\theta$ *корректна* или *описание* A_θ *корректно*, имея в виду корректность параметризаций μ или τ. Если модель или описание корректны всюду в Θ за исключением множества точек меры ноль, то говорится о *корректности структуры*, *структурной корректности* или *структурной идентифицируемости.*

Обратим внимание, что данное определение связывает корректность с единственностью вычисления параметра θ по предъявленному линейному многообразию $\mathcal{M}_\theta \subset \mathbb{R}^l$. На практике это многообразие может быть представлено набором базисных векторов. Устойчивость решения θ, если оно единственно, следует из непрерывности параметризации τ при условии замкнутости множества Θ. Количественные характеристики устойчивости исследуются в 5-й главе диссертации.

Пример. Рассмотрим частный случай системы (2.1.5) с матрицей размера $1 \times l$

$$A_\theta \doteq \Big(a_1(\theta), \quad \ldots, \quad a_l(\theta)\Big). \tag{2.1.8}$$

Модельное многообразие $\mathcal{M}_\theta$ (см. (2.1.6)) для случая (2.1.8) есть гиперплоскость размерности $l-1$. Пусть задан вектор b, являющийся нормалью к $\mathcal{M}_\theta$. Чтобы вычислить параметр θ, нужно решить уравнение $A_\theta = \lambda b$ относительно неизвестных $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\theta \in \Theta$. Решение этой задачи θ единственно (т. е. параметризация τ (2.1.4) множества описаний (2.1.8) корректна) тогда и только тогда, когда уравнение $A_\theta = \lambda A_\xi$ относительно неизвестных $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\theta, \xi \in \Theta$ имеет единственное решение $\lambda = 1$ и $\xi = \theta$. Несложно увидеть, что сформулированное условие корректности выполняется, если хотя бы один элемент $a_i(\theta) = a_i$ не зависит от θ.

Заметим, что исследуемая проблема восстановления параметра θ по модельному многообразию $\mathcal{M}_\theta$, как и связанное с ней понятие корректности параметризаций μ и τ, являются достаточно искусственными. Они играют вспомогательную роль по отношению к более общей задаче идентификации вектора параметров θ по предъявленному множеству измерений $\bar{\mathcal{M}}$ из борелевской σ-алгебры подмножеств $\mathbb{R}^l$, такому что $\forall \theta \in \Theta \;\; \bar{\mathcal{M}} \nsubseteq \mathcal{M}_\theta$ (см. [33, 51, 120, 195, 216]). В частности, корректность параметризаций μ и τ является необходимым условием существования единственного решения задачи идентификации $\bar{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_\theta \to \theta$ (см. раздел 3.2). Подробные обсуждения этого вопроса можно найти в [22, 195, 216].

2.2 Системы нулевого порядка

Рассмотрим условия корректности линейных моделей вида (2.1.5) и (2.1.6) без специальных ограничений на структуру матрицы A_θ. Корректность в точке θ понимается как однозначная вычислимость параметра θ по множеству $\mathcal{M}_\theta = \mathcal{N}(A_\theta)$ решений системы (2.1.5).

Модели (2.1.5), (2.1.6) находят широкое применение в эконометрике [117]. Для обеспечения корректности ряд авторов ([33, 51, 120, 195], [114, пар.2.2]) ограничиваются наложением достаточного условия наличия в A_θ неособенной подматрицы из фиксированных столбцов (не зависящих от θ). Это условие оказывается весьма сильным. Оно исключает возможность рассмотрения моделей со сложным расположением нефиксированных коэффициентов, что не позволяет указать общие приемы анализа идентифицируемости нелинейных моделей по линейному приближению. Существенно лучшие результаты можно получить методом равносильных преобразований. Применительно к моделям (2.1.5) и (2.1.6) критерий корректности состоит в неразрешимости уравнения

$$PA_\theta = A_\xi \tag{2.2.1}$$

относительно матрицы $P \neq I$ и вектора параметров $\xi \in \Theta \setminus \{\theta\}$. Условие (2.2.1) является необходимым и достаточным, что с алгебраической точки зрения почти очевидно (предложение 2.2.1 ниже). Тем не менее, применение критерия (2.2.1), как правило, связано с громоздкими вычислениями, особенно в случае систем (2.1.5) с большим числом уравнений. Нашей целью является исследование (2.2.1) для получения критерия корректности, более близкого к необходимому, чем упомянутое выше условие наличия неособенной фиксированной подматрицы из столбцов, и в то же время более простого, чем (2.2.1).

В результате будут получены простые достаточные условия корректности линейных алгебраических моделей — систем линейных алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра. Показано, что полученные условия являются необходимыми и достаточными на широком классе локально-свободных параметризаций. Будут доказаны теоремы о наименьшем числе фиксированных (т. е. не зависящих от параметра) коэффициентов а) в корректных и б) "невырождаемых" моделях со "свободной" параметризацией.

2.2.1 Определения и результаты

Введем понятие корректности параметризаций μ и τ на паре подмножеств Θ.

Определение 2.2.1. Параметризации μ (2.1.7) и τ (2.1.4) *корректны на паре* (A, B) *подмножеств* Θ ((A, B)*-корректны*), если $\forall \alpha \in A \subseteq \Theta$ $\forall \beta \in B \subseteq \Theta$ из $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\beta$ следует $\alpha = \beta$ и $A \cap B \neq \emptyset$. Корректность на паре $(\theta, V(\theta))$ для некоторой окрестности $V(\theta) \subset \Theta$ точки θ называется *локальной корректностью в точке* θ, на паре (θ, Θ) — *глобальной корректностью в точке* θ, и на паре (Θ, Θ) — корректность по определению 2.1.2 (т. е. *глобальная* корректность).

Заметим, что $(A, B) = (B, A)$, и если $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$, то (A, B) влечет (A', B'). Используя соотношения $A = \cup_{\theta \in A} \{\theta\}$, $(A, B) = \&_{\theta \in A}(\theta, B)$, можно свести корректность на паре множеств (A, B) к корректности в точке, т. е. к (θ, B)- или (θ, Θ)-корректности.

Относительно множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}$ моделей и описаний предполагается:

а) все модели $\mathcal{M}_\theta \in \mathfrak{M}$ (2.1.6) совпадают по размерности:

$$\forall \theta, \xi \in \Theta \quad \dim \mathcal{M}_\theta = \dim \mathcal{M}_\xi; \tag{2.2.2}$$

б) все описания $A_\theta \in \mathfrak{A}$ (2.1.5) *минимальны*, т. е. содержат наименьшее возможное число строк

$$n = \operatorname{codim} \mathcal{M}_\theta. \tag{2.2.3}$$

Сформулируем условия 2.2.2 и 2.2.3 в виде тождества

$$\forall \theta \in \Theta \quad \operatorname{rank} A_\theta = n. \tag{2.2.4}$$

Теорема 2.2.1. (Достаточное условие глобальной корректности в точке). *Пусть выполнено условие* (2.2.4), *и пусть для всех* $i = \overline{1, n}$ *для некоторого* θ *имеет место равенство* $\operatorname{rank} A_{i\theta} = n$, *где* $A_{i\theta}$ *есть подматрица из столбцов* A_θ, *на* i*-м месте у которых стоит не зависящий от* θ (*фиксированный*) *элемент. Тогда параметризации* μ (2.1.7) *и* τ (2.1.4) *глобально корректны в точке* θ.

Условие корректности в теореме 2.2.1 не является необходимым (см. пример 3 в разделе 2.2.3.3) но становится таковым, если параметризация (2.1.4) принадлежит некоторому широкому классу. Опишем этот класс параметризаций.

Обозначим $\mathcal{D}(A_\theta)$ множество "допустимых приращений" матрицы A_θ:

$$\mathcal{D}(A_\theta) \doteq \{A_\alpha - A_\theta \,:\, \alpha \in \Theta\}.$$

И пусть $\mathcal{V}(A_\theta) \subset \mathbb{R}^{n \times l}$ — множество всех матриц с числом строк и столбцов как в A_θ, с нулями на местах фиксированных элементов A_θ. Очевидно, $\mathcal{V}(A_\theta)$ есть линейное подпространство с нулем $0_{n \times l}$, и для всех $\theta \in \Theta$ множество $\mathcal{D}(A_\theta)$ вложено в $\mathcal{V}(A_\theta)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнено* (2.2.4) *и параметризация* τ (2.1.4) *такова, что любой луч в пространстве матриц* $\mathcal{V}(A_\theta)$ *с началом в нуле* $0_{n \times l}$ *пересекает множество* $\mathcal{D}(A_\theta) \setminus \{0_{n \times l}\}$, *то есть* $\forall X \in \mathcal{V}(A_\theta) \setminus \{0_{n \times l}\} \;\; \exists \lambda \in \mathbb{R}^1 \;\; \lambda X \in \mathcal{D}(A_\theta) \setminus \{0_{n \times l}\}$. *Тогда условия глобальной корректности в точке* θ *из теоремы 2.2.1 являются необходимыми и достаточными.*

Определение 2.2.2. Параметризация τ (2.1.4) называется *открытой* (*локально-свободной*), если только для всех $\theta \in \Theta$ множество $\mathcal{D}(A_\theta)$ открыто в $\mathcal{V}(A_\theta)$.

Теорема 2.2.3. *Для локально-свободных параметризаций условия теоремы 2.2.1 являются необходимыми и достаточными.*

Определение 2.2.3. Параметризация τ (2.1.4) называется *свободной* (*независимой*), если только $\mathcal{D}(A_\theta) = \mathcal{V}(A_\theta)$. Будем обозначать: $A_\theta \in$ СП.

Заметим, что в данном определении достаточно существования хотя бы одной точки $\theta \in \Theta$, в которой $\mathcal{D}(A_\theta) = \mathcal{V}(A_\theta)$. Это влечет равенство $\mathcal{D}(A_\theta) = \mathcal{V}(A_\theta)$ всюду в Θ (для доказательства следует рассмотреть невырожденную замену переменных $\theta \leftrightarrow \delta$, где $\delta \in \mathbb{R}^v$ есть вектор всех зависящих от θ элементов A_θ, и учесть изоморфизм пространств $\Theta \leftrightarrow \mathbb{R}^v$ и $\mathcal{V}(A_\theta)$).

Очевидно, все независимые (свободные) параметризации являются в то же время и локально-свободными (открытыми).

Обозначим элементы матрицы A_θ, которые фиксированы (т. е. не зависят от θ) и в то же время не равны нулю, символом x. Элементы, которые зависят от θ, обозначим символом y.

Пусть параметризация τ (2.1.4) свободная. Тогда условие (2.2.4) налагает ограничение снизу на число фиксированных элементов в матрице A_θ.

Теорема 2.2.4. *Пусть $A_\theta \in$ СП и выполнено* (2.2.4). *Тогда число фиксированных элементов в A_θ не меньше $n(n+1)/2$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда все столбцы A_θ, в которых есть фиксированные элементы, образуют подматрицу, приводимую перестановкой строк и столбцов к виду $\begin{pmatrix} x & & y \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}$, где "$0$" — треугольник из фиксированных нулей, "$x \dots x$" — диагональ из фиксированных ненулевых элементов, "y" — треугольник из свободных элементов.*

Другими словами, если фиксированных элементов меньше $n(n+1)/2$, или их число равно $n(n+1)/2$, но значения и расположение не соответствуют условию теоремы, то всегда найдется пара точек $\alpha, \beta \in \Theta$, таких что $\operatorname{rank} A_\alpha < \operatorname{rank} A_\beta$, т. е. нарушается условие (2.2.4).

Следующая теорема показывает, какие ограничения на свободные параметризации налагает условие глобальной корректности.

Теорема 2.2.5. *Пусть $A_\theta \in$ СП, выполнено* (2.2.4), *и параметризация τ* (2.1.4) *глобально корректна. Тогда число фиксированных элементов в A_θ не меньше n^2, и равенство достигается тогда и только тогда, когда все такие элементы в A_θ расположены один под другим, образуя неособенную подматрицу $n \times n$.*

Доказательство теорем 2.2.4 и 2.2.5 опубликовано автором в [198]. Это доказательство неожиданно оказывается весьма непростым и здесь не приводится.

2.2.2 Доказательство теорем 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3

В этом разделе всюду предполагаем, что выполнено условие (2.2.4).

Предложение 2.2.1. *Два описания* A_α, A_β (2.1.5) *задают одну и ту же модель* $\mathcal{M}_\theta$ (2.1.6) (*неразличимы*) *тогда и только тогда, когда существует неособенная матрица* P, *такая что* $PA_\alpha = A_\beta$.

Доказательство. Поскольку матрица P неособенная, из $PA_\alpha = A_\beta$ следует $\mathcal{N}(A_\alpha) = \mathcal{N}(A_\beta) = \mathcal{M}_\theta$. Обратно, пусть $\mathcal{N}(A_\alpha) = \mathcal{N}(A_\beta)$. Ввиду условия (2.2.4) строки матриц A_α, A_β образуют базисы подпространств соответственно $\mathbb{R}^l/\mathcal{N}(A_\alpha)$ и $\mathbb{R}^l/\mathcal{N}(A_\beta)$. Эти подпространства совпадают, поэтому $PA_\alpha = A_\beta$. □

Следствие. *Параметризация* τ (2.1.4) (A, B)*-корректна тогда и только тогда, когда для любых* $\alpha \in A \subseteq \Theta$ *и* $\beta \in B \subseteq \Theta$ *условие* $PA_\alpha = A_\beta$ *влечет* $P = I$, $\alpha = \beta$, $A \cap B \neq \emptyset$.

Нам понадобится также обращенный вариант следствия:

$$\neg(A, B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in A \quad \exists\, \beta \in B \setminus \{\alpha\} \quad \exists\, P \neq I \quad PA_\alpha = A_\beta.$$

Ясно, что достаточные условия (A, B)-корректности можно получать как необходимые условия для отрицания $\neg(A, B)$. Этим путем мы и пойдем далее.

Для доказательства теоремы 2.2.1 построим цепочку вспомогательных утверждений.

Через M_n обозначим множество квадратных матриц $n \times n$, и GL_n — подмножество неособенных в M_n.

Лемма 2.2.1. *Уравнение* $PA_\alpha = A_\beta$ *разрешимо относительно* $P \in \mathrm{GL}_n$ *и* $\beta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда* $\exists\, Q \in \mathrm{M}_n \;\; QA_\alpha \in \mathcal{D}(A_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $PA_\alpha = A_\beta$ и $\beta \in \Theta$, тогда $(P - I)A_\alpha = (A_\beta - A_\alpha) \in \mathcal{D}(A_\alpha)$, то есть $Q = P - I$. Обратно, если $QA_\alpha = A_\beta - A_\alpha \in \mathcal{D}(A_\alpha)$, то матрица $P = Q + I$ неособенная в силу свойства (2.2.4). □

Следствие. (*Эквивалент свойства* $\neg(\theta, \Theta)$).

$$\begin{aligned} \neg(\theta, \Theta) \quad &\Leftrightarrow \;\; \exists\, \xi \in \Theta \setminus \{\theta\} \quad \exists\, P \in \mathrm{GL}_n \setminus \{I\} \quad PA_\theta = A_\xi \\ &\Leftrightarrow \;\; \exists\, Q \in \mathrm{M}_n \setminus \{0_{n\times n}\} \quad QA_\theta \in \mathcal{D}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\}. \end{aligned}$$

Лемма 2.2.2. $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n \quad \exists\, \xi \in \Theta \quad PA_\theta = A_\xi \quad \Rightarrow \quad \exists\, Q \in \mathrm{M}_n \quad QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta)$.

Доказательство. Следует из леммы 2.2.1 и вложения $\mathcal{D}(A_\theta) \subseteq \mathcal{V}(A_\theta)$. □

Следствие. (*Необходимое условие* $\neg(\theta, \Theta)$).

$$\neg(\theta, \Theta) \quad \Rightarrow \quad \exists\, Q \in \mathrm{M}_n \setminus \{0_{n\times n}\} \quad QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\}.$$

Лемма 2.2.3. (*Эквивалент необходимого условия* $\neg(\theta, \Theta)$).

$$\exists\, Q \in \mathrm{M}_n \setminus \{0_{n\times n}\} \quad QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, i \in \overline{1, n} \quad \operatorname{rank} A_{i\theta} < n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть i — номер одной из ненулевых строк произведения QA_θ, и q_i — i-я строка Q. Очевидно, $q_i \neq 0$ и $q_i A_{i\theta} = 0$ (по определению $\mathcal{V}(A_\theta)$). Следовательно, $\operatorname{rank} A_{i\theta} < n$. Достаточность. Пусть $\operatorname{rank} A_{i\theta} < n$. Тогда $\exists\, q \neq 0 \quad qA_{i\theta} = 0$. Пусть матрица $Q \in \mathrm{M}_n \setminus \{0_{n\times n}\}$ состоит из нулей и вектора q на месте i-й строки. Тогда $QA_{i\theta} = 0$ и $QA_\theta \neq 0$, поскольку $\operatorname{rank} A_\theta = n$ в силу условия (2.2.4). Следовательно, $QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\}$. □

Из леммы 2.2.3 сразу следует теорема 2.2.1.

Доказательство теоремы 2.2.2. Достаточность следует из теоремы 2.2.1. Покажем необходимость. От противного, пусть (θ, Θ), и $\exists\, i \in \overline{1,n} \quad \operatorname{rank} A_{i\theta} < n$. Тогда $\exists\, Q \in \mathrm{M}_n \setminus \{0_{n\times n}\} \quad QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\}$ (лемма 2.2.3). По условию теоремы, для $QA_\theta \in \mathcal{V}(A_\theta)$ существует $\lambda \in \mathbb{R}^1 \quad \lambda QA_\theta \in \mathcal{D}(A_\theta) \setminus \{0_{n\times l}\}$. Тогда по лемме 2.2.1 $\exists\, P = \lambda Q + I \in \mathrm{GL}_n \setminus \{I\} \quad \exists\, \xi \in \Theta \setminus \{\theta\} \quad PA_\theta = A_\xi$, то есть $\neg(\theta, \Theta)$. Противоречие доказывает теорему. □

Доказательство теоремы 2.2.3. По определению локально-независимой параметризации, $\mathcal{D}(A_\theta)$ открыто в $\mathcal{V}(A_\theta)$. Следовательно, $\mathcal{D}(A_\theta)$ содержит вместе с нулем $0_{n\times l}$ некоторую выколотую его окрестность $V_0 \subset \mathcal{V}(A_\theta)$. Тогда любой луч в пространстве $\mathcal{V}(A_\theta)$ из нуля $0_{n\times l}$ пересекает $\mathcal{D}(A_\theta)$. Далее теорема 2.2.2. Теорема 2.2.3 доказана. □

2.2.3 Дополнение. Примеры к теоремам 2.2.1, 2.2.3–2.2.5

Приведем примеры, иллюстрирующие утверждения теорем 2.2.1, 2.2.3–2.2.5.

Заметим, что все матрицы в примерах могут быть видоизменены добавлением столбцов из свободных элементов. Допускаются также произвольные перестановки строк и столбцов.

Свободные элементы условимся обозначать малыми латинскими буквами.

2.2.3.1 Пример 1

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 2 & 3 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \in \text{СП}.$$

Праметризация A_θ глобально корректна (Θ, Θ), поскольку для всех значений параметра $\theta \doteq (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ выполнены условия теорем 2.2.1 и 2.2.3:

$$A_{1\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix}, \quad A_{2\theta} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}, \quad A_{3\theta} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 2 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

для любого $i \in \overline{1,3} \quad \operatorname{rank} A_{i\theta} = \max = 3$. Отметим, что в A_θ нет фиксированной неособенной подматрицы наибольшего размера 3×3.

2.2.3.2 Пример 2

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & a & b & e & 3 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \in \text{СП}.$$

Нарушены условия теоремы 3:

$$A_{1\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} A_1 = 2 < \max = 3.$$

Глобальная корректность не имеет места: уравнение $PA_\theta = A_\xi$ разрешимо относительно $P \neq I$, $\xi \in \Theta \setminus \{\theta\}$, $\theta \doteq (a; b; c; d; e)$: $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \cdot d & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $x \in \mathbb{R}^1$ (см. (2.2.1) и предложение 2.2.1).

2.2.3.3 Пример 3

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & a & b & e & 3 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5e \end{pmatrix} \notin \text{СП}.$$

Этот пример показывает, что для несвободных параметризаций условия теоремы 2.2.1 не являются необходимыми: как и в примере 2, условия теоремы 2.2.1 не выполнены. Но параметризация матрицы A_θ глобально корректна: уравнение $PA_\theta = A_\xi$, $\theta \doteq (a; b; c; e)$, влечет $P = I$ и $\theta = \xi$ (проверяется непосредственно).

2.2.3.4 Пример 4.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 7c & c & c & c+1 & c & c \\ c & 7c & c & c & c+1 & c \\ c & c & 7c & c & c & c+1 \end{pmatrix} \notin \text{СП}.$$

Здесь мы видим, что для несвободных параметризаций условия теоремы 2.2.4 не являются необходимыми. Действительно, $\operatorname{rank} A_\theta$ тождественно по $\theta \doteq c$ максимален (при $c \neq 0$ неособенна подматрица из первых трех столбцов A_θ; при $c = 0$ неособенна подматрица из последних трех столбцов), и фиксированных элементов нет.

2.2.3.5 Пример 5.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 7c & c & c & 1 \\ c & 7c & c & a \\ c & c & 7c & b \end{pmatrix} \notin \text{СП}.$$

Доказывает, что теоремы 2.2.5 о минимальном числе фиксированных элементов в матрицах с глобально корректной параметризацией не имеет места, если параметризация зависимая (несвободная). Матрица A_θ параметризована глобально корректно. Действительно, уравнение $PA_\theta = A_\xi$, $\theta = (a;b;c)$, $\xi = (\alpha;\beta;\gamma)$, имеет вид

$$P\begin{pmatrix} 7c & c & c & 1 \\ c & 7c & c & a \\ c & c & 7c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\gamma & \gamma & \gamma & 1 \\ \gamma & 7\gamma & \gamma & \alpha \\ \gamma & \gamma & 7\gamma & \beta \end{pmatrix},$$

откуда $P = (\gamma/c)I$. Единица фиксирована $\Rightarrow$ $\gamma/c = 1$, $P = I$, $\alpha = a$, $\beta = b$. Параметризация глобально корректна. Фиксирован только один элемент.

2.3 Системы с динамикой

Рассмотрим разностные системы вида

$$\gamma_\theta(s)z[t] \doteq (\gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta)s + \ldots + \gamma_p(\theta)s^p)\, z[t] = 0, \qquad t \in \overline{1, N-p}, \tag{2.3.1}$$

где $z[t] = (y[t]; u[t]) \in \mathbb{R}^{r+m}$ — отсчеты сеточной функции $z = \begin{pmatrix} z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$, являющейся решением системы, $\gamma_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}$ — матричные коэффициенты, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$ — фиксированный вектор параметров, s — символ сдвига: $sz[t] = z[t+1]$.

Уравнение (2.3.1) при $m > 0$, несмотря на ноль в правой части, является неоднородным (см. замечание 1.4.1 в главе 1).

Вектор $z \doteq (z[1]; \ldots; z[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ называем *процессом*, или *траекторией* входа-выхода. Пусть $\mathcal{M}_\theta \subset \mathbb{R}^{N(r+m)}$ — линейное многообразие всех решений системы (2.3.1), и $\mathcal{M}_* \subseteq \mathcal{M}_\theta$ — некоторое его подмножество.

Определение 2.3.1. Два значения параметров θ, ξ называются *неразличимыми* по $\mathcal{M}_*$, если одновременно $\mathcal{M}_\theta \supseteq \mathcal{M}_*$ и $\mathcal{M}_\xi \supseteq \mathcal{M}_*$ (обозначаем $\theta \overset{\mathcal{M}_*}{\sim} \xi$). Следуя [185, 250, 252], будем называть систему *глобально различимой* по $\mathcal{M}_*$ в точке θ, если $\xi \overset{\mathcal{M}_*}{\sim} \theta$ при $\xi \in \Theta$ означает равенство $\xi = \theta$. Система называется *локально различимой* по $\mathcal{M}_*$ в точке θ, если в некоторой окрестности $V(\theta)$ $\xi \overset{\mathcal{M}_*}{\sim} \theta$ при $\xi \in V(\theta)$ влечет $\xi = \theta$. Система называется *структурно* (глобально или локально) *различимой* в Θ, если она различима во всех точках $\theta \in \Theta$, за исключением, быть может, точек множества меры ноль.

Замечание 2.3.1. Корректность параметризации (глобальная, локальная) в смысле определения 2.2.1 есть различимость (соответственно глобальная, локальная) по множеству $\mathcal{M}_* = \mathcal{N}(G_\theta)$.

В этом разделе исследуются условия различимости. Необходимость проверки различимости возникает при построении математических моделей в экономике [117], технике [244], медицине [262], когда речь идет о подборе уравнений, решения которых точно описывают или аппроксимируют предъявленные наборы экспериментальных данных.

Как было отмечено выше, различимость играет роль необходимого условия для идентифицируемости параметров уравнения. Достаточные условия идентифицируемости зависят от характера измерений (утверждение 3.2.1 и следствие) и метода идентификации [195, с. 195], [216].

В предыдущем разделе 2.2 были получены конструктивные (т. е. проверяемые за конечное число арифметических операций) условия различимости систем (2.3.1) нулевого порядка $p = 0$ в виде ограничений на ранги специальных подматриц в $\gamma_0(\theta)$. Системы нулевого порядка используются, в частности, в эконометрике [117, с. 31]. Проводимое здесь обобщение на системы порядка $p \geqslant 0$ опирается на результаты раздела 1.5. Главную роль играет установленная в 1-й главе связь равносильных преобразований систем (2.3.1) порядка $p \geqslant 0$ с конечными длинами траекторий N с левыми умножениями многочленных матриц системы на унимодулярные матрицы, т. е. на матрицы элементарных преобразований.

Схема исследования прямо переносится на системы с непрерывным временем (s — оператор дифференцирования: $sw(t) = \frac{d}{dt}w$). Ключевым моментом такого переноса является то, что множество равносильных преобразований дифференциальных систем совпадает с множеством левых умножений многочленных матриц на унимодулярные матрицы [23]. Для систем с непрерывным временем только опускается условие (ii.г) (ниже), ввиду того, что "сдвиг влево" в случае с оператором дифференцирования означает интегрирование и является преобразованием, не равносильным даже в слабом смысле (определение 1.4.5, см. также замечание 1.6.1).

На системы (2.3.1) налагаем следующие условия. Они являются наиболее слабыми из известных в литературе; в частности, в соответствии с задачами исследования не накладываются ограничения на устойчивость и управляемость:

(i) параметризация

$$\theta \mapsto \gamma_\theta, \qquad \gamma_\theta \doteq (\gamma_0(\theta), \gamma_1(\theta), \ldots, \gamma_p(\theta)) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}, \tag{2.3.2}$$

взаимно однозначна в Θ и сильно дифференцируема в смысле Фреше; Θ — открытое подмножество $\mathbb{R}^v$;

(ii) $\forall\, \theta \in \Theta$ в многочленной матрице

$$\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta)s + \ldots + \gamma_p(\theta)s^p \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s] \tag{2.3.3}$$

а) строки линейно независимы (т. е. каноническая форма не имеет тождественно нулевых строк);

б) сумма степеней строк постоянна (напомним, степенью многочленной строки называется наибольшая из степеней образующих эту строку многочленов);

в) $\gamma_\theta(s)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $\gamma_\theta(s)$ матриц, т. е. $\gamma_\theta(s)$ строчно-минимальна (определение 1.6.1);

г) младший матричный коэффициент $\gamma_0(\theta)$ имеет линейно независимые строки, т. е. $\gamma_\theta(s)$ двусторонне строчно-минимальна (определение 1.6.4).

Замечание 2.3.2. Отметим, что условия (i), (ii) не исключают случая неустойчивых или неуправляемых систем, т. е. когда $\gamma_\theta(s)$ может быть представлена как произведение

$$\gamma_\theta(s) = \pi_\theta(s)\gamma'_\theta(s), \tag{2.3.4}$$

$$\pi_\theta(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s], \qquad \gamma'_\theta(s) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}[s]$$

с некоторой квадратной неунимодулярной матрицей $\pi_\theta(s)$ ($\deg\det\pi_\theta(s) > 0$). Существование разложения (2.3.4), как известно, равносильно неуправляемости [146, 228].

2.3.1 Предварительные замечания

Различимость будем рассматривать только по множеству $\mathcal{E}_\theta \subset \mathcal{M}_\theta$ стационарных (продолжимых) траекторий системы (2.3.1) (определение 1.4.4). В общем случае не все траектории $z \in \mathcal{M}_\theta$ являются продолжимыми; теорема 1.4.1 показывает, что множество $\mathcal{M}_\theta \setminus \mathcal{E}_\theta$ состоит из элементов вида $(0; \dots; 0; w[N-(p-p_1)]; \dots; w[N])$, где p_1 — наименьшая из степеней строк матрицы $\gamma_\theta(s)$. Если учесть, что с ростом N относительная длина ненулевого окончания $(w[N-(p-p_1)]; \dots; w[N])$ стремится к нулю, в ряде случаев можно считать отличие $\mathcal{E}_\theta$ от $\mathcal{M}_\theta$ несущественным.

Пусть $S(\theta)$ — краткая форма записи систем (2.3.1). Две системы $S(\theta)$, $S(\xi)$ неразличимы, если их можно связать некоторым равносильным преобразованием ψ, сохраняющим множество правильных траекторий $\mathcal{E}_\theta \doteq \mathcal{E}_{S(\theta)}$: $S(\theta) \sim S(\xi) \quad \Leftrightarrow \exists\psi$ $\psi S(\theta) = S(\xi) \quad \mathcal{E}_{S(\theta)} = \mathcal{E}_{S(\xi)}$.

В теореме 1.5.1 установлены два представления равносильных преобразований ψ систем (2.3.1). Они строятся как множества левых умножений некоторых ассоциированных с системой (2.3.1) матриц. Опишем эти представления, они понадобятся нам для установления условий различимости в следующем пункте.

Предложение 2.3.1. (*Представление* 1) *Две системы* $S(\theta)$, $S(\xi)$ (2.3.1) *неразличимы тогда и только тогда, когда левоэквивалентны ассоциированные с ними многочленные матрицы* $\gamma_\theta(s)$, $\gamma_\xi(s)$ (2.3.3)*:* $S(\theta) \sim S(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s] \quad \rho(s)\gamma_\theta(s) = \gamma_\xi(s)$.

Отметим, что левоэквивалентность многочленных матриц $\gamma_\theta(s)$ и $\gamma_\xi(s)$ означает, что $\rho(s)$ есть произведение элементарных матриц [23, с. 128], поэтому $\det\rho(s) = \mathrm{const}(s) \neq 0$. Отсюда следует, что данное представление неразличимости имеет место и для систем без условий (ii.б), (ii.в).

Рассмотрим второе представление. Оно оказывается ключевым в том смысле, что дает возможность получить конструктивные (конечно-проверяемые) условия различимости. В нем используется числовая “сдвиговая матрица” ε_θ:

$$\varepsilon_\theta \doteq \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_i \doteq \begin{pmatrix} \gamma_i(\theta) \\ \delta_i(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.3.5}$$

(см. раздел 1.5, определение 1.3.1).

Строки числовой матрицы ε_θ линейно независимы вместе с линейной независимостью строк многочленной матрицы $\gamma_\theta(s)$ (утверждение 1.3.1).

Предложение 2.3.2. (*Представление 2*) *Две системы* $S(\theta)$, $S(\xi)$ (2.3.1) *неразличимы тогда и только тогда, когда левоэквивалентны ассоциированные с ними сдвиговые матрицы* ε_θ, ε_ξ:

$$S(\theta) \sim S(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \pi \in \mathbb{R}^{(r+d)\times(r+d)} \quad \pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi.$$

Левоэквивалентность числовых матриц ε_θ, ε_ξ означает равенство их правых нуль-пространств $\mathcal{N}(\varepsilon_\theta) = \mathcal{N}(\varepsilon_\xi)$, так что $\det \pi \neq 0$.

2.3.2 Условия различимости

Предложение 2.3.1 дает нам следующий критерий различимости.

Утверждение 2.3.1. *Система* (2.3.1) *глобально* (*локально*) *различима в точке* $\theta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда уравнение* $\rho(s)\gamma_\theta(s) = \gamma_\xi(s)$, *рассматриваемое относительно пары* $\rho(s)$ *и* ξ, $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$, $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), *имеет единственное решение* $\rho(s) \equiv I_{r\times r}$, $\xi = \theta$.

В этом разделе будет показано, что равносильное представление 2 (предложение 2.3.2) дает возможность получить критерии различимости, проверяемые за конечное число арифметических операций.

Как и ранее, сразу можем сформулировать

Утверждение 2.3.2. *Система* (2.3.1) *глобально* (*локально*) *различима в точке* $\theta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда уравнение* $\pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi$, *рассматриваемое относительно пары* π *и* ξ, $\pi \in \mathbb{R}^{(r+d)\times(r+d)}$, $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), *имеет единственное решение* $\pi = I_{(r+d)\times(r+d)}$, $\xi = \theta$.

Чтобы установить первый конструктивный результат по различимости, введем новое обозначение (подобное тому, что использовалось в теореме 2.2.1). Пусть $i \in \overline{1, r}$. В матрице ε_θ (2.3.5) выделим столбцы, имеющие на i-м месте элемент, не зависящий от θ (фиксированный элемент). Все такие столбцы образуют подматрицу, которую обозначим $\varepsilon_{i,\theta}$. По построению, вся i-я строка в $\varepsilon_{i,\theta}$ не зависит от θ.

Чтобы получить достаточное условие различимости в точке θ, нужно обеспечить, грубо говоря, неразрешимость уравнения $\pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi$ относительно $\pi \neq I$, или, что то же самое, неразрешимость уравнения $\mu\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta$ относительно $\mu = \pi - I \neq 0$.

Обозначим через μ^i, ε^i i-е строки матриц μ, ε. Чтобы уравнение $\mu^i\varepsilon_\theta = (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta)^i$ не имело решения, достаточно наложить условие $\operatorname{rank}\varepsilon_{i,\theta} = r + d$. Таким образом, имеет место

Теорема 2.3.1. *Если для некоторого* θ *имеет место условие* $\forall\ i \in \overline{1,r}\quad \operatorname{rank}\varepsilon_{i,\theta} = r + d$, *то система* (2.3.1) *глобально различима в точке* θ.

Полное доказательство дано ниже.

Для проверки условия теоремы 2.3.1 вычисляются ранги подматриц $\varepsilon_{i,\theta}$, что осуществимо за конечное число арифметических операций.

Отметим, что теорема 2.3.1 имеет место для любых взаимно однозначных параметризаций $\theta \mapsto \gamma_\theta$, в том числе без условия сильной дифференцируемости по Фреше.

2.3.3 Правильные параметризации

Для случая специальных параметризаций, которые назовем правильными, условия теоремы 2.3.1 являются не только достаточными, но и необходимыми.

Пусть τ — число зависящих от θ элементов матрицы γ_θ. Обозначим через η_θ τ-плет из этих элементов. Обозначим через $A = \|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|_{\tau\times v}$ матрицу Якоби вектор-функции $\theta \mapsto \eta_\theta$ в точке θ.

Определение 2.3.2. Если матрица Якоби $A = \|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|$ квадратная и неособенная в точке θ, то параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ называется правильной в θ.

Заметим, что при условии сильной дифференцируемости (в смысле Фреше) отображения $\theta \mapsto \gamma_\theta$, когда существует матрица Якоби $\|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|$, правильные параметризации совпадают с открытыми (локально-свободными) по определению 2.2.2.

Теорема 2.3.2. *Если параметризация* $\theta \mapsto \gamma_\theta$ *локально-свободная в* θ, *то условие теоремы 2.3.1 является необходимым для локальной различимости системы* (2.3.1) *в точке* θ.

Теорема 2.3.3. *Если параметризация* $\theta \mapsto \gamma_\theta$ *правильная* (*локально-свободная*) *в* θ, *то локальная различимость в* θ *влечет за собой глобальную различимость в* θ.

Для доказательства нужно последовательно применить теоремы 2.3.2 и 2.3.1.

Согласно теоремам 2.3.2, 2.3.3, условие теоремы 2.3.1 необходимо и достаточно для различимости в точке θ правильно параметризованной системы (2.3.1). Исходя из этого и учитывая, что ранг матрицы не уменьшается при достаточно малых изменениях ее элементов, получаем, что свойство различимости устойчиво в том смысле, что множество точек $\theta \in \Theta$, в которых система (2.3.1) различима, открыто в Θ. Более того, оказывается, что подмножество точек различимости плотно в Θ, так что свойство различимости оказывается свойством общего положения.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2.3.4. *Для параметризаций $\theta \mapsto \gamma_\theta$, правильных (локально-свободных) в Θ, если система* (2.3.1) *различима в некоторой точке $\theta \in \Theta$, то она различима почти всюду в Θ, т. е. структурно различима.*

2.3.4 О минимальном числе фиксированных элементов при свободных параметризациях

Здесь будет получен аналог теоремы 2.2.5 для динамических систем (2.3.1) порядка $p > 0$.

Согласно определению 2.2.3, параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ (2.3.2) системы (2.3.1) называется свободной, если только $\mathcal{D}(\gamma_\theta) = \mathcal{V}(\gamma_\theta)$, где множества $\mathcal{D}(\cdot)$ и $\mathcal{V}(\cdot)$ определены в разделе 2.2.1. Без потери существа изложения определим свободную параметризацию простым условием $\eta_\theta \equiv \theta$, $\Theta = \mathbb{R}^v$, где η_θ — вектор, составленный в лексикографическом порядке из всех зависящих от θ элементов матрицы γ_θ.

Теорема 2.3.5. *Пусть параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}$* (2.3.2) *системы* (2.3.1) *свободная, при этом сама система* (2.3.1) *глобально различима в смысле определения 2.3.1 во всех точках $\theta \in \mathbb{R}^v$, и выполнены условия* (i), (ii) *на с. 91. Тогда число фиксированных элементов в γ_θ не меньше r^2, и равенство достигается тогда и только тогда, когда все такие элементы расположены один под другим, образуя неособенную фиксированную подматрицу $\alpha_p(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ из столбцов подматрицы $\gamma_p(\theta)$.*

Доказательство. Условие строчной минимальности (ii.в) на с. 91 ввиду предложения 1.6.2 означает линейную независимость строк числовой матрицы $\gamma_{[0]} = \gamma_{[0],\theta}$ в разложении (1.6.1) для матрицы $\gamma_\theta(s)$ (2.3.3). Предложение 2.3.1 позволяет рассматривать только такие изменения параметра θ, которые приводят к равносильным системам и левоэквивалентным матрицам $\gamma_\theta(s)$. Тогда ввиду предложения 1.6.3 не только постоянна сумма степеней строк $p_1 + \ldots + p_r$, но и постоянны сами степени $p_i \equiv \mathrm{const}(\theta)$, поэтому матрица $\gamma_{[0],\theta}$ имеет линейно независимые строки тождественно по θ. Возможны два случая: (1) в разложении (1.6.1) $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = p$; (2) в разложении (1.6.1) $\exists i \;\; p_i < p$. Если (1), то к матрице γ_θ применима теорема 2.2.5, из которой следует существование в γ_θ неособенной фиксированной подматрицы α_θ из столбцов. Условие (ii.б) приводит к тому, что $\alpha_\theta \doteq \alpha_p(\theta)$ является искомой подматрицей не где-нибудь, а в $\gamma_p(\theta)$, и теорема доказана. Если (2), то применим утверждение 2.3.2. Тогда ввиду различимости верна импликация

$$\pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta,$$

из которой следует импликация

$$\bar{\pi}\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_\xi \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta$$

для подматрицы $\bar{\varepsilon}_\theta$ из строк ε_θ такой, что $\bar{\varepsilon}_\theta = \begin{pmatrix} *_1 & *_2 & \gamma_{[0],\theta} \\ 0 & *_3 & \end{pmatrix}$, где $*_1$, $*_2$, $*_3$ —

клетки, состоящие только из свободных элементов (такая подматрица $\bar{\varepsilon}_\theta$ всегда существует). Ввиду различимости для каждого θ, можно положить $*_1 = 0$. В силу линейной независимости строк $\gamma_{[0],\theta}$ к матрице $\begin{pmatrix} *_2 & \gamma_{[0],\theta} \\ *_3 & \end{pmatrix}$ применима теорема 2.2.5. Мы пришли к случаю (1), но с бо́льшим, чем в (1), числом фиксированных элементов ввиду необходимого наличия фиксированных нулей в $\bar{\varepsilon}_\theta$. Поэтому минимум числа фиксированных элементов достигается только в (1). Теорема доказана. □

Учитывая, что полное число всех элементов (фиксированных и свободных) в матрице γ_θ равно $r\,(r+m)\,(p+1)$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.5 наибольшее число свободных элементов равно* $rm + r\,(r+m)\,p$.

2.3.5 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.3.1 проводится методом от противного: пусть система не является глобально различимой в θ, т. е. по утверждению 2.3.2 существуют $\xi \in \Theta$ и $\pi \in \mathbb{R}^{(r+d)\times(r+d)}$, $\det \pi \neq 0$, такие, что

$$\pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi. \tag{2.3.6}$$

В силу последнего равенства из строк π можно выбрать подматрицу $\varphi \in \mathbb{R}^{r\times(r+d)}$ такую, что

$$\varphi\varepsilon_\theta = \gamma_\xi. \tag{2.3.7}$$

Обозначим $\delta \doteq \gamma_\xi - \gamma_\theta$, и пусть $i \in \overline{1,r}$ — номер некоторой ненулевой строки δ^i в δ. Обозначим соответственно через φ^i, γ_θ^i, e^i i-е строки матриц φ, γ_θ, $I_{(r+d)\times(r+d)}$. Согласно (2.3.7), $(\varphi^i - e^i)\varepsilon_\theta = \delta^i \neq 0$. По условию (ii) $\operatorname{rank}\varepsilon_\theta = r + d$, следовательно, $\varphi^i - e^i \neq 0$. По определению $\varepsilon_{i,\theta}$ — подматрица из столбцов ε_θ, у которых на i-м месте стоит фиксированный элемент (вся i-я строка $\varepsilon_{i,\theta}$ фиксирована и i-е строки матриц $\varepsilon_{i,\theta}$, $\varepsilon_{i,\xi}$ совпадают). В силу (2.3.6) $\pi\varepsilon_{i,\theta} = \varepsilon_{i,\xi}$ и по аналогии с (2.3.7) $\varphi\varepsilon_{i,\theta} = \gamma_{i,\xi}$, где $\gamma_{i,\xi}$ — подматрица из первых r строк $\varepsilon_{i,\xi}$. Ясно, что в подматрицах $\gamma_{i,\theta}$, $\gamma_{i,\xi}$ i-е строки те же самые, что и в матрицах $\varepsilon_{i,\theta}$, $\varepsilon_{i,\xi}$, и эти строки совпадают: $\gamma_{i,\theta}^i = \gamma_{i,\xi}^i$. Отсюда заключаем, что $\varphi^i\varepsilon_{i,\theta} = \gamma_{i,\xi}^i = \gamma_{i,\theta}^i = e^i\varepsilon_{i,\theta}$, т. е. $(\varphi^i - e^i)\varepsilon_{i,\theta} = 0$. Противоречие с условием $\operatorname{rank}\varepsilon_{i,\theta} = r + d$ доказывает теорему. □

Доказательство теоремы 2.3.2. Как и в подразделе 2.2.1, определим множество

$$\mathcal{D}(\gamma_\theta) \doteq \{\gamma_\xi - \gamma_\theta :\ \xi \in \Theta\}.$$

Пусть $\mathcal{V}(\gamma_\theta) \subset \mathbb{R}^{r\times t}$, $t = (p+1)(r+m)$, обозначает линейное подпространство матриц в $\mathbb{R}^{r\times t}$ с нулями на местах фиксированных элементов γ_θ. По определению $\mathcal{D}(\gamma_\theta) \subseteq \mathcal{V}(\gamma_\theta)$. Кроме того, параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ является правильной в точке θ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\gamma_\theta)$ содержит окрестность нуля из $\mathcal{V}(\gamma_\theta)$. Пусть γ_θ^i обозначает i-ю строку γ_θ и 0 — нулевой элемент в $\mathcal{D}(\gamma_\theta)$, $\mathcal{V}(\gamma_\theta)$, $\mathbb{R}^{1\times(r+d)}$, $\mathcal{V}(\gamma^i_\theta)$ исходя из контекста. Нужно показать, что если параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ правильная в точке θ, то условие $\exists\, i \in \overline{1,r}$ $\operatorname{rank}\varepsilon_{i,\theta} < r+d$ влечет за собой $\exists\, \varphi \in \mathbb{R}^{r\times(r+d)}$: $\varphi\varepsilon_\theta = \gamma_\xi \neq \gamma_\theta$. Затем останется только дополнить φ сдвинутыми строками до π, чтобы получить $\pi\varepsilon_\theta = \varepsilon_\xi \neq \varepsilon_\theta$.

Пусть для некоторого $i \in \overline{1,r}$ $\operatorname{rank}\varepsilon_{i,\theta} < r+d$. Тогда найдется строка $\eta \in \mathbb{R}^{1\times(r+d)}$ такая, что $\eta\varepsilon_{i,\theta} = 0$, $\eta \neq 0$. По условию (ii) $\operatorname{rank}\gamma_\theta(s) = r$, следовательно, $\operatorname{rank}\varepsilon_\theta = r+d$, откуда $\eta\varepsilon_\theta \neq 0$. Последнее можно записать как $\eta\varepsilon_\theta \in \mathcal{V}(\gamma^i_\theta) \setminus \{0\}$. Пусть параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ правильная в точке θ, тогда найдется окрестность нуля $V(0)$ из $\mathcal{V}(\gamma^i_\theta)$ такая, что $V(0) \subset \mathcal{D}(\gamma^i_\theta)$. Следовательно, для достаточно малого числа λ строка $\lambda\eta\varepsilon_\theta$ принадлежит пересечению множеств $V(0)$ и $\mathcal{D}(\gamma^i_\theta) \setminus \{0\}$. Пусть $X \doteq \begin{pmatrix} 0; & \lambda\eta; & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+d)}$ обозначает матрицу с единственной ненулевой строкой $\lambda\eta$ на i-м месте. Несложно увидеть, что $X\varepsilon_\theta \in \mathcal{D}(\gamma_\theta)\setminus\{0\}$. Положим $\varphi \doteq \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times d} \end{pmatrix} + X$, тогда

$$\varphi\varepsilon_\theta = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times d} \end{pmatrix}\varepsilon_\theta + X\varepsilon_\theta = \gamma_\theta + X\varepsilon_\theta = \gamma_\xi \neq \gamma_\theta.$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2.3.4. Обозначим через $\Theta^* \subset \Theta$ подмножество точек различимости. Пусть $\Theta\setminus\Theta^*$ не пусто и $\theta \in \Theta^*$, $\xi \in \Theta\setminus\Theta^*$. Нужно показать, что любая окрестность $V(\xi)$ содержит некоторую точку различимости $\zeta \in \Theta^*$.

Лемма. *Пусть* $A = \|a_{ij}\| \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — $n\times m$*-матрица и* $t \doteq (t_1,\ldots,t_s) \doteq (a_{i_1j_1},\ldots,a_{i_sj_s}) \in \mathbb{R}^s$, $s \leqslant nm$, — *вектор, составленный из элементов матрицы* A. *Пусть отображение* $t \mapsto A(t)$ *определено на открытом выпуклом множестве* $B \subset \mathbb{R}^s$. *Тогда*:

1) *ранг* $A(t)$ *не уменьшается при любых достаточно малых изменениях* t: *существует окрестность* $V(t) \ni t$ *такая, что для любого* $q \in V(t)$ $\operatorname{rank}A(q) \geqslant \operatorname{rank}A(t)$;

2) *если для некоторой точки* $\tau \in B$ $\operatorname{rank}A(\tau) > \operatorname{rank}A(t)$, *то в любой сколь угодно малой окрестности* $V(t)$ *найдется точка* $t^* \in B$, *в которой ранг* $A(t^*)$ *строго больше ранга* $A(t)$: $\operatorname{rank}A(t^*) \geqslant \operatorname{rank}A(\tau) > \operatorname{rank}A(t)$. *При этом* t^* *всегда можно выбрать на отрезке, соединяющем* t *и* τ: $t^* = t + \lambda(\tau - t)$, $\lambda \in (0,1)$.

Доказательство леммы вполне стандартно. Первое утверждение сразу следует из факта непрерывности зависимости миноров от элементов матрицы. Второе утверждение докажем от противного. Пусть ранг $A(\tau)$ равен p. Обозначим через $C(\tau)$ неособенную $p\times p$-подматрицу в $A(\tau)$. Из условия следует, что $\det C(\tau) \neq 0$ и $\det C(t) = 0$. Рассмотрим решения уравнения $f(\lambda) \doteq \det C(t+\lambda(\tau-t)) = 0$ относительно $\lambda \in [0,1]$. Таких решений конечное число, поскольку $f(\lambda)$ — полином. Тогда корень $\lambda = 0$ (может быть, кратный) изолирован, и можно выбрать достаточно малое число $\lambda^* \in (0,1]$ такое, что точка $t^* = t + \lambda^*(\tau - t)$ попадет в любую наперед заданную окрестность точки τ, при этом $f(\lambda^*) \neq 0$, $\det C(t^*) \neq 0$, $\operatorname{rank}C(t^*) = p$. Значит, $\operatorname{rank}A(t^*) \geqslant p > \operatorname{rank}A(t)$. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим $\varepsilon_{i,\theta} \doteq \varepsilon_i(\eta_\theta)$. По условию θ — точка различимости, значит, $\forall\, i \in \overline{1,r}$ $\operatorname{rank}\varepsilon_i(\eta_\theta) = r+d$. Кроме того, существует $j \in \overline{1,r}$

такое, что $\operatorname{rank}\varepsilon_j(\eta_\xi) < r + d$ (ξ — точка неразличимости). По утверждению 2 леммы можно выбрать малое $\lambda > 0$: $\operatorname{rank}\varepsilon_j(\eta_\xi + \lambda(\eta_\theta - \eta_\xi)) = r + d$. Если для некоторого i $\operatorname{rank}\varepsilon_i(\eta_\xi) = r + d$, то при достаточно малом λ значение ранга такой подматрицы не изменится: $\operatorname{rank}\varepsilon_i(\eta_\xi + \lambda(\eta_\theta - \eta_\xi)) = r + d$ (утверждение 1 леммы). Значит, $\forall\, i \in \overline{1, r}$ $\operatorname{rank}\varepsilon_i(\eta_\xi + \lambda(\eta_\theta - \eta_\xi)) = r + d$ и по теоремам 2.3.1, 2.3.2 точка $\eta^* \doteq \eta_\xi + \lambda(\eta_\theta - \eta_\xi)$ является точкой различимости. Остается убедиться в том, что ей соответствует какое-либо значение параметров $\zeta \in \Theta$: $\eta_\zeta = \eta^*$. Последнее следует из условия правильности и взаимной однозначности параметризации $\xi \mapsto \eta_\xi$ в окрестности $V(\xi)$.

Следовательно, множество точек различимости Θ^* плотно в Θ. Поскольку Θ^* открыто, то $\Theta \setminus \Theta^*$ есть множество меры нуль. Теорема доказана. □

2.4 Полином-операторные параметризации и разностные аналоги дифференциальных уравнений

В этом разделе получены конструктивные условия различимости стационарных линейных дифференциальных и разностных систем с коэффициентами, зависящими от параметра, в классе полином-операторных параметризаций.

Будем рассматривать системы вида

$$(g_0 + g_1\varphi + \ldots + g_p\varphi^p)\, w[t] = 0, \qquad t \in \overline{1, N-p}, \tag{2.4.1}$$

с матричными коэффициентами $g_i = g_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}$, зависящими от параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$. Здесь $w[t] = \Big(y[t];\;\; u[t]\Big) \in \mathbb{R}^{r+m}$ — отсчеты решения системы, $\varphi = \varphi(s)$ — многочлен от символа сдвига: $sw[t] = w[t+1]$. В случае, если φ — оператор дифференцирования ($\varphi w = \frac{d}{dt}w$), решения $w[t] \doteq w(t)$ расматриваются на непрерывном интервале $t \in [0, T)$ и предполагаются дифференцируемыми необходимое число раз. В квадратных скобках записываем временной аргумент, принимающий только целочисленные значения.

В приложениях различный вид многочлена $\varphi(s)$ соответствует разным случаям параметризации системы:

$\varphi(s) = s$ — q-операторная параметризация,

$\varphi(s) = (s-1)/h \doteq \delta(s)$ — δ-операторная,

$\varphi(s) = s^k\delta(s)$ — d-операторная [163].

Для некоторого фиксированного θ обозначим $\mathcal{M}_\theta$ множество решений уравнения (2.4.1) $z = (w[1]; \ldots; w[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ или $z \in \mathbb{R}^{r+m} \times [0, T)$ в случае непрерывного времени. Как и в разделе 2.3, предполагаем, что в дискретном случае множество $\mathcal{M}_\theta$ состоит только из правильных (продолжимых) траекторий. Напомним, траекторию z называем правильной (продолжимой), если она является частью “более длинной” траектории той же системы на большем временном интервале $t \in \overline{1, N_1}$, $N_1 > N$.

Полученные выше результаты в разделе 2.3 соответствуют случаю $\varphi(s) \equiv s$. Напомним, для этого случая были получены условия различимости разностных систем (2.4.1) в виде ограничений на ранги некоторых числовых матриц. Такого рода условия конструктивны в том смысле, что алгоритмически проверяемы за полиномиальное число шагов. При условии "правильной" параметризации (когда параметрами системы являются элементы матриц g_i) в случае $\varphi(s) \equiv s$ было показано, что локальная различимость в точке θ влечёт глобальную различимость в θ, и что различимость в точке влечёт различимость почти всюду в Θ.

Здесь мы дадим обобщение результатов раздела 2.3 на системы с непрерывным временем и на разностные системы, в которых оператор $\varphi = \varphi(s)$ есть многочлен от оператора сдвига s. Доказываемые теоремы были впервые анонсированы в статье [201].

Относительно системы (2.4.1), как и ранее в разделе 2.3, предполагаем:

(i-g) отображение

$$\theta \leftrightarrow g_\theta, \qquad g_\theta \doteq \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}, \tag{2.4.2}$$

взаимно однозначно в точках $\theta \in \Theta$ и дифференцируемо в смысле Фреше; множество Θ открытое;

(ii-g) для каждого значения параметра $\theta \in \Theta$ в многочленной матрице от символа φ

$$g_\theta(\varphi) \doteq g_0 + g_1\varphi + \ldots + g_p\varphi^p \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[\varphi] \tag{2.4.3}$$

а) строки линейно независимы;

б) сумма степеней строк постоянна;

в) $g_\theta(\varphi)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $g_\theta(\varphi)$ матриц, т. е. $g_\theta(\varphi)$ строчно-минимальна (определение 1.6.1);

г) числовая матрица $g_\theta(\varphi(0))$ имеет линейно независимые строки.

Для проверки условия (ii-g.в) можно использовать предложение 1.6.2. В применении к матрице $g(\varphi)$ оно принимает следующий вид.

Предложение 2.4.1. *Многочленная матрица $g(\varphi)$ с линейно независимыми строками имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $g(\varphi)$ матриц (т. е. приведена по строкам) тогда и только тогда, когда в разложении*

$$\begin{gathered} g(\varphi) = (\operatorname{diag}_i \varphi^{p_i}) \cdot \left\{ g_{[0]} + \varphi^{-1} g_{[-1]} + \ldots + \varphi^{-p_r} g_{[-p_r]} \right\}, \\ \operatorname{diag}_i \varphi^{p_i} \doteq \operatorname{diag}\left(\varphi^{p_1}, \varphi^{p_2}, \ldots, \varphi^{p_r}\right), \end{gathered} \tag{2.4.4}$$

числовая матрица $g_{[0]}$ имеет линейно независимые строки.

Обозначим $\gamma_\theta(s) \doteq g_\theta(\varphi(s))$. Система (2.4.1) запишется в виде:

$$(\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p)\, w[t] = 0, \qquad t \in \overline{1, N-p}. \tag{2.4.5}$$

Систему (2.4.5) подчиним ограничениям (i)–(ii) на с. 91. Условия различимости для этой системы установлены в утверждениях 2.3.1 и 2.3.2 и теоремах 2.3.1–2.3.4. Дадим обобщения теорем 2.3.1–2.3.4 на случай систем (2.4.1) с непрерывным временем и с произвольным многочленом $\varphi(s)$. Заметим, что подстановка $\varphi(s)$ вместо s в системе (2.4.5) не изменяет вида системы, только изменяет значения коэффициентов. Поэтому проводимое обобщение может рассматриваться еще и как изучение специального *частного* случая.

Определение 2.4.1. Если матрица $\gamma_\theta(s)$ разностной системы (2.4.5) представима в виде суперпозиции $\gamma_\theta(s) \doteq g_\theta(\varphi(s))$, то параметризацию $\theta \mapsto \gamma_\theta$ назовём *полином-(* $\varphi(s)$ *)-операторной.* Систему (2.4.1) с матрицей $g_\theta(\varphi)$ назовём *порождающей* для (2.4.5).

Поставим задачу изложить условия различимости разностных систем (2.4.5) с полином-операторными параметризациями в терминах матрицы g_θ порождающей системы (2.4.1). В многих случаях это может существенно упростить анализ различимости. Поясним сказанное примером.

Пример. Системе $\theta\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $g_\theta = (\theta, 0, 1, -1)$, посредством подстановки $\dot{x}(t) \to x(t+1) - x(t)$ сопоставим разностную систему (2.4.5): $\theta x[t+1] + (1-\theta)x[t] = u[t]$, $\gamma_\theta = (\theta, 0, 1-\theta, -1)$. По построению, параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ является полином-операторной, $\varphi(s) = s - 1$, $\gamma_\theta(s) = (\theta s + 1 - \theta, -1)$, $g_\theta(\varphi) = (\theta\varphi + 1, -1)$. Заметим, что параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ не правильная (определение 2.3.2), поскольку $\eta_\theta = (\theta, 1-\theta)$, и матрица Якоби $\|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|$ не является квадратной и неособенной. С другой стороны, параметризация $\theta \mapsto g_\theta$ порождающей системы является правильной, что позволяет сделать более сильные выводы о различимости в терминах матрицы g_θ.

Прежде всего установим связь между условиями (i-g)–(ii-g) на с. 99 и (i)–(ii) на с. 91.

Утверждение 2.4.1. *Если матрица $\gamma_\theta(s)$ представима в виде суперпозиции $\gamma_\theta(s) \doteq g_\theta(\varphi(s))$, то условия* (i-g)–(ii-g) *и* (i)–(ii) *равносильны.*

Доказательство. Заметим, что отображение $\theta \mapsto \gamma_\theta$ взаимно однозначно и дифференцируемо в смысле Фреше вместе с отображением $\theta \mapsto g_\theta$, поскольку γ_θ и g_θ можно связать линейным невырожденным преобразованием: $\operatorname{col}\gamma_\theta = X \operatorname{col} g_\theta$, $\det X \neq 0$. Значит, условия (i-g) и (i) равносильны.

Проверка равносильности пунктов (г) в (ii-g) и (ii) осуществляется прямой подстановкой $g_\theta(\varphi(0)) = \gamma_\theta(0)$.

Рассмотрим пункты (в).

Лемма 2.4.1. *Пусть $\gamma(s)$, $g(s)$ — многочленные матрицы, строки каждой линейно независимы, и $\gamma(s) \equiv g(\varphi(s))$ для некоторого многочлена $\varphi(s) = \varphi_n s^n + \varphi_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \varphi_0$. Тогда $\gamma(s)$ приведена по строкам тогда и только тогда, когда приведена по строкам $g(s)$.*

Доказательство. Обозначим $\{m_1, \ldots, m_r\}$ множество степеней строк $g(s)$. Тогда согласно (2.4.4)

$$g(\varphi) = \left(\operatorname*{diag}_i \varphi^{m_i}\right) g_{[0]} + \left(\operatorname*{diag}_i \varphi^{m_i-1}\right) g_{[-1]} + \ldots$$

Следовательно,

$$\gamma(s) = g(\varphi) = \left(\operatorname*{diag}_i \{\varphi_n^{m_i} \cdot s^{nm_i} + \delta_{nm_i-1}(s)\}\right) g_{[0]} +$$

$$+ \left(\operatorname*{diag}_i \left\{\varphi_n^{m_i-1} \cdot s^{n(m_i-1)} + \delta_{n(m_i-1)-1}(s)\right\}\right) g_{[-1]} + \ldots ,$$

где $\delta_i(s)$ обозначает полином степени не выше i. Сравнив с разложением (2.4.4), получим равенство $\gamma_{(0)} = (\operatorname{diag}_i \varphi_n^{m_i})\, g_{[0]}$. Далее предложение 2.4.1. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство утверждения. Из леммы сразу следует равносильность пунктов (в). Рассмотрим пункты (б). Обозначим $\deg \gamma_\theta(s)$ сумму степеней строк многочленной матрицы $\gamma_\theta(s)$. Степень каждой строки $\gamma_\theta(s)$ равна степени соответствующей строки $g_\theta(s)$, умноженной на число $\deg \varphi(s)$. Учитывая приведённость по строкам матриц $\gamma_\theta(s)$ и $g_\theta(s)$ и предложение 2.4.1, получаем равенство $\deg \gamma_\theta(s) = \deg \varphi(s) \deg g_\theta(s)$. Следовательно, условия (ii-g.б) и (ii.б) равносильны.

Рассмотрим условия (ii-g.a) и (ii.a).

Лемма 2.4.2. *Пусть $\rho(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — произвольные многочлены. Тогда если $\rho(s)\mu(\varphi(s)) \equiv \lambda(\varphi(s))$, то $\rho(s) \equiv \eta(\varphi(s))$, где $\eta(\cdot)$ — многочлен.*

Доказательство. Приведём доказательство леммы 2.4.2, предложенное А. А. Коробовым. Разделим $\lambda(s)$ на $\mu(s)$ с остатком: $\lambda \equiv \mu\eta + \varepsilon$, $\deg \varepsilon < \deg \mu$. Следовательно, $\lambda(\varphi(s)) \equiv \mu(\varphi(s))\eta(\varphi(s)) + \varepsilon(\varphi(s))$, $\deg \varepsilon(\varphi(s)) < \deg \mu(\varphi(s))$. По условию, $\mu(\varphi(s))$ есть делитель $\lambda(\varphi(s))$, следовательно, $\varepsilon(\varphi(s)) \equiv 0$ и $\rho(s) \equiv \eta(\varphi(s))$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим $i_r^\gamma(s)$ старший инвариантный многочлен матрицы $\gamma(s)$. По определению, $i_r^\gamma(s) = D_r^\gamma(s)/D_{r-1}^\gamma(s)$, где $D_r^\gamma(s)$ и $D_{r-1}^\gamma(s)$ обозначают наибольшие общие делители r- и $(r-1)$-миноров матрицы $\gamma(s)$. Если $\gamma(s) = g(\varphi(s))$, то для каждого $i \in \overline{1,r}$ $D_i^\gamma(s) = D_i^g(\varphi(s))$. Из леммы 2.4.2 получаем $i_r^\gamma(s) = i_r^g(\varphi(s))$, где $i_r^g(\varphi)$ есть старший инвариантный многочлен матрицы $g(\varphi)$. Значит, $i_r^\gamma(s)$ может быть равен нулю только вместе с $i_r^g(\varphi)$, что означает равносильность условий (ii-g.a) и (ii.a). Утверждение доказано. $\square$

Мы получили, что для проверки условий (i) и (ii) на с. 91 по отношению к системе (2.4.5) с полином-операторной параметризацией $\theta \mapsto \gamma_\theta$ можно заменить $\gamma_\theta(s)$ матрицей $g_\theta(s)$ порождающей системы (2.4.1).

Теперь будет показано, что подобным же образом можно поступать и для проверки условий различимости, то есть просто заменить $\gamma_\theta(s)$ матрицей $g_\theta(s)$ порождающей системы.

Различимость систем с полином-операторными параметризациями

Теорема 2.4.1. *Утверждения теорем 2.3.1–2.3.4 и их следствия сохраняют силу, если символ* s *заменить произвольным многочленом* φ *от оператора сдвига.*

Следствие. *Условия и свойства различимости систем* (2.4.1) *при ограничениях* (i-g)–(ii-g) *даются теоремами 2.3.1–2.3.4 и их следствиями с заменой символов* γ *на* g *и* s *на* φ *.*

В предыдущем разделе теоремы 2.3.2–2.3.4 получены как следствия теоремы 2.3.1. Поэтому доказательство теоремы 2.4.1 и ее следствия по сути сводится к следующему утверждению, аналогичному теореме 2.3.1.

Теорема 2.4.2. *Система* (2.4.1) *глобально* (*локально*) *различима в точке* $\theta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда уравнение* $\rho(\varphi)g_\theta(\varphi) = g_\xi(\varphi)$ *, рассматриваемое относительно пары* $\rho(\varphi) \in \mathbb{R}^{r\times r}[\varphi]$ *и* $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), *имеет единственное решение* $\rho(\varphi) \equiv I_{r\times r}$ *,* $\xi = \theta$ *.*

Доказательство. Согласно теореме 2.3.1, система (2.4.1) глобально (локально) различима в точке $\theta \in \Theta$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\rho(s)g_\theta(\varphi(s)) = g_\xi(\varphi(s)), \tag{2.4.6}$$

рассматриваемое относительно пары $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$ и $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), имеет единственное решение $\rho(s) \equiv I_{r\times r}$, $\xi = \theta$. Для доказательства теоремы 2.4.2 достаточно показать, что в равенстве (2.4.6) матрица $\rho(s)$ всегда представима суперпозицией $\rho(s) \equiv \eta(\varphi(s))$.

Выберем из столбцов $g_\theta(\varphi)$ неособенную подматрицу $a_\theta(\varphi)$. Из (2.4.6) следует

$$\rho(s) \doteq \|\rho_{ij}(s)\| = a_\xi(\varphi)a_\theta(\varphi)^{-1} = (\det a_\theta(\varphi))^{-1}\, a_\xi(\varphi)a_\theta^\dagger(\varphi),$$

где $a_\theta^\dagger(\varphi)$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений к элементам $a_\theta(\varphi)$. Следовательно, $\rho_{ij}(s) = \lambda_{ij}(\varphi)/\mu_{ij}(\varphi)$, где $\lambda_{ij}(\cdot)$ и $\mu_{ij}(\cdot)$ — взаимно простые многочлены. По лемме 2.4.2, $\rho_{ij}(s) \equiv \eta_{ij}(\varphi(s))$. Теорема доказана. □

Различимость систем с непрерывным временем

Расмотрим систему (2.4.1) с оператором дифференцирования $\varphi = \frac{d}{dt}$ на непрерывном интервале $t \in [0, T)$.

Теорема 2.4.3. *Система* (2.4.1) *с непрерывным временем глобально* (*локально*) *различима в точке* $\theta \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда уравнение* $\rho(\varphi)g_\theta(\varphi) = g_\xi(\varphi)$ *, рассматриваемое относительно пары* $\rho(\varphi) \in \mathbb{R}^{r\times r}[\varphi]$ *и* $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), *имеет единственное решение* $\rho(\varphi) \equiv I_{r\times r}$ *,* $\xi = \theta$ *.*

Доказательство. Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 2.3.1, в силу того факта, что все равносильные преобразования дифференциальных систем (2.4.1) представимы левыми умножениями матриц $g_\theta(\varphi)$ на матрицы элементарных преобразований [23, с. 129]. □

Заметим, что в доказательстве теорем 2.3.1 и 2.4.3 не используются условия (ii-g.б), (ii-g.в). Значит, теоремы 2.3.1 и 2.4.3 сохраняют свою силу и без условий (ii-g.б), (ii-g.в).

Если наложить условия (ii-g.б), (ii-g.в), то имеют место следующие заключительные утверждения.

Теорема 2.4.4. *Утверждения теорем 2.3.1–2.3.4 и их следствия сохраняют силу, если символ* s *заменить оператором дифференцирования* $\varphi = \frac{d}{dt}$.

Следствие. *Условия и свойства различимости систем* (2.4.1) *с непрерывным временем при ограничениях* (i-g)–(ii-g) *даются теоремами 2.3.1–2.3.4 и их следствиями с заменой символов* γ *на* g *и* s *на* $\varphi = \frac{d}{dt}$.

Доказательство. Доказательство сводится к трём замечаниям: 1) теорема 2.4.3 в непрерывном случае заменяет собой теорему 2.3.1, отличаясь от неё только заменой символов; 2) переход от теоремы 2.3.1 к теоремам 2.3.2–2.3.4 и следствию при условиях (i), (ii) изложен в предыдущем разделе; 3) выше показано в утверждении 2.4.1, что условия (i), (ii) и (i-g), (ii-g) равносильны. □

2.5 Стохастические системы

Рассмотрим стохастические системы вида

$$\begin{gathered}(\gamma_{0,\theta}s^0 + \ldots + \gamma_{p,\theta}s^p)\ z[k] = (\mu_{0,\theta}s^0 + \ldots + \mu_{p,\theta}s^p)\ \varepsilon_1[k],\\ \check{z}[j] = z[j] + \varepsilon_2[j], \qquad j \in \overline{1,N}, \qquad k \in \overline{1,N-p}.\end{gathered} \tag{2.5.1}$$

Здесь s — оператор сдвига. Наблюдаются переменные $\check{z}[\cdot] \in \mathbb{R}^{r+m}$, а случайные векторы $\varepsilon_1[\cdot] \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon_2[\cdot] \in \mathbb{R}^{r+m}$ играют роль возмущений. Выходные $y[\cdot] \in \mathbb{R}^r$ и входные $u[\cdot] \in \mathbb{R}^m$ переменные в векторе $z[\cdot] = \begin{pmatrix} y[\cdot] \\ u[\cdot] \end{pmatrix}$ выделяются согласно замечанию 1.4.1 на с. 66.

На систему (2.5.1) наложим ограничения:

(i-s) параметризация $\theta \leftrightarrow \varphi_\theta$ сильно дифференцируема в смысле Фреше и взаимнооднозначна в Θ; Θ — открытое подмножество $\mathbb{R}^v$:

$$\theta \leftrightarrow \varphi_\theta, \qquad \varphi_\theta \doteq (\varphi_{0,\theta}, \varphi_{1,\theta}, \ldots, \varphi_{p,\theta}) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m+l)(p+1)},$$

$$\varphi_{i,\theta} \doteq (\gamma_{i,\theta}, -\mu_{i,\theta});$$

(ii-s) для многочленной матрицы $\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_{0,\theta} + \ldots + \gamma_{p,\theta}s^p$ выполнены условия (ii.a)–(ii.г) из раздела 2.3 (с. 91);

(iii-s) (условие причинности) для всех значений параметра $\forall\ \theta \in \Theta$ многочленная матрица $\mu_\theta(s) \doteq \mu_{0,\theta}+\ldots+\mu_{p,\theta}s^p \in \mathbb{R}^{r\times l}[s]$ имеет степени строк не больше степеней соответствующих строк матрицы $\gamma_\theta(s)$;

(iv-s) случайные векторы $\varepsilon_1[\cdot]$, $\varepsilon_2[\cdot]$ взаимно независимы, имеют нулевое среднее и положительно определенные матрицы вторых моментов:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\,\varepsilon_i[\cdot] = 0, && \mathbf{M}\,\varepsilon_i[\cdot]\varepsilon_j[\cdot]^\top = 0,\\ &\mathbf{M}\,\varepsilon_i[k]\varepsilon_i[l]^\top = 0, && \forall\, k \neq l,\\ &\mathbf{M}\,\varepsilon_i[k]\varepsilon_i[k]^\top = \Sigma_i > 0, && i = 1,2; \end{aligned}$$

(v-s) входные переменные $u[\cdot]$ распределены независимо относительно возмущений $\varepsilon_1[\cdot]$, $\varepsilon_2[\cdot]$ имеют нулевое среднее и положительно определенную матрицу вторых моментов:
$\mathbf{M}\,u[k]u[k]^\top = \Sigma_u > 0$, $\mathbf{M}\,u[k]u[l]^\top = 0$, $\forall k \neq l$, $\mathbf{M}\,u[k] = 0$;

(vi-s) вектор начальных условий $w_0 = w_0(y[1],\ldots,y[p+1]) = x[1] \in \mathbb{R}^q$, определяемый через равносильную систему 1-го порядка (1.1.2), детерминирован (имеет нулевую дисперсию) и имеет ненулевые проекции на все инвариантные подпространства матрицы $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$ системы (1.1.2) (ср. с условием 1 в утверждении 3.2.3).

Замечание 2.5.1. Условие (vi-s) назовем *условием общего положения* для пары (A, w_0). Нетрудно установить [23, глава VII], что это условие равносильно линейной независимости столбцов матрицы $(w_0, Aw_0, \ldots, A^{q-1}w_0)$. Если пара (A, w_0) не удовлетворяет условию общего положения, и существует вектор w такой, что пара (A, w) находится в общем положении, то в любой сколь угодно малой окрестности w_0 найдется вектор w_0' такой, что пара (A, w_0') условию общего положения удовлетворяет. Как следствие, для любой пары матриц $A, B \in \mathbb{R}^{q\times q}$, для которых существуют вектора w_a и w_b такие, что каждая из пар (A, w_a) и (B, w_b) находится в общем положении, всегда существует вектор w такой, что обе пары (A, w) и (B, w) одновременно находятся в общем положении.

Определение 2.5.1. Обозначим $\check{\mathbf{P}}_\theta$ распределение вектора

$$\check{z} \doteq (\check{z}[1]; \ldots; \check{z}[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)},$$

обусловленное заданными распределениями переменных $\varepsilon_1[\cdot]$, $\varepsilon_2[\cdot]$, $u[\cdot]$ и w_0. Система (2.5.1) называется глобально идентифицируемой в точке θ, если из равенства $\check{\mathbf{P}}_\theta = \check{\mathbf{P}}_\xi$ при $\xi \in \Theta$, следует $\xi = \theta$. Система (2.5.1) называется локально идентифицируемой в точке θ, если существует окрестность $V(\theta) \subset \Theta$ такая, что из равенства $\check{\mathbf{P}}_\theta = \check{\mathbf{P}}_\xi$ при $\xi \in V(\theta)$ следует $\xi = \theta$ [185, 216, 238].

Установим факт, имеющий большое значение для анализа идентифицируемости систем (2.5.1). Обозначим $\mathbf{P}_\theta$ распределение случайной величины $z \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ в системе (2.5.1) при условиях (i-s)–(v-s).

Утверждение 2.5.1. *При условиях* (i-s)–(vi-s) *равенство* $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\check{\mathbf{P}}_\theta = \check{\mathbf{P}}_\xi$ *.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{P}_2$ распределение переменной

$$e \doteq (\varepsilon_2[1]; \ldots; \varepsilon_2[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}.$$

Обозначим $\check{p}_\theta(\cdot)$, $p_\theta(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ плотности распределений соответственно $\check{\mathbf{P}}_\theta$, $\mathbf{P}_\theta$, $\mathbf{P}_2$. Поскольку $\check{z} = z + e$, имеет место равенство $\check{p}_\theta(\check{z}) = \int p_\theta(\check{z} - e) p_2(e)\, de$. Тогда $\check{p}_\theta(\cdot) \neq \check{p}_\xi(\cdot)$ влечет $p_\theta(\cdot) \neq p_\xi(\cdot)$. Обратно, $z = \check{z} - e$, тогда $p_\theta(z) = \int \check{p}_\theta(z + e) p_2(e)\, de$. Следовательно, $p_\theta(\cdot) \neq p_\xi(\cdot)$ влечет $\check{p}_\theta(\cdot) \neq \check{p}_\xi(\cdot)$. Утверждение доказано. □

Замечание 2.5.2. Вследствие утверждения 2.5.1, при анализе идентифицируемости систем (2.5.1) можно считать $\varepsilon_2[\cdot] \equiv 0$. В частности, при $\varepsilon_1[\cdot] \equiv 0$ условия идентифицируемости системы (2.5.1) в точности совпадают с условиями различимости системы (2.3.1): условия (i-s)–(vi-s) переходят в условия (i)–(ii) на с. 91, и применимы все утверждения раздела 2.3. Такой, на первый взгляд, неожиданный результат является следствием рассматриваемого здесь определения идентифицируемости. Это определение 2.5.1, как и определение 2.1.1, ничего не говорит о количественной мере идентифицируемости. Количественные показатели изучаются в главе 5.

2.5.1 Частные случаи

При $\varepsilon_2[\cdot] \equiv 0$ система (2.5.1) является конечно-траекторным аналогом систем типа ARMAX, который включает в себя как частные случаи системы типов AR и ARMA [195]. Условия (i-s)–(vi-s) не требуют управляемости системы, поэтому уравнение (2.5.1) также соответствует структурам AR(I)MAX Бокса и Дженкинса [195]. В предельном случае $N \to \infty$ при $L = 1$ с рядом дополнительных ограничений на параметризацию эти системы были исследованы Б. Г. Ворчиком (1985) [22]. Установленное им условие идентифицируемости состояло в неразрешимости уравнения для многочленных матриц

$$\rho(s)\varphi_\theta(s) = \varphi_\xi(s) \tag{2.5.2}$$

относительно матрицы $\rho(s) \not\equiv I$ и вектора параметров $\xi \neq \theta$.

В случае $\varepsilon_1[\cdot] \equiv 0$ ($\mu_0 = \ldots = \mu_p = 0$) система (2.5.1) называется системой *с ошибками в наблюдаемых переменных* (errors in variables, EIV) [11,154,195]. С точки зрения идентифицреумости этот случай равносилен типу ARMAX (2.5.1) с ограничениями $\mu_\theta(s) \equiv \gamma_\theta(s)$, $\varepsilon_2[\cdot] \equiv 0$, $\varepsilon_1[\cdot] \not\equiv 0$. Системы EIV с конечными длинами траекторий N в статистическом пределе растущего объема выборки $L \to \infty$ исследовались в статьях автора [67, 68, 70, 198]. Было показано, что при условиях (i-s)–(vi-s) условия идентифицируемости таких систем формулируются как неразрешимость уравнения (2.5.2) с заменой $\varphi_\theta(s)$ на $\gamma_\theta(s)$ (см. утверждение 2.3.1 и теорему 3.4.1 ниже). Здесь мы проведем обобщение результатов, полученных в предыдущих разделах, на случай систем (2.5.1) с возмущениями $\varepsilon_1[\cdot] \not\equiv 0$, $\varepsilon_2[\cdot] \not\equiv 0$, и установим общие условия идентифицируемости для конечно-траекторных аналогов стохастических систем типов AR, ARMA, ARMAX, AR(I)MAX, EIV.

2.5.2 Условия идентифицируемости

Результат состоит в следующем*).

Теорема 2.5.1. *При условиях* (i-s)–(vi-s) *система* (2.5.1) *глобально идентифицируема в точке* θ, *если уравнение*

$$\rho(s)\begin{pmatrix} \gamma_\theta(s) & \mu_\theta(s)R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_\xi(s) & \mu_\xi(s) \end{pmatrix}, \tag{2.5.3}$$

рассматриваемое как условие на унимодулярную матрицу $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$, *числовую матрицу* $R = \Sigma_1^{1/2} Q \Sigma_1^{-1/2}$, *где* Q *ортогональная, и вектор параметров* $\xi \in \Theta$, *влечет равенства* $\rho(s) \equiv I$, $Q = I$, $\xi = \theta$. *Система локально идентифицируема в точке* $\theta \in \Theta$, *если указанная импликация имеет место для точек* $\xi \in V(\theta) \subset \Theta$ *в некоторой окрестности* $V(\theta)$. *При дополнительном предположении о нормальности распределений величин* $\varepsilon_1[\cdot]$ *эти условия идентифицируемости становятся необходимыми и достаточными.*

Доказательство. См. приложение, раздел 2.7.2. □

Следствие 2.5.1. *Пусть* $\theta \doteq (\theta_1; \theta_2)$, $\Theta = \Theta_1 \otimes \Theta_2$, $\gamma_\theta(s) = \gamma_{\theta_1}(s)$, $\mu_\theta(s) = \mu_{\theta_2}(s)$, *и уравнение* $\rho(s)\gamma_{\theta_1}(s) = \gamma_{\xi_1}(s)$, *рассматриваемое относительно унимодулярной матрицы* $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$ *и параметров* $\xi_1 \in \Theta_1$ ($\xi_1 \in V(\theta_1) \subset \Theta_1$), *влечет* $\rho(s) \equiv I$, $\xi_1 = \theta_1$. *Тогда параметр* θ_1 *глобально* (*локально*) *идентифицируем в точке* θ. *Если параметр* θ_1 *идентифицируем, то параметр* θ_2 *глобально* (*локально*) *идентифицируем, если* (*и только если, при дополнительном условии нормальности*) *уравнение*

$$(\mu_{0,\theta_2}; \ldots; \mu_{p,\theta_2})\, R = (\mu_{0,\xi_2}; \ldots; \mu_{p,\xi_2}),$$

рассматриваемое относительно $R = \Sigma_1^{1/2} Q \Sigma_1^{-1/2}$, *где* Q *ортогональная и* $\xi_2 \in \Theta_2$ ($\xi_2 \in V(\theta_2) \subset \Theta_2$), *влечет* $Q = I$, $\xi_2 = \theta_2$.

---

*) Эта теорема была опубликована без полного доказательства в статье автора [72] в другой формулировке: там предполагалось, что начальные условия w_0 имеют распределение с нулевым средним и положительно определенной матрицей вторых моментов. Оказывается, при этом условии теорема неверна. Здесь мы исправляем ошибку в условии теоремы и публикуем полное доказательство.

Следствие 2.5.2. *Если уравнение* $\rho(s)\mu_\theta(s)R = \mu_\xi(s)$, *рассматриваемое относительно унимодулярной матрицы* $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$, $R = \Sigma_1^{1/2} Q \Sigma_1^{-1/2}$, *где* Q *ортогональная и* $\xi \in \Theta$ ($\xi \in V(\theta) \subset \Theta$), *влечет* $\rho(s) \equiv I$, $Q = I$, $\xi = \theta$, *то система* (2.5.1) *глобально (локально) идентифицируема в точке* θ.

Замечание 2.5.3. Из следствия 2.5.2 заключаем, что существуют матрицы $\mu_\theta(s)$ такие, что система (2.5.1) идентифицируема независимо от значений $\gamma_\theta(s)$. Например, можно взять $\Sigma_1 = I$, μ_p, μ_{p-1} независимыми от θ и неособенными такими, что $\mu_p^{-1}\mu_{p-1} = \mathrm{diag}(l_1, \ldots, l_r)$, $l_i \neq l_j \neq 0\ \forall i \neq j$. В этом случае выполнено условие следствия 2.5.2. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что условие $\exists \rho(s) \quad \exists R \quad \rho(s)\mu_\theta(s)R = \mu_\xi(s)$ будет равносильно условию

$$\exists \pi \quad \exists Q \quad \pi \varepsilon_\theta \begin{pmatrix} Q & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q \end{pmatrix} = \varepsilon_\xi, \tag{2.5.4}$$

где $\varepsilon_\theta = \mu_\theta$ ввиду $\det \mu_p \neq 0$ (см. теорему 2.3.3). Из условия (2.5.4) следуют равенства $\pi = I$, $Q = I$, $\xi = \theta$.

Наличие многочленных матриц делает критерий теоремы 2.5.1 алгоритмически непроверяемым. Тем не менее, в частном случае, упомянутом в следствии 2.5.1 теоремы 2.5.1, можно использовать конечно-проверяемый ранговый критерий из теорем 2.3.2–2.3.3.

2.6 Классификация стохастических систем по сложности условий идентифицируемости

В этом разделе показывается, что алгоритмическая сложность условий идентифицируемости линейных стационарных стохастических систем определяется структурой специальной матрицы наблюдения. На этом основании предлагается новый подход к классификации линейных систем; также дается новый способ получения априорных оценок сложности алгоритмов идентификации — исходя только из структуры матрицы наблюдения.

Рассмотрим стохастические линейные системы из более широкого класса, чем (2.5.1), отличающиеся наличием матрицы наблюдения M:

$$\begin{gathered} (\gamma_{0,\theta} + \cdots + \gamma_{p,\theta}s^p)\ z[k] = (\mu_{0,\theta}s^0 + \ldots + \mu_{p,\theta}s^p)\ \varepsilon_1[k], \\ \check{z}[j] = M \begin{pmatrix} z[j] \\ \varepsilon_1[j] \end{pmatrix} + \varepsilon_2[j], \qquad j \in \overline{1,N}, \qquad k \in \overline{1, N-p}. \end{gathered} \tag{2.6.1}$$

Здесь $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^v$ — фиксированный вектор параметров, $\gamma_{i,\theta}$, $\mu_{i,\theta}$ — матричные коэффициенты, $z[\cdot] \in \mathbb{R}^{r+m}$ — вектор переменных входа, выхода, $\check{z}[\cdot] \in \mathbb{R}^{r'+m'+l'}$ — вектор наблюдений (измерений переменных входа, выхода и переменных $\varepsilon_1[\cdot]$ правой части), $M \in \mathbb{R}^{(r'+m'+l')\times(r+m+l)}$ — матрица наблюдения, $r' \leqslant r$, $m' \leqslant m$, $l' \leqslant l$, $\varepsilon_1[\cdot] \in \mathbb{R}^l$,

$\varepsilon_2[\cdot] \in \mathbb{R}^{r'+m'+l'}$ — случайные возмущения.

Считаем, что выполнены условия (i-s)–(vi-s) на с. 103.

Без ограничения общности полагаем, что выходные переменные $y[\cdot]$ в векторе $z[\cdot]$ расположены на первых местах. По поводу определения входных и выходных переменных см. замечание 1.4.1 на с. 66. Из условия (iii-s) на с. 103 следует, что все переменные в случайном векторе $\varepsilon_1[\cdot]$ являются входными.

Запись (2.6.1) охватывает собой конечно-траекторные аналоги известных в литературе классов линейных стохастических систем: FIR, ARX, ARMAX, ARMA, ARARX, ARARMAX, EIV, OE, BJ, GMS.

Покажем, что алгоритмическая сложность критериев идентифицируемости определяется тремя типами структуры матрицы наблюдения M.

1-й тип: все переменные системы "напрямую измеряемы". Это самый простой случай неособенной матрицы наблюдения: $\det M \neq 0$ (например, $M = I$).

2-й тип: часть переменных входа "не измеряемы напрямую". В эту группу входят системы с матрицами наблюдения вида $M = \left(\begin{array}{c|cc} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \end{array}\right)$ или

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right), \tag{2.6.2}$$

где подматрица $M_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ неособенная, $\det M_1 \neq 0$, $r' = r$, а столбцы подматрицы M_2 линейно зависимы. Последнее означает, что часть входных переменных $u[\cdot]$ и $\varepsilon_1[\cdot]$ (точнее, определенные подматрицей M_2 специальные линейные комбинации этих переменных) напрямую не измеряемы.

3-й тип: часть переменных выхода "не измеряемы напрямую". В эту группу входят системы с матрицами наблюдения вида

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right), \tag{2.6.3}$$

где столбцы подматрицы $M_1 \in \mathbb{R}^{r'\times r}$ линейно зависимы.

Условия идентифицируемости

Системы первого типа

Теорема 2.6.1. *В предположениях* (i-s)–(vi-s) *система* (2.6.1) *с матрицей* $M = I$ *глобально идентифицируема в точке* θ, *если (и только если) уравнение*

$$\rho(s)\left(\gamma_\theta(s), \mu_\theta(s)\right) = \left(\gamma_\xi(s), \mu_\xi(s)\right)$$

относительно унимодулярной матрицы $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$ *и вектора параметров* $\xi \in \Omega$ *имеет единственное решение* $\rho(s) \equiv I$, $\xi = \theta$. *Система локально идентифицируема в точке* $\theta \in \Omega$, *если (и только если) единственность решения имеет место в некоторой окрестности* $\xi \in V(\theta) \subset \Omega$.

Из теоремы вытекают конечнопроверяемые (за полиномиальное время) критерии идентифицируемости в виде ограничений на ранги специальных подматриц из коэффициентов системы (2.6.1) (см. утверждения 2.3.1, 2.3.2, теорему 2.3.1 и далее в разделе 2.3).

Системы второго типа

Этот тип систем описывается уравнениями вида (2.5.1). В частности, если $M = \left(\begin{array}{c|cc} I_{r+m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \end{array}\right)$ или $M = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{M}_1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{M}_2 \end{array}\right)$, где подматрица $\widetilde{M}_1 \in \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+m)}$ неособенная, $r' = r$, $m' = m$, то условия идентифицируемости в точности даются теоремой 2.5.1 и следствиями. См. раздел 2.5. Если матрица наблюдения имеет вид (2.6.2), где подматрица $M_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ неособенная, а подматрица $\widetilde{M}_1 \in \mathbb{R}^{(r+m')\times(r+m)}$ имеет линейно зависимые столбцы, $m' \leqslant m$, то в теореме 2.5.1 нужно переопределить матрицы $\gamma_\theta(s)$, $\mu_\theta(s)$.

Присутствие многочленных матриц в уравнении (2.5.3) делает условие теоремы 2.5.1 алгоритмически непроверяемым. Однако в частных случаях, описанных в разделе 2.5, можно применить эквивалентный критерий, проверяемый за конечное (полиномиальное) число шагов, аналогичный критерию теоремы 2.6.1.

Системы третьего типа

Можно показать, что при условиях (i-s)–(vi-s) всегда существует равносильное преобразование, переводящее систему (2.6.1) из третьего ко второму типу. Условия идентифицируемости даются теоремой 2.5.1, но с матрицами, получаемыми из матриц исходной системы нелинейным преобразованием. По этой причине построение критериев идентифицируемости в виде ограничений на ранги специальных подматриц из коэффициентов исходной системы для систем третьего типа в общем случае невозможно.

Классификация линейных стохастических систем

Сначала кратко изложим классификацию, предложенную Л. Льюнгом (1987) [195]. Она выражает собой традицию, принятую в современной зарубежной литературе.

За основу принимается следующая символическая запись линейной системы:

$$A(s)y[k] = \frac{B(s)}{F(s)}u[k] + \frac{C(s)}{D(s)}e[k]. \tag{2.6.4}$$

Здесь s — оператор сдвига, $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ — многочлены. Сигналы $y[k]$, $u[k]$ измеряются напрямую, а $e[k]$ — не измеряемый напрямую "гауссовый белый шум":

$$\mathbf{M}\, e[k] = 0, \qquad \mathbf{M}\, e[k]e[k'] = \delta_{kk'},$$

$\delta_{kk'}$ — символ Кронекера. Заметим, что в системе (2.6.4) нет ограничения сверху на значения индекса времени k. Для идентификации таких систем используются методы типа рекуррентного МНК по ошибке прогноза с рассмотрением предельных случаев траекторий бесконечной длины $k \to \infty$ (см. введение).

Классификация Л. Льюнга представляется в виде таблицы:

Многочлены в формуле (2.6.4)	Наименование модели	
B	FIR	1
AB	ARX	2
ABC	ARMAX	2
AC	ARMA	2
ABD	ARARX	3
$ABCD$	ARARMAX	3
BF	OE, EIV	1
$BFCD$	BJ	3
$ABFCD$	GMS	3

Многочлены, отсутствующие в левой позиции, полагаются равными единице.

Для изучения условий идентифицируемости в смысле определения 2.5.1 следует перейти от символической записи (2.6.4) к соответствующей системе (2.6.1). Ввиду замечания 2.5.2 на с. 105, возмущения $\varepsilon_2[\cdot]$ ”качественно”[*)] не влияют на идентифицируемость, и можно считать $\varepsilon_2[\cdot] \equiv 0$.

Исходя из структуры матрицы наблюдения M в системе (2.6.1), определяется тип системы по сложности уравнений идентифицируемости (последний столбец таблицы).

Системы вида (2.6.1), в отличие от (2.6.4), будем называть *конечно-траекторными* (описаниями).

Переход от символической записи к конечно-траекторному описанию

Чтобы сопоставить символической записи (2.6.4) систему уравнений вида (2.6.1), раскроем дроби $\frac{B(s)}{F(s)}$, $\frac{C(s)}{D(s)}$, введя вспомогательные переменные $x[k]$, $\chi[k]$. Система (2.6.4) запишется в виде:

$$\begin{cases} A(s)y[k] = x[k] + \chi[k] \\ F(s)x[k] = B(s)u[k] \\ D(s)\chi[k] = C(s)e[k]. \end{cases} \tag{2.6.5}$$

[*)] Но не количественно! — количественные показатели идентифицируемости обсуждаются в главе 5.

Обозначим измеряемые напрямую переменные символом $\check{z}[k]$ и запишем (2.6.5) через матрицы (заметим, что мы не пишем возмущения $\varepsilon_2[k]$, см. замечание 2.5.2):

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{ccc|cc} A(s) & -I & -I & 0 & 0 \\ 0 & F(s) & 0 & B(s) & 0 \\ 0 & 0 & D(s) & 0 & C(s) \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{ccc|cc} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.6}$$

Из уравнений (2.6.6) можно получить все частные случаи систем, встречающиеся в вышеприведённой таблице.

Следую Л. Льюнгу [195], системы (2.6.4), (2.6.6) называем системами типа GMS (General Model Structure).

Расмотрим частные случаи систем GMS, следуя классификации Л. Льюнга.

EIV

Системы с ошибками наблюдений. Символическая запись:

$$A(s)y[k] = B(s)u[k] + A(s)e_y[k] - B(s)e_u[k].$$

Конечно-траекторное описание:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{c|ccc} A(s) & -B(s) & -A(s) & -B(s) \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e_y[k] \\ e_u[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|ccc} I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e_y[k] \\ e_u[k] \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Возможен второй тип конечно-траекторного представления систем EIV, учитывающий аддитивные ошибки наблюдений:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} A(s) & -B(s) \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_y[k] \\ \hline e_u[k] \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

Равносильные системы (2.6.7) и (2.6.8) отличаются способом представления ошибок — в первом или во втором уравнении системы. Из теоремы 2.5.1 следует, что наличие возмущений во втором уравнении не влияет на идентифицируемость. Поэтому нужно помещать ошибки во второе уравнение, если только это возможно. Единственное условие, которое нужно при этом соблюсти, состоит в том, чтобы матрица наблюдения во втором уравнении не зависела от θ.

Из вида представления (2.6.8) заключаем, что системы EIV принадлежат *первой* группе сложности.

FIR

Символическая запись: $y[k] = B(s)u[k] + e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$\begin{cases} \left(I \;\middle|\; -B(s) \quad -I \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.9}$$

Конечно-траекторное представление второго типа, с ошибками во втором уравнении:

$$\begin{cases} \left(I \;\middle|\; -B(s) \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e[k] \\ \hline 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.10}$$

Из вида представления (2.6.10) заключаем, что системы типа FIR принадлежат *первой* группе сложности.

ARX

Символическая запись: $A(s)y[k] = B(s)u[k] + e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$\begin{cases} \left(A(s) \;\middle|\; -B(s) \quad -I \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix} = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.6.11}$$

Из вида представления (2.6.11) заключаем, что системы типа ARX принадлежат *второй* группе сложности.

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрица $A(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

ARMA

Символическая запись: $A(s)y[k] = u[k] + C(s)e[k]$.

В литературе общепринят вид систем ARMA без сигнала входа $u[k]$:

$$A(s)y[k] = C(s)e[k].$$

Соответствующее конечно-траекторное представление:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|c} A(s) & -C(s) \end{array}\right) \left(\frac{y[k]}{e[k]}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\frac{y[k]}{e[k]}\right). \end{array}\right. \tag{2.6.12}$$

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрица $C(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

Из вида представления (2.6.12) заключаем, что системы ARMA принадлежат *второй* группе сложности.

ARMAX

Символическая запись: $A(s)y[k] = B(s)u[k] + C(s)e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное представление:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|cc} A(s) & -B(s) & -C(s) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right). \end{array}\right. \tag{2.6.13}$$

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрица $C(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

Из вида представления (2.6.13) заключаем, что системы ARMAX принадлежат *второй* группе сложности.

ARARX

Символическая запись: $A(s)y[k] = B(s)u[k] + \frac{1}{D(s)}e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc|cc} A(s) & -I & -B(s) & 0 \\ 0 & D(s) & 0 & -I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right). \end{array}\right. \tag{2.6.14}$$

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрица $D(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

Из вида представления (2.6.14) заключаем, что системы ARARX принадлежат *третьей* группе сложности.

ARARMAX

Символическая запись: $A(s)y[k] = B(s)u[k] + \frac{C(s)}{D(s)}e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{cc|cc} A(s) & -I & -B(s) & 0 \\ 0 & D(s) & 0 & -C(s) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right). \end{cases} \tag{2.6.15}$$

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрицы $C(s)$, $D(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

Из вида представления (2.6.15) заключаем, что системы ARARMAX принадлежат *третьей* группе сложности.

OE

Символическая запись: $y[k] = \frac{B(s)}{F(s)}u[k] + e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{cc|cc} I & -I & 0 & -I \\ 0 & F(s) & -B(s) & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array}\right). \end{cases} \tag{2.6.16}$$

Конечно-траекторное представление второго типа, с ошибками во втором уравнении:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{cc|c} I & -I & 0 \\ 0 & F(s) & -B(s) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \hline u[k] \end{array}\right) = 0, \\ \\ \check{z}[k] = \left(\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \hline u[k] \end{array}\right) + \left(\begin{smallmatrix} e[k] \\ 0 \end{smallmatrix}\right). \end{cases}$$

Заметим, что соотношение между $x[k]$ и $y[k]$ в первом уравнении не зависит от θ. Это позволяет выразить $x[k]$ через $y[k]$ и упростить систему:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c|c} F(s) & -B(s) \end{array} \right) \left(\frac{y[k]}{u[k]} \right) = 0, \\
&\check{z}[k] = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \left(\frac{y[k]}{u[k]} \right) + \left(\frac{e[k]}{0} \right).
\end{aligned}
\right.
\tag{2.6.17}
$$

Из вида представления (2.6.17) заключаем, что системы типа OE принадлежат *первой* группе сложности.

BJ

Символическая запись: $y[k] = \frac{B(s)}{F(s)} u[k] + \frac{C(s)}{D(s)} e[k]$.

Соответствующее конечно-траекторное описание:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|cc} I & -I & -I & 0 & 0 \\ 0 & F(s) & 0 & B(s) & 0 \\ 0 & 0 & D(s) & 0 & C(s) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array} \right) = 0, \\
&\check{z}[k] = \left(\begin{array}{ccc|cc} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y[k] \\ x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array} \right).
\end{aligned}
\right.
\tag{2.6.18}
$$

Конечно-траекторное представление второго типа с ошибками во втором уравнении возможно, только если матрицы $C(s)$, $D(s)$ не зависит от идентифицируемых параметров.

Можно произвести упрощение системы, учитывая, что соотношение между переменными y, x, χ в первом уравнении не зависит от θ: подстановка $y = x + \chi$ приводит к системе вида

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} F(s) & 0 & B(s) & 0 \\ 0 & D(s) & 0 & C(s) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array} \right) = 0, \\
&\check{z}[k] = \left(\begin{array}{cc|cc} I & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x[k] \\ \chi[k] \\ \hline u[k] \\ e[k] \end{array} \right).
\end{aligned}
\right.
\tag{2.6.19}
$$

Из вида равносильного представления (2.6.19) заключаем, что системы типа BJ принадлежат *третьей* группе сложности.

Детерминированные системы

Для детерминированных систем ($\varepsilon_1[\cdot] \equiv 0$, $\varepsilon_2[\cdot] \equiv 0$) определяем отношение эквивалентности через равенство линейных многообразий измеряемых переменных. Отличие от рассмотренного выше стохастического случая состоит только в замене матриц дисперсий ненулевых входных сигналов на единичные матрицы. См. также замечание 2.5.2 на с. 105. Схема классификации остается без изменений.

О связи сложности условий идентифицируемости со сложностью алгоритмов идентификации

1-я группа сложности (системы FIR, OE, EIV). Параметры систем FIR состоятельно оцениваются линейным методом наименьших квадратов; решение дается явными формулами [195]. Параметры систем EIV и OE допускают состоятельные оценки, получаемые итерационными алгоритмами типа Егоршина—Осборна с гарантированной сходимостью из широкой области начальных приближений (см. примеры в разделах 3.7.4 и 5.3).

2-я группа сложности (системы ARX, ARMA, ARMAX). Оценки параметров получаются решением задачи дробно-линейного программирования; сходимость алгоритмов сильно зависит от начального приближения [46, 195].

3-я группа сложности (системы ARARX, ARARMAX, BJ, GMS). Анализ сложности задачи идентификации для этого случая требует дополнительных исследований.

Заключение

Из рассмотрения конечно-траекторных описаний вытекает, что системы EIV, FIR, OE, EIV по типу уравнений идентифицируемости попадают в первую группу сложности; системы ARX, ARMA, ARMAX — во вторую группу; системы ARARX, ARARMAX, BJ, GMS — в третью группу сложности.

При независимости некоторых матриц системы от идентифицируемых параметров система может иметь более простые уравнения идентифицируемости, попадая тем самым в группу номером ниже.

2.7 Приложение

2.7.1 Примеры

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x[t+1] + \theta_1 x[t] + \theta_2 y[t] = \theta_3 u[t], \\ \theta_4 x[t+2] + \theta_5 x[t+1] + \theta_6 x[t] + y[t+2] + \theta_7 y[t+1] + \theta_8 y[t] = \\ \qquad = \theta_9 u[t+1] + \theta_{10} u[t], \\ t \in \overline{1, N-2}. \end{cases} \tag{2.7.1}$$

Это система первой группы сложности. Для анализа идентифицируемости применяется теорема 2.6.1 и теоремы раздела 2.3. Выпишем матрицы:

$$\gamma_\theta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_6 & \theta_8 & -\theta_{10} & \theta_5 & \theta_7 & -\theta_9 & \theta_4 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$$\varepsilon_\theta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_6 & \theta_8 & -\theta_{10} & \theta_5 & \theta_7 & -\theta_9 & \theta_4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\varepsilon_{1,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_5 & \theta_7 & -\theta_9 & \theta_4 & 1 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_{2,\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r + d = 3.$$

Несложно увидеть, что $\operatorname{rank} \varepsilon_{2,\theta} = 1 < r+d$, необходимое условие идентифицируемости системы (2.7.1) не выполнено, и система не идентифицируема.

Пример 2. Рассмотрим систему, отличающуюся от (2.7.1) наличием стохастического сигнала невязки $e[t]$ в первом уравнении:

$$\begin{cases} x[t+1] + \theta_1 x[t] + \theta_2 y[t] = \theta_3 u[t] + e[t], \\ \theta_4 x[t+2] + \theta_5 x[t+1] + \theta_6 x[t] + y[t+2] + \theta_7 y[t+1] + \theta_8 y[t] = \\ \qquad = \theta_9 u[t+1] + \theta_{10} u[t], \\ t \in \overline{1, N-2}. \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Это система второй группы сложности. Для анализа идентифицируемости применяется теорема 2.5.1. Расширенная матрица ε_θ имеет вид

$$\varepsilon_\theta = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_6 & \theta_8 & -\theta_{10} & 0 & \theta_5 & \theta_7 & -\theta_9 & 0 & \theta_4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

Выпишем подматрицы $\varepsilon_{i,\theta}$:

$$\varepsilon_{1,\theta} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_5 & \theta_7 & -\theta_9 & 0 & \theta_4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \theta_1 & \theta_2 & -\theta_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \qquad \varepsilon_{2,\theta} = \left(\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Строки каждой из подматриц $\varepsilon_{i,\theta}$ линейно независимы. Следовательно, система (2.7.2) идентифицируема.

2.7.2 Доказательство теоремы 2.5.1

Нужно показать, что если $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$, то верно равенство

$$\rho(s) \begin{pmatrix} \gamma_\theta(s) & \mu_\theta(s) R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_\xi(s) & \mu_\xi(s) \end{pmatrix}, \tag{2.7.3}$$

для некоторой унимодулярной матрицы $\rho(s)$ и матрицы $R = \Sigma_1^{1/2} Q \Sigma_1^{-1/2}$, где Q ортогональная.

Сначала предположим отсутствие входных компонент в $z[\cdot]$, т. е $m = 0$. В случае $m \geqslant 1$ доказательство остается тем же, с небольшим изменением матриц H_0, H_1. Этот случай рассмотрен ниже.

Используя теорему 1.5.1, несложно показать, что условие (2.7.3) равносильно равенству

$$PG_\theta R' = G_\xi, \tag{2.7.4}$$

где G_θ есть РКТ-матрица, ассоциированная с многочленной матрицей

$$\varphi_\theta(s) = (\gamma_\theta(s), \mu_\theta(s)),$$

P неособенная, и

$$R' \doteq \text{block diag}\,(0, R, 0, R, \ldots).$$

Также условие (2.7.4) равносильно условию

$$(TA_\theta T^{-1}, TB_\theta R, C_\theta T^{-1}, D_\theta R) = (A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi) \tag{2.7.5}$$

для некоторой матрицы T, где $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ есть матрицы представления в нормальной форме (1.1.2) для системы (2.5.1). Заметим, что здесь четверка $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ строится по матрице $\varphi_\theta(s)$. Матрицы $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ могут быть записаны, например, в наблюдаемой форме восстанавливаемости (1.3.4), которая позволяет наиболее наглядным способом установить связь между параметризациями $\theta \mapsto (A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ и $\theta \mapsto \varphi_\theta$ (см. раздел 1.3.1).

Итак, пусть $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$.

Представим процесс z в виде суммы $z = H_0 w_0 + H_1 \varepsilon$, где $\varepsilon \doteq (\varepsilon_1[1]; \ldots; \varepsilon_1[N])$, и $H_0 = H_{0,\theta}$, $H_1 = H_{1,\theta}$ есть матрицы из марковских параметров:

$$H_0 \doteq \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{pmatrix}, \qquad H_1 \doteq \begin{pmatrix} D & & & & 0 \\ CB & D & & & \\ CAB & CB & D & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-2}B & \ldots & CAB & CB & D \end{pmatrix}. \tag{2.7.6}$$

Ввиду $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ имеем $\operatorname{cov}_\theta z = \operatorname{cov}_\xi z$, т. е.

$$H_\theta S H_\theta^\top = H_\xi S H_\xi^\top,$$

$$\text{где} \qquad H_\theta \doteq (H_{0,\theta}, H_{1,\theta}), \qquad S \doteq \begin{pmatrix} \Sigma_0 & & & 0 \\ & \Sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{2.7.7}$$

Согласно условию (vi-s) на с. 103 $\Sigma_0 = 0$. Тогда равенство (2.7.7) равносильно равенству

$$H_{1,\theta} S_1 H_{1,\theta}^\top = H_{1,\xi} S_1 H_{1,\xi}^\top, \qquad S_1 \doteq \begin{pmatrix} \Sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_1 \end{pmatrix}. \tag{2.7.8}$$

Заменяя матрицы B и D на матрицы

$$B' \doteq B\Sigma_1^{1/2}, \qquad D' \doteq D\Sigma_1^{1/2}, \tag{2.7.9}$$

получаем систему (A, B', C, D') . Она наблюдаема. Опуская штрихи, перепишем уравнение (2.7.8) в виде

$$H_{1,\theta} H_{1,\theta}^\top = H_{1,\xi} H_{1,\xi}^\top. \tag{2.7.10}$$

Кроме того, ввиду $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ имеет место равенство математических ожиданий $\mathbf{M}_\theta z = \mathbf{M}_\xi z$, т. е. $H_{0,\theta} w_0 = H_{0,\xi} w_0$.

Лемма 2.7.1. *Пусть пары матриц* (A_θ, C_θ) *и* (A_ξ, C_ξ) *наблюдаемы,* $A_\theta, A_\xi \in \mathbb{R}^{q\times q}$ *, и вектор* $w_0 \in \mathbb{R}^q$ *удовлетворяет условию* (vi-s) *общего положения одновременно для матриц* A_θ *и* A_ξ *(см. замечание 2.5.1). Тогда равенство*

$$\begin{pmatrix} C_\theta \\ C_\theta A_\theta \\ \vdots \\ C_\theta A_\theta^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} w_0 = \begin{pmatrix} C_\xi \\ C_\xi A_\xi \\ \vdots \\ C_\xi A_\xi^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} w_0$$

равносильно соотношению

$$\exists \quad W \in \mathbb{R}^{q\times q} \qquad \begin{pmatrix} C_\theta \\ C_\theta A_\theta \\ \vdots \\ C_\theta A_\theta^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\xi \\ C_\xi A_\xi \\ \vdots \\ C_\xi A_\xi^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} W.$$

Кроме того, $C_\theta = C_\xi W$ *,* $A_\xi = W A_\theta W^{-1}$ *, где*

$$W = \begin{pmatrix} w_0 & A_\xi w_0 & \dots & A_\xi^{q-1} w_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & A_\theta w_0 & \dots & A_\theta^{q-1} w_0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Доказательство. Первое равенство можно записать в виде

$$C_\theta \begin{pmatrix} w_0 & A_\theta w_0 & \dots & A_\theta^{q-1} w_0 & \dots \end{pmatrix} = C_\xi \begin{pmatrix} w_0 & A_\xi w_0 & \dots & A_\xi^{q-1} w_0 & \dots \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы Гамильтона—Кэли [23, глава IV] оно заменяется равенством для матриц из q столбцов:

$$C_\theta \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & A_\theta w_0 & \dots & A_\theta^{q-1} w_0 \end{pmatrix}}_{W_\theta} = C_\xi \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & A_\xi w_0 & \dots & A_\xi^{q-1} w_0 \end{pmatrix}}_{W_\xi}.$$

По условию общего положения, обе матрицы W_θ и W_ξ неособенные. Следовательно,

$$C_\theta = C_\xi W, \qquad W \doteq W_\xi W_\theta^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} C_\theta \\ C_\theta A_\theta \\ \vdots \\ C_\theta A_\theta^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\xi W \\ C_\xi W A_\theta \\ \vdots \\ C_\xi W A_\theta^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\xi W \\ C_\xi \left(W A_\theta W^{-1} \right) W \\ \vdots \\ C_\xi \left(W A_\theta^{q-1} W^{-1} \right) W \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\xi \\ C_\xi A_\xi \\ \vdots \\ C_\xi A_\xi^{q-1} \\ \vdots \end{pmatrix} W,$$

где $A_\xi = W A_\theta W^{-1}$. Учитывая, что все приведенные рассуждения обратимы, приходим к утверждению леммы. □

Лемма 2.7.2. *Пусть системы* $(A_\theta, B_\theta, C_\theta, D_\theta)$ *и* $(A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi)$ *наблюдаемы, вектор* w_0 *удовлетворяет условию* (vi-s) *общего положения одновременно для матриц* A_θ *и* A_ξ *(см. замечание 2.5.1), и столбцы матриц* D_θ *,* D_ξ *линейно независимы. Тогда система из двух равенств* $H_{0,\theta} w_0 = H_{0,\xi} w_0$ *и* $H_{1,\theta} H_{1,\theta}^\top = H_{1,\xi} H_{1,\xi}^\top$ *равносильна равенству*

$$(T A_\theta T^{-1}, T B_\theta Q, C_\theta T^{-1}, D_\theta Q) = (A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi),$$

для некоторых матриц T *неособенной и* Q *ортогональной.*

Доказательство. Из линейной независимости столбцов D_θ следует линейная независимость столбцов матрицы $H_{1,\theta}$, и так же для $H_{1,\xi}$. Тогда из равенства $H_{1,\theta} H_{1,\theta}^\top = H_{1,\xi} H_{1,\xi}^\top$ следует равенство $H_{1,\theta} = H_{1,\xi} P$, где $P^{-1} = P^\top$ — ортогональная матрица. Из клеточно-нижнетреугольной структуры матриц $H_{1,\theta}$, $H_{1,\xi}$ следует клеточная нижнетреугольная структура матрицы P: $P = \begin{pmatrix} P_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ P_{1N} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}$. Условие ортогональности приводит к равенству $P = \begin{pmatrix} P_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{NN} \end{pmatrix}$, $P_{ii}^{-1} = P_{ii}^{\top}$. Из равенств $D_\theta = D_\xi P_{ii}$ следуют равенства

$$P_{11} = P_{22} = \ldots = P_{NN} \doteq Q^{-1} = Q^{\top}.$$

В итоге имеем

$$\begin{pmatrix} D & & & & 0 \\ CB & D & & & \\ CAB & CB & D & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-2}B & \ldots & CAB & CB & D \end{pmatrix}_\theta \begin{pmatrix} Q & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D & & & & 0 \\ CB & D & & & \\ CAB & CB & D & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-2}B & \ldots & CAB & CB & D \end{pmatrix}_\xi .$$

Применяя лемму 2.7.1 и теорему 1.2.2, получаем соотношения

$$A_\xi = TA_\theta T^{-1}, \qquad B_\xi = TB_\theta Q, \qquad C_\xi = C_\theta T^{-1}, \qquad D_\xi = D_\theta Q. \tag{2.7.11}$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Восстанавливая опущенные штрихи в (2.7.10), ввиду соотношения (2.7.9) получаем (2.7.5) и (2.7.3).

Пусть (2.7.3). Тогда имеют место соотношение (2.7.5) и равенство $H_{1,\theta}R' = H_{1,\xi}$ с матрицей $R' = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R \end{pmatrix}$, где $R = \Sigma_1^{1/2} Q \Sigma_1^{-1/2}$ и Q ортогональная. В предположении нормальности распределений величин $\varepsilon_1[\cdot]$ отсюда следует равенство распределений $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$.

Рассмотрим случай $m \geqslant 1$. Матрицы H_0, H_1 (2.7.6) здесь модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} B &\doteq \begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix}, \qquad B_m \in \mathbb{R}^{qr\times m}, \qquad B_l \in \mathbb{R}^{qr\times l}, \\ D &\doteq \begin{pmatrix} D_m & D_l \end{pmatrix}, \qquad D_m \in \mathbb{R}^{r\times m}, \qquad D_l \in \mathbb{R}^{r\times l}, \\ H_0 &\doteq \begin{pmatrix} \overline{H}_0 \\ \hline 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{H}_0 \doteq (C; CA; \ldots; CA^{N-1}), \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

$$
H_1 \doteq \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} D_m & D_l \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\
CA\begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_m & D_l \end{pmatrix} & 0 & 0 \\
CA^2\begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix} & CA\begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_m & D_l \end{pmatrix} & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix} & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.
$$

После перестановки строк получаем

$$
H_0 \sim \begin{pmatrix} \widetilde{C}A \\ \vdots \\ \widetilde{C}A^{N-1} \end{pmatrix}, \qquad H_1 \sim \begin{pmatrix}
\widetilde{D} & & & & 0 \\
\widetilde{C}B & \widetilde{D} & & & \\
\widetilde{C}AB & \widetilde{C}B & \widetilde{D} & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\widetilde{C}A^{N-2}B & \dots & \widetilde{C}AB & \widetilde{C}B & \widetilde{D}
\end{pmatrix},
$$

где

$$
\widetilde{C} \doteq \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{D} \doteq \begin{pmatrix} D_m & D_l \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.
$$

Матрица дисперсии $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ заменяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} \Sigma_u & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(m+l)\times(m+l)}$. Отметим, что пара $(A,\widetilde{C})$ наблюдаема, если (и только если) наблюдаема пара (A,C). Также матрица $\widetilde{D}$ имеет линейно независимые столбцы, если (и только если) линейно независимы столбцы D_l. Ввиду сделанных замечаний можно перейти к рассмотренному выше случаю $m=0$, заменив матрицы C, D на матрицы $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, и продолжить доказательство теоремы от формулы (2.7.6). На этом пути получаем соотношения вида (2.7.11):

$$
\begin{aligned}
A_\xi = TA_\theta T^{-1}, \qquad & \begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix}_\xi &=& \; T\begin{pmatrix} B_m & B_l \end{pmatrix}_\theta \widetilde{Q}, \\
C_\xi = C_\theta T^{-1}, \qquad & \begin{pmatrix} D_m & D_l \\ I_m & 0 \end{pmatrix}_\xi &=& \begin{pmatrix} D_m & D_l \\ I_m & 0 \end{pmatrix}_\theta \widetilde{Q}.
\end{aligned}
$$

Из последнего равенства и условия ортогональности $\widetilde{Q}$ следует

$$
\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \qquad Q \quad \text{ортогональная.}
$$

После восстановления штрихов приходим к соотношениям

$$\begin{array}{rcl} TA_\theta T^{-1} & = & A_\xi, \\ T\Big(B_m \quad B_l R\Big)_\theta & = & \Big(B_m \quad B_l\Big)_\xi, \\ C_\theta T^{-1} & = & C_\xi, \\ \Big(D_m \quad D_l R\Big)_\theta & = & \Big(D_m \quad D_l\Big)_\xi. \end{array}$$

Последнее равносильно (2.7.3).

Доказательство части (2.7.3) $\Rightarrow$ $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ в точности такое же, как для случая $m = 0$. Теорема доказана. $\square$

Глава 3

Вариационные оценки параметров

Идея Гаусса расправиться с шумом
при помощи [линейного] метода наименьших квадратов
в большинстве случаев не годится
(Р. Калман (1985) [48])

В широком круге задач идентификации существенным является ограничение на длину интервала наблюдения. Это может быть отслеживание переменных параметров нестационарных динамических объектов, в том числе задачи динамического сжатия потоков аудио- и видео-информации, или задачи идентификации в реальном времени в контуре адаптивного управления. Здесь желаемое время наблюдения составляет доли переходного процесса.

Ситуация осложняется тем, что в наблюдаемых сигналах, как правило, присутствуют аддитивные измерительные возмущения. В этом случае простые линейные методы типа МНК К. Гаусса по невязке уравнения не обеспечивают состоятельных оценок параметров [46,110,196] (см. также численные примеры в разделах 3.7.4, 5.3). Напомним, оценка $\hat{\theta}(\mathcal{M})$ параметра θ_*, полученная по множеству $\mathcal{M} \doteq \big\{x_{(1)}, \ldots, x_{(M)}\big\}$ статистически независимых наблюдений случайных величин $x_{(i)}$ с одинаковым распределением P_{θ_*}, называется состоятельной, если имеет место сходимость $\hat{\theta}(\mathcal{M}) \to \theta_*$ при увеличении объема выборки $M \to \infty$. В 1960–80-х гг. разными авторами был предложен ряд методов [46,96,110,136,195], которые учитывают аддитивные измерительные возмущения. Эти методы принадлежат классу прямых, или "разомкнутых" (см. введение). Статистическая состоятельность у этих методов достигается в пределе $N \to \infty$ бесконечной длины измеряемой траектории, т. е. в качестве множества наблюдений принимается множество отсчетов одной траектории (одного процесса): $\mathcal{M} \doteq \{z = (z[1]; \ldots; z[N])\}$, $M \doteq N$.

В диссертации рассматривается задача параметрической идентификации при ограничении на длину N наблюдаемых траекторий. В этом случае объем выборки наблюдений определяется числом L траекторий, $M \doteq L$:

$$\mathcal{M} \doteq \big\{z_{(1)}, \ldots, z_{(L)}\big\}\,; \qquad z_{(i)} = \big(z_{(i)}[1]; \ldots; z_{(i)}[N]\big)\,.$$

Состоятельность исследуется в пределе $L \to \infty$. Это задача типа де Прони, описанная во введении. Для решения этой задачи в 1970–90-х гг. разными авторами были предложены различные нелинейные варианты метода наименьших квадратов. В этой главе мы описываем эти методы с общих позиций и доказываем их состоятельность*).

Для достижения этой цели вводится новый класс *вариационных* оценок, включающий в себя как классические оценки ортогональной регрессии типа К. Пирсона, так и оценки вариационного метода А. О. Егоршина (ВМ, GTLS, STLS). Показано, что выбором той или иной структуры матрицы ограничений в вариационной целевой функции можно получить всех основные типы орторегрессионных оценок, встречающиеся в литературе. Центральным моментом при таком обобщении является рассмотрение клеточных матриц, соответствующих многомерным системам из нескольких уравнений (см., например, на с. 15 замечание о принадлежности задачи К. Пирсона к классу вариационных). Все аналитические выкладки диссертации учитывают многомерный случай. Рассмотрение многомерного случая хотя и усложняет изложение, но есть совершенно необходимый шаг, позволяющий с общих позиций рассмотреть широкий класс вариационных методов и получить новые теоремы.

Первым теоретическим результатом 3-й главы является теорема 3.4.1 о состоятельности вариационных оценок при условии полноты наблюдений. Эта теорема, опубликованная автором диссертации в 1997 г. [70], обобщает результат о состоятельности М. Аоки и П. Ю (1970) [133] для скалярных систем из одного уравнения и Л. Глэзера (1982) [158] и У. Фуллера (1987) [154] для многомерных систем нулевого порядка. Близкое к теореме 3.4.1 утверждение о состоятельности оценок НКПС (STLS) было получено позже за рубежом в статье А. Кукуша, И. Марковского и С. Ван Хуффель (2005) [180].

Для вариационных оценок формулируется условие полноты наблюдений, при котором идентифицируемость в смысле определений главы 2 гарантирует состоятельность. В теореме 3.2.1 и ее следствии установлена алгебраическая связь между условием полноты при нулевых возмущениях и условием идентифицируемости (различимости) из главы 2.

Состоятельность орторегрессионных оценок доказывается без предположений об устойчивости или управляемости идентифицируемой системы.

Вторым важным теоретическим результатом 3-ей главы является описание нового общего подхода к сравнению оценок, основанного на линеаризации целевой функции и понятии линейного приближения оценки в случае малых амплитуд возмущений. В качестве примера были построены линейные приближения для оценок ОР, ОРМ и ВМ. Для линейных приближений показано, что оценки ВМ в широком ряде случаев имеют меньшую дисперсию за счет наиболее полного использования информации о линейных связях между наблюдаемыми переменными, чем оценки ОР и ОРМ (теоремы 3.5.1, 3.5.2).

Третьим существенным результатом главы является решение на основе вариационного подхода проблемы локальных экстремумов, поставленной И. И. Перельманом

*) Основная теорема 3.4.1 была опубликована автором диссертации в 1997 г. [69,70]; близкий результат был получен за рубежом в 2005 г. [180].

(1981) [98]. Суть проблемы в том, что при идентификации прямыми методами на конечных выборках наблюдений число локальных экстремумов растет вместе с длиной выборки. В диссертации показано, что при вариационной постановке задачи идентификации число локальных экстремумов целевой функции не превосходит размерности вектора идентифицируемых параметров независимо от длины выборки. Для обоснования этого результата вводится новое понятие равносильности по состоятельности: два метода получения оценок равносильны по состоятельности, если из состоятельности одного метода следует состоятельность другого и наоборот. Доказано утверждение 3.4.1 о равносильности по состоятельности разных видов орторегрессионных оценок в задаче вариационной идентификации параметров динамической системы. Как следствие, оказывается возможным при построении состоятельного решения той или иной задачи идентификации заменить наиболее сложные в вычислительном отношении вариационные целевые функции ВМ более простыми орторегрессионными целевыми функциями. Показано, что при вариационной постановке задачи идентификации состоятельные оценки параметров могут быть получены по самой простой орторегрессионной целевой функции, число экстремумов которой не превосходит размерности вектора идентифицируемых параметров.

3.1 Класс систем

Во введении в качестве примера были описаны простейшие динамические уравнения (0.0.2), (0.0.21). В этой главе будем исследовать подобные (0.0.21) системы из нескольких уравнений $r \geqslant 1$:

$$(\gamma_p(\theta)s^p + \gamma_{p-1}(\theta)s + \ldots + \gamma_0(\theta))\, z[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p}. \tag{3.1.1}$$

Напомним, здесь $p \geqslant 0$ — формальный порядок системы, $N \geqslant p+1$ — длина траектории (процесса), $z[k] \in \mathbb{R}^{r+m}$ — системные переменные, s — символ сдвига $sz[k] = z[k+1]$, $\gamma_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}$ — постоянные матричные коэффициенты, зависящие от фиксированного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$, подлежащего оцениванию.

Понадобится также равносильная форма записи системы (3.1.1) (см. замечание 1.4.1 главы 2):

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1, N-p}, \tag{3.1.2}$$

$$\alpha_i = \alpha_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times r}, \qquad \beta_i = \beta_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times m},$$

$$(\alpha_i, -\beta_i) = \gamma_i(\theta) \doteq \gamma_i, \qquad (y[k]; u[k]) \doteq z[k].$$

Как и ранее, определим матричный многочлен

$$\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_p(\theta)s^p + \gamma_{p-1}(\theta)s + \ldots + \gamma_0(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s], \tag{3.1.3}$$

и числовую матрицу

$$\gamma_\theta \doteq (\gamma_0(\theta), \gamma_1(\theta), \ldots, \gamma_p(\theta)) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}. \tag{3.1.4}$$

Обозначим $\gamma^i \doteq \left(\gamma_0^i\gamma_1^i \ldots \gamma_p^i\right)$ i-ю строку γ_θ и определим вектор

$$\gamma = \gamma(\theta) \doteq \left(\gamma^1; \ldots; \gamma^r\right) \doteq \operatorname{vect}\gamma_\theta \tag{3.1.5}$$

как последовательно составленный из строк матрицы γ_θ.

Запишем систему (3.1.1) в виде условия на процессы $z \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$:

$$G_\theta z = 0, \qquad z \doteq (z[1]; \ldots; z[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}, \tag{3.1.6}$$

$$G_\theta \doteq G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-p)r\times N(r+m)}.$$

Если принять порядок компонент (1.1.3),

$$z \doteq (y[1]; \ldots; y[N]; u[1]; \ldots; u[N])\,, \tag{3.1.7}$$

то большая матрица системы примет вид

$$G = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \alpha_0 & \ldots & \alpha_p & & 0 & -\beta_0 & \ldots & -\beta_p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha_0 & \ldots & \alpha_p & 0 & & -\beta_0 & \ldots & -\beta_p \end{array}\right) \doteq (G_\alpha | G_\beta)\,.$$

Матрица G имеет клеточно-теплицевую структуру, что прямо связано со стационарностью (автономностью) системы (3.1.1).

Наконец, система уравнений (3.1.6) может быть разрешена относительно $\gamma(\theta)$ (3.1.5):

$$G_\theta z \equiv V\gamma(\theta), \tag{3.1.8}$$

$$V \doteq \begin{pmatrix} I_r \otimes v_{(1)}^\top \\ \vdots \\ I_r \otimes v_{(N-p)}^\top \end{pmatrix}, \qquad v_{(i)}^\top \doteq \left(z[i]^\top \quad \ldots \quad z[i+p]^\top\right).$$

Символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц, I_r — единичная матрица $r \times r$.

Перестановкой строк уравнение (3.1.8) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{pmatrix} z \equiv V\gamma = \begin{pmatrix} \bar{V} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{V} \end{pmatrix} \gamma = \left(I_r \otimes \bar{V}\right) \gamma, \qquad \bar{V} \doteq \begin{pmatrix} v_{(1)}^{\top} \\ \vdots \\ v_{(N-p)}^{\top} \end{pmatrix}, \tag{3.1.9}$$

$$G_i \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i & & & 0 \\ & \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0^i & \gamma_1^i & \dots & \gamma_p^i \end{pmatrix}. \tag{3.1.10}$$

Ввиду леммы 1.2.1 имеет место равенство $\mathcal{N}\left(G_\theta\right) = \mathcal{R}\left(H(\theta)\right)$, матрица $H(\theta)$ определена в условии леммы 1.2.1. Столбцы $H(\theta)$ (1.2.8), если выбран порядок компонент (3.1.7), образуют базис $\mathcal{N}\left(G_\theta\right)$, или фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1). Поэтому для любого решения z возможно представление

$$z = H(\theta)w, \tag{3.1.11}$$

где $w \doteq (x_0; z_u)$, $z_u \doteq (u[1]; \dots; u[N])$ и x_0 — вектор начальных условий равносильной системы (1.1.2), см. определение 1.1.1 главы 1.

На систему (3.1.1) налагаем условия (i), (ii) из раздела 2.3 на с. 91. На протяжении этой главы условие (i) заменяем более сильным условием:

(i') $\gamma(\theta) = d + D\theta \doteq \widetilde{D}\vartheta$, где $\widetilde{D} \doteq (d, D)$, $\vartheta \doteq (1; \theta)$; матрица $\widetilde{D}$ задана, ее столбцы линейно независимы; Θ — открытое подмножество $\mathbb{R}^v$.

Дополнительно предполагаем корректность (различимость) параметризации $\tau:\ \theta \leftrightarrow G_\theta$ в смысле определения 2.3.1. Другими словами, отображение $\mathcal{N}\left(G_\theta\right) \to \theta$ должно быть однозначным для каждого значения параметра $\theta \in \Theta$: если в Θ $\theta_1 \neq \theta_2$, то $\mathcal{N}\left(G_{\theta_1}\right) \neq \mathcal{N}\left(G_{\theta_1}\right)$. Ввиду равенства $\mathcal{N}\left(G_\theta\right) = \mathcal{R}\left(H(\theta)\right)$ различимость равносильна следующему условию:

(i") Для матрицы $H(\theta)$ из условия леммы 1.2.1 равенство $\forall\ \xi, \theta \in \Theta$ $G_\xi H(\theta) = 0$ влечет $\xi = \theta$.

Различимость параметров определяется зависимостью $\gamma = \gamma(\theta)$ и структурой уравнения (3.1.1) (числами r, m, p). Например, если $\gamma(\theta) = \theta$, то параметры уравнения заведомо неразличимы. В этом случае два уравнения (3.1.1) с разными параметрами θ и $\alpha\theta$ (где α — ненулевая константа), очевидно, имеют одни и те же решения, так как отличаются только умножением на константу α.

Нестрого говоря, если система (3.1.1) параметризована корректно (т. е. различима), то можно указать алгоритм идентификации и множество решений уравнения (3.1.1), по которым параметр θ вычисляется однозначно. Если система (3.1.1), наоборот, в смысле определения 2.1.2 или условия (i”) параметризована некорректно, то никаким алгоритмом идентификации, ни при каких наблюдениях решений (даже без шума) невозможно однозначно восстановить параметр θ.

Алгоритмически проверяемые критерии различимости в виде ограничений на ранги специальных матриц, построенных из элементов γ_θ, получены в главе 2 (теоремы 2.3.2-2.3.4).

3.2 Полнота наблюдений

Пусть $z_{*(i)} = H(\theta_*)w_{*(i)}$, и $w_{*(i)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Условие на распределение $w_{*(i)}$ (условие полноты) дадим ниже.

Даны наблюдения

$$\check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{*(i)}, \qquad i \geqslant 1, \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{M}\,\eta_{*(i)} = 0, \qquad \mathbf{M}[\eta_{*(i)}\eta_{*(j)}^\top] = \sigma^2 I \delta_{ij}. \tag{3.2.2}$$

Здесь $\eta_{*(i)}$ — погрешности измерений; $\mathbf{M}$ — оператор математического ожидания; $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$. Условие (3.2.2) будем записывать кратко: $\eta_{*(i)} \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$. Дополнительные предположения о распределении возмущений $\eta_{*(i)}$, если таковые понадобятся, будут оговорены особо. Случай диагональной матрицы 2-х моментов $\eta_{*(i)}$ не является ограничением, он используется только для более компактной записи формул (см. раздел 3.7.1).

Определение 3.2.1. При условии (i”) корректности параметризации системы (3.1.1) с $\theta = \theta_*$ некотрое множество ее решений

$$\mathcal{M}_{*L} \doteq \left\{ z_{*(1)}, \ldots, z_{*(L)} \right\} \tag{3.2.3}$$

называется *полным*, если параметр θ по множеству $\mathcal{M}_{*L}$ вычисляется однозначно. Другими словами, для всех $\xi \in \Theta \setminus \{\theta\}$ выполнено $G_\xi \mathcal{M}_{*L} \neq 0$, если отождествить $\mathcal{M}_{*L}$ с матрицей, составленной из столбцов $z_{*(i)}$.

Замечание 3.2.1. Определив понятие полноты, можно сказать, что различимость в смысле определения 2.3.1 есть идентифицируемость по полному множеству наблюдений. Подчеркнем, что термин ”идентифицируемость” употребляется, как правило, когда идет речь об оценке параметров по наблюдениям процессов с возмущениями; термин ”различимость” — когда в качестве наблюдений берутся многообразия (или конечные множества) невозмущенных процессов. Идентифицируемость по конечному множеству невозмущенных процессов в этом смысле совпадает с различимостью. Исключением является глава 2, где исследуется *идентифицируемость* стохастических систем *по распределениям*. Это дань традиции, сложившейся в литературе. Для стохастических систем из главы 2 также можно было бы употреблять термин ”различимость”.

Предложение 3.2.1. *Для полноты* $\mathcal{M}_{*L}$ *достаточно условия*

$$\operatorname{span}\mathcal{M}_{*L} = \mathcal{N}(G_\theta) = \mathcal{R}(H(\theta)).$$

Утверждение 3.2.1. *Полнота* $\mathcal{M}_{*L}$ *равносильна положительной определенности матрицы* Q_L, *составленной из из наблюдений*:

$$\mathcal{M}_{*L} \quad \textit{полно} \quad \Leftrightarrow \quad Q_L \doteq L^{-1} \sum_{z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L}} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)}) D > 0. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Ввиду равенства $G_\theta \mathcal{M}_{*L} = 0$ условие полноты $G_\xi \mathcal{M}_{*L} \neq 0$ равносильно условию $(G_\xi - G_\theta)\mathcal{M}_{*L} \neq 0$. Обозначим $\delta \doteq \xi - \theta$. Из определения (3.1.8) матрицы $V(z)$ и вида (i') параметризации $\gamma(\theta)$ следует соотношение

$$(G_\xi - G_\theta) z = V(z)(D\xi + d) - V(z)(D\theta + d) = V(z) D\delta.$$

Введем составную матрицу

$$\widetilde{V} \doteq \begin{pmatrix} V(z_{*(1)}) \\ \vdots \\ V(z_{*(L)}) \end{pmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Тогда $(G_\xi - G_\theta)\mathcal{M}_{*L} \neq 0$ равносильно условию $\widetilde{V}(z) D\delta \neq 0$. Поскольку множество Θ открытое, последнее неравенство равносильно положительной определенности матрицы $D^\top \widetilde{V}(z)^\top \widetilde{V}(z) D > 0$. Ввиду определения $\widetilde{V}(z)$ имеем

$$D^\top \widetilde{V}(z)^\top \widetilde{V}(z) D \;\; = \sum_{z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L}} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)}) D > 0.$$

Последнее равносильно неравенству $Q_L > 0$. Утверждение доказано. □

Выясним, какую роль играет условие корректности параметризации в определении полноты. Напомним, согласно определению 2.3.1, система (3.1.1) параметризована корректно (глобально, локально) в точке θ, если она различима (глобально, локально) по многообразию всех решений $\mathcal{M}_* = \mathcal{N}(G_\theta)$. Для анализа корректности (различимости) можно использовать условия различимости по одной траектории $\mathcal{M}_* = z_* \in \mathcal{N}(G_\theta)$.

Пусть согласно условию (i) на с. 91 множество Θ открытое. Тогда система (3.1.1) локально неразличима (т. е. параметризована локально некорректно) в точке θ по траектории $z_* \in \mathcal{N}(G_\theta)$, если в любой окрестности $U(\theta)$ существует $\xi \in \Theta$: $G_\xi z_* = G_\theta z_* = 0$.

Теорема 3.2.1. *Система* (3.1.1) *с условием* (i') *на с. 128 локально неразличима по процессу* $z \in \mathcal{N}(G_\theta)$ *тогда и только тогда, когда матрица* $Q(z) \doteq D^\top V(z)^\top V(z) D$ *вырождена.*

Доказательство. Пусть система (3.1.1) параметризована локально некорректно и $z \in$

$\mathcal{N}(G_\theta)$, тогда $G_\theta z = 0$. Неразличимость по z означает существование $\xi \neq \theta \quad G_\xi z = 0$. Отсюда следует

$$V(z)\left(D\xi + d\right) = G_\xi z = G_\theta z = V(z)\left(D\theta + d\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(z)D\left(\xi - \theta\right) = 0,$$

т. е. столбцы $V(z)D$ линейно зависимы и матрица $Q(z)$ вырождена. Обратно, пусть $Q(z)$ вырождена, тогда столбцы $V(z)D$ линейно зависимы, и ввиду открытости Θ можно взять $\xi = \theta + \mu x$, где $V(z)Dx = 0$, и μ — достаточно малое число. □

Теорема 3.2.2. *Система* (3.1.1) *с условием* (i') *на с. 128 параметризована локально корректно* (*локально различима*) *тогда и только тогда, когда существует решение z системы* (3.1.1) *такое, что при $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$ матрица $Q(z) \doteq D^\top V(z)^\top V(z) D$ строго положительно определена.*

Прежде доказательства теоремы выясним роль условия $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$.

Утверждение 3.2.2. *Если $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$, то число строк матрицы $V(z)D$ не меньше числа столбцов.*

Доказательство. Число столбцов $V(z)D$ равно числу столбцов D и равно размерности v вектора параметров θ. Согласно следствию 2.3.1, имеет место неравенство $v \leqslant rm + r\,(r + m)\,p$. Число строк $V(z)D$ равно числу строк $V(z)$ и равно числу строк G_θ, т. е. $(N - p)\,r$. Пусть $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$, тогда $(N - p)\,r \geqslant rm + r\,(r + m)\,p \geqslant v$. Утверждение доказано. □

Из доказанного утверждения следует, что при нарушении условия $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$ матрица $V(z)D$ может оказаться "горизонтальной", и тогда ни при каких z матрица $Q(z)$ не может быть строго положительно определена. Если $N \geqslant m + p\,(r + m + 1)$, то утверждение теоремы является простым следствием теоремы 3.2.1. Тем самым, теорема 3.2.2 доказана. □

Заметим, что условие открытости множества Θ ((i) на с. 91, (i') на с. 128) является существенным.

Признак корректности через строгую положительную определенность матрицы $Q = Q(z)$, на первый взгляд, не зависит от θ. На самом деле эта зависимость существует — она выражается в условии $z \in \mathcal{N}(G_\theta)$ и предположении $\theta, \xi \in \Theta$.

Установим достаточные условия полноты в виде ограничений на начальные условия и правую часть равносильных систем (1.1.2) и (3.1.2), т. е. на распределение переменных $w_{*(i)} = \left(x^*_{0(i)}; u_{*(i)}\right) \in \mathbb{R}^{q+Nm}$. Из предложения 3.2.1 следует

Предложение 3.2.2. *Для полноты $\mathcal{M}_{*L}$ достаточно условия*

$$\mathcal{R}\left(H(\theta)w_{*(1)}, \ldots, H(\theta)w_{*(L)}\right) = \mathcal{R}\left(H(\theta)\right),$$

для чего в свою очередь достаточно условия

$$\mathcal{R}\left(w_{*(1)}, \ldots, w_{*(L)}\right) = \mathbb{R}^{q+Nm}.$$

Более детально достаточное условие полноты описывается в следующем утверждении.

Утверждение 3.2.3. *Множество* $\mathcal{M}_{*L}$ *полно, если одновременно выполняются два условия:* 1) *условие возбуждения собственных мод системы, для чего достаточно положительной определенности*

$$L^{-1} \sum_{z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L}} [x^*_{0(i)} x^{*\top}_{0(i)}] > 0;$$

и 2) *условие активности входного сигнала:*

$$L^{-1} \sum_{z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L}} [U_{*(i)}] > 0,$$

где $U_{*(i)}$ *обозначает квадратную матрицу*

$$\|\varphi_{(i)}(j,l)\|_{l\in\overline{0,p}}^{j\in\overline{0,p}} \in R^{m(p+1)\times m(p+1)}$$

с клетками $\varphi_{(i)}(j,l) \doteq \mathbf{M}_{k=1}^{N-p}\left(u_{*(i)}[k+j]u^\top_{*(i)}[k+l]\right) \in R^{m\times m}$.

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению 3.2.1, полнота множества $\mathcal{M}_{*L}$ равносильна положительной определенности матрицы

$$Q_L \doteq \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)}) D > 0 \tag{3.2.6}$$

или линейной независимости столбцов матрицы $\widetilde{V}D$ (см. (3.2.5)).

Для возбуждения всех собственных мод наблюдаемой системы (1.1.2) (напомним, модами называются слагаемые в разложении (6.4.2)) необходимо и достаточно, чтобы линейное подпространство

$$\operatorname{span}\left\{x^*_{0(1)}, \ldots, x^*_{0(L)}\right\} = \mathcal{R}\left(x^*_{0(1)}, \ldots, x^*_{0(L)}\right) \subset R^q$$

имело непустые пересечения со всеми инвариантными подпространствами матрицы A. Очевидно, для этого достаточно равенства

$$\mathcal{R}\left(x^*_{0(1)}, \ldots, x^*_{0(L)}\right) = R^q \quad \text{или} \quad \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L}[x^*_{0(i)} x^{*\top}_{0(i)}] > 0.$$

Тогда (см. лемму 1.2.1)

$$\mathcal{R}\left(H_x x^*_{0(1)}, \ldots, H_x x^*_{0(L)}\right) = \mathcal{M}_x = \mathcal{R}\left(H_x\right).$$

Из леммы 1.2.1 следует, что если для множества $\mathcal{M}_{*L}$ выполнено условие возбуждения всех собственных мод системы (1.1.2), то по $\mathcal{M}_{*L}$ однозначно определяется подпространство $\mathcal{M}_x$, его базис H_x и пара матриц A, C системы (1.1.2) в канонической форме восстанавливаемости (см. определение в замечании 1.3.1). Тем самым, из формул (1.3.4)–(1.3.5) однозначно определяются матричные коэффициенты $\{\alpha_i : i \in \overline{0,p}\}$ знаменателя системы (3.1.2) и подвектор коэффициентов γ_α:

$$\gamma \doteq T \begin{pmatrix} \gamma_\alpha \\ \gamma_\beta \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} T_\alpha & T_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_\alpha \\ \gamma_\beta \end{pmatrix},$$

где вектор γ определен в (3.1.3), T — подматрица из столбцов матрицы перестановки, γ_α, γ_β — подвекторы γ, элементы которых совпадают соответственно с элементами матриц α_i, β_j. Другими словами, при условии возбуждения собственных мод линейно независимыми являются столбцы матрицы $\widetilde{V}T_\alpha$.

Далее, из леммы 1.2.2 (нулевого пересечения подпространств $\mathcal{M}_x$ и $\mathcal{M}_u$) следует нулевое пересечение подпространств

$$\mathcal{R}\left(\widetilde{V}T_\alpha\right) \cap \mathcal{R}\left(\widetilde{V}T_\beta\right) = \{0\}.$$

Ввиду этого факта, если обеспечить линейную независимость столбцов матрицы $\widetilde{V}T_\beta$, будет гарантирована линейная независимость столбцов составной матрицы

$$\widetilde{V}T = \left(\widetilde{V}T_\alpha, \widetilde{V}T_\beta\right).$$

Это означает однозначную вычислимость подвекторов γ_α, γ_β, а значит, и всех нефиксированных (зависящих от θ) элементов вектора γ.

Заметим, что согласно определению подвекторов γ_α и γ_β, матрицы $V(z)T_\alpha$ и $V(z)T_\beta$ сформированы из отсчетов соответственно только левой и только правой частей уравнения (3.1.2), т. е. уместно обозначить $V(z)T_\alpha \doteq V_y$, $V(z)T_\beta \doteq V_u$. Определим составные матрицы $\widetilde{V}_y$ и $\widetilde{V}_u$ согласно (3.2.5). Пусть $\mathbf{M}_{i=1}^{L}[U_{*(i)}] > 0$, или (в новых обозначениях) $\widetilde{V}_u^\top \widetilde{V}_u > 0$. Тогда столбцы матрицы $\widetilde{V}_u = \widetilde{V}T_\beta$ линейно независимы, а значит, как обсуждалось выше, линейно независимы столбцы матрицы $\widetilde{V}T$ и также столбцы матрицы $\widetilde{V}T\bar{D} \doteq \widetilde{V}D$. Отсюда следует (3.2.6). Утверждение доказано. □

Замечание 3.2.2. Для однородной системы 1-го порядка (1.1.2) с матрицами $B = 0$, $C = I$, $D = 0$ необходимое и достаточное условие полноты измерений траектории однородного движения для идентификации всех элементов матрицы $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$ при $L = 1$ состоит в неравенстве нулю проекций вектора начальных условий $x[1]$ на все инвариантные подпространства матрицы A. Это условие равносильно полноте ранга составной матрицы W_0 (см. Р. Ли (1964) [186, 4.1.2]):

$$\operatorname{rank} W_0 = q, \qquad W_0 \doteq \begin{pmatrix} x[1] & Ax[1] & \ldots & A^{q-1}x[1] \end{pmatrix}.$$

В статье А. В. Дмитриева, Э. И. Дружинина (1999) [39] была предложена равносильная формулировка этого условия через структуру множества инвариантных многочленов матрицы A и совпадение минимальных многочленов вектора $x[1]$ и матрицы A [39, теорема 1]. При неполностью измеряемом векторе состояния ($C \in \mathbb{R}^{r\times q}$, $r < q$) дополнительно налагается условие наблюдаемости пары (A, C) (Р. Ли (1964) [186, 4.2], [39]). Для неоднородных систем (1.1.2) с матрицами $C = I$, $B \neq 0$ необходимое и достаточное условие полноты принимает вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} W_0 & W_1 \end{pmatrix} = q, \qquad W_1 \doteq \begin{pmatrix} B & AB & \ldots & A^{q-1}B \end{pmatrix}$$

(Н. А. Балонин (2010) [7, 2.2]).

Определение 3.2.2. Последовательность наблюдений $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ из определения (3.2.1) называется полной, если имеет место положительная определенность предельной матрицы

$$Q_\infty \doteq \lim_{L\to\infty} \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)}) D > 0, \tag{3.2.7}$$

где $z_{*(i)}$ — невозмущенные процессы из определения (3.2.1).

Условие (3.2.7) по сути представляет собой обобщение условия "постоянного возбуждения" (persistent excitation condition) из статьи Острема, Болина (1969) [96] на случай систем без ограничений на управляемость.

Задача 1. Исходя из полной последовательности наблюдений $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ (3.2.1) получить оценку $\theta_L = \theta_L\left(\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}\right)$, сходящуюся с вероятностью 1 к истинному значению: $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \theta_*$.

Заметим, что в данной задаче идентификации не накладываются ограничения на устойчивость и управляемость системы (см. замечание 2.3.2). Это становится возможным в силу двух обстоятельств: 1) наличие условия возбуждения собственных мод системы (часть из которых может быть неуправляема) и 2) конечность длины процессов N (напомним, статистический предел берется по числу процессов L).

3.3 Вариационные оценки параметров

Определим класс оценок для состоятельного решения задачи 1.

Как и в главе 2, параметрами θ уравнения называем заданные взаимно-однозначные функции его коэффициентов. Пусть $\check{\mathcal{M}} \doteq \left\{\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}\right\} \subset \mathbb{R}^t$ — наблюдения, которые предполагается аппроксимировать решениями $z \in \mathcal{M}_\theta \doteq \mathcal{N}\left(G_\theta\right) \subset \mathbb{R}^t$ системы линейных уравнений

$$G_\theta z = 0. \tag{3.3.1}$$

Задача идентификации параметра θ может рассматриваться с двух сторон: 1) детерминированно, с точки зрения наилучшего приближения наблюдений $\check{z}$ решениями уравнения (3.3.1), (3.1.1), и 2) статистически. В первом случае естественным образом возникают целевые функции, основанные на расстоянии между множеством наблюдений $\check{\mathcal{M}}$

и множеством решений модельного уравнения $\mathcal{M}_\theta$. Оптимальное значение параметра θ выбирается из условия минимума целевой функции

$$\rho^2\left(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{M}_\theta\right) = \sum_{i=1}^{L} \rho^2\left(\check{z}_{(i)}, \mathcal{M}_\theta\right) \doteq J(\theta) = \min_\theta,$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ — функция расстояния. Для евклидовой метрики

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{L} \|\check{z}_{(i)} - z_{(i)}\|^2, \tag{3.3.2}$$

где $z_{(i)}$ — проекция $\check{z}_{(i)}$ на модельное многообразие $\mathcal{M}_\theta$ (ближайший к $\check{z}_{(i)}$ элемент $\mathcal{M}_\theta$).

При статистическом рассмотрении получаются те же целевые функции, если предположить, что измерения отличаются от истинных процессов системы на случайную величину с нулевым средним и конечной матрицей вторых моментов (3.2.1). В зарубежной литературе для этого случая используется название "системы с ошибками в наблюдаемых переменных" (errors-in-variables) (Фуллер, 1987) [154].

Замечание 3.3.1. Целевая функция $J(\theta)$ (3.3.2) явно выражается через θ. Пусть $L = 1$. Заметим, что наименьшее по z значение квадрата нормы $\|\check{z} - z\|^2$ при условии $Gz = 0$ равно $\check{z}^\top \Pi \check{z}$, где $\Pi \doteq G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} G = \Pi_\theta$ есть матрица проектора (т. е. $\Pi_\theta^2 = \Pi_\theta$) на ортогональное дополнение к подпространству $\mathcal{N}(G)$ истинных процессов системы. Тогда

$$J(\theta) = \check{z}^\top \Pi_\theta \check{z}.$$

При $L > 1$

$$J(\theta) = L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \check{z}_{(i)}^\top \Pi_\theta \check{z}_{(i)}.$$

Определение 3.3.1. *Вариационной оценкой* $\hat{\theta}$ некоторого параметра θ_* по наблюдению $\check{z} = z_* + \eta$, где z_* — истинный процесс, η — возмущение, называем результат минимизации квадратичной целевой функции:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} = \hat{\theta}(\check{z}) \ &= \ \arg\min_\theta J(\theta, \check{z}), \\ J(\theta, \check{z}) \ &\doteq \ \check{z}^\top \left(\Pi_{1,\theta} + \ldots + \Pi_{M,\theta}\right) \check{z}, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

где все матрицы $\Pi_j = \Pi_{j,\theta} \geqslant 0$ являются неотрицательно определенными, проективными (т. е. $\Pi_j^2 = \Pi_j$), симметричными и такими, что $\Pi_{j,\theta_*} z_* = 0$. Целевую функцию $J(\theta, \check{z})$ (3.3.3) также называем вариационной (или *проективной*).

При статистической интерпретации целевой функции (3.3.3) соответствуют наблюдения

$$\check{z} = z_* + \eta_*, \qquad \eta_* \in \mathbf{M}_2(0, I_n), \qquad G_{\theta_*} z_* = 0 \tag{3.3.4}$$

(см. (3.2.1) при $L = 1$). О соответствии здесь говорится в том смысле, что при наблюдениях (3.3.4) оценки (3.3.3) состоятельны (доказательство дается ниже).

Рассмотрим возмущения с неединичной матрицей дисперсии (дополнительно см. раздел 3.7.1):

$$\check{z} = z_* + \Sigma\eta_*, \qquad \eta_* \in \mathbf{M}_2(0, I_n), \qquad \Sigma \in \mathbb{R}^{N(r+m)\times n}, \qquad G_{\theta_*} z_* = 0. \tag{3.3.5}$$

Определение 3.3.2. Вариационной оценкой $\hat{\theta}$ параметра θ_* по наблюдению случайной величины $\check{z}$ (3.3.5) называем результат минимизации по θ квадратичной целевой функции:

$$J(\theta, \check{z}, \Sigma) \;=\; \check{z}^\top (W_1 + \ldots + W_M)\, \check{z}, \tag{3.3.6}$$

где все матрицы $W_j = W_{j,\theta} \geqslant 0$ симметричны и таковы, что $W_{j,\theta_*} z_* = 0$, а произведения $\Sigma^\top W_j \Sigma = \Pi_j$ являются проективными матрицами со свойством $\Pi_j^2 = \Pi_j$.

При наличии наблюдений нескольких процессов определим множество наблюдений:

$$\left\{\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}\right\} \doteq \check{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^{N(r+m)}.$$

В этом случае целевая функция (3.3.6) принимает вид:

$$J(\theta, \check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}, \Sigma) \doteq J(\theta, \check{\mathcal{M}}, \Sigma) = \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} \left[\check{z}_{(i)}^\top (W_1 + \ldots + W_M)\, \check{z}_{(i)}\right]. \tag{3.3.7}$$

Пусть даны S множеств наблюдений:

$$\begin{array}{rcl} \left\{\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L_1)}\right\} & \doteq & \check{\mathcal{M}}_1 \subset \mathbb{R}^{N_1(r_1+m_1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left\{\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L_S)}\right\} & \doteq & \check{\mathcal{M}}_S \subset \mathbb{R}^{N_S(r_S+m_S)}. \end{array} \tag{3.3.8}$$

Заметим, что в каждом множестве $\check{\mathcal{M}}_l$, $l \in \overline{1,S}$, процессы имеют свой набор размерностей N_l, r_l, m_l. Эта (несколько экзотическая) ситуация означает, что для каждого множества наблюдений используется своя модель $G_{l,\theta_*} z_* = 0$. Разные модели могут иметь разные значения размерностей N, p, r, m (см. (3.1.1)) и разные значения матриц Σ (см. (3.3.5)). Общим является вектор параметров θ.

Определение 3.3.3. Линейная комбинация вариационных целевых функций вида (3.3.7), определенных на множествах наблюдений (3.3.8):

$$J(\theta, \check{\mathcal{M}}_1, \ldots, \check{\mathcal{M}}_S) = \alpha_1 J(\theta, \check{\mathcal{M}}_1, \Sigma_1) + \ldots + \alpha_S J(\theta, \check{\mathcal{M}}_S, \Sigma_S), \qquad \alpha_l \in \mathbb{R}^+ \tag{3.3.9}$$

— также называется вариационной целевой функцией. Вариационной оценкой в этом случае называется результат минимизации

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} J(\theta, \check{\mathcal{M}}_1, \ldots, \check{\mathcal{M}}_S). \tag{3.3.10}$$

Обозначим $L_l \doteq |\check{\mathcal{M}}_l|$ число элементов множества $\check{\mathcal{M}}_l$ (число процессов). Состоятельность оценки $\hat{\theta}$ (3.3.10) означает сходимость $\hat{\theta} \to \theta_*$ при одновременном устремлении S чисел $L_1, \ldots, L_S$ к бесконечности. В следующем разделе будет доказана состоятельность вариационных оценок (3.3.10) и их частных случаев (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7).

Укажем еще одну форму записи вариационных оценок. Определим матрицу

$$\begin{aligned} M_{N_1,K} &\doteq \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{N_1\times K} & I_{N_1} & 0_{N_1\times(N-N_1-K)} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{N_1\times N}, \qquad K \geqslant 0. \end{aligned}$$

Эта матрица построена таким образом, чтобы при умножении кронекерова произведения $M_{N_1,K} \otimes I_{r+m}$ на вектор процесса $z = \begin{pmatrix} z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ получался подотрезок этого процесса длиной $N_1 \in \overline{1, N}$ "тактов" с началом в $K+1$-м "такте":

$$(M_{N_1,K} \otimes I_{r+m}) \begin{pmatrix} z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z[K+1] \\ \vdots \\ z[K+N_1] \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$\varPhi \doteq \begin{pmatrix} M_{N_1,K_1} \\ \vdots \\ M_{N_S,K_S} \end{pmatrix} \otimes I_{r+m}$$

при умножении на вектор процесса z даст в результате вектор, последовательно составленный из S различных подотрезков этого процесса.

Пусть

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_\theta &= \begin{pmatrix} G_{1,\theta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{S,\theta} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N}\left(\widetilde{G}_\theta^\top\right) = 0, \\ \varPhi &= \begin{pmatrix} M_{N_1,K_1} \\ \vdots \\ M_{N_S,K_S} \end{pmatrix} \otimes I_{r+m} \doteq \begin{pmatrix} \varPhi_1^\top \\ \vdots \\ \varPhi_S^\top \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{N}(\varPhi) = 0. \end{aligned}$$

Утверждение 3.3.1. *Нижеследующая оценка является вариационной*:

$$\begin{aligned}\theta_L &= \arg\min_{\theta} J_L(\theta), \qquad J_L(\theta) = L^{-1}\sum_{i=1}^{L}\rho^2_{(i)}(\theta), \\ \rho^2_{(i)}(\theta) &= \left\|\varPhi\check{z}_{(i)} - \hat{\zeta}_{(i)}(\theta)\right\|^2 = \min_{\widetilde{G}_\theta\zeta=0}\left\|\varPhi\check{z}_{(i)} - \zeta\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Доказательство. Ограничимся случаем $L=1$ (при $L>1$ ход рассуждений остается тем же). Используя замечание 3.3.1, получаем

$$\begin{aligned}J(\theta) &= \check{z}^\top\varPhi^\top\widetilde{\Pi}_\theta\varPhi\check{z}, \\ \widetilde{\Pi}_\theta &= \widetilde{G}_\theta^\top\left(\widetilde{G}_\theta\widetilde{G}_\theta^\top\right)^{-1}\widetilde{G}_\theta = \begin{pmatrix}\Pi_{1,\theta} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_{S,\theta}\end{pmatrix}, \\ \Pi_{l,\theta} &\doteq G_{l,\theta}^\top\left(G_{l,\theta}G_{l,\theta}^\top\right)^{-1}G_{l,\theta}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}J(\theta) &= \check{z}^\top\begin{pmatrix}\varPhi_1 & \ldots & \varPhi_S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Pi_{1,\theta} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_{S,\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varPhi_1^\top\\ \vdots\\ \varPhi_S^\top\end{pmatrix}\check{z} = \\ &= \check{z}^\top\left(\varPhi_1\Pi_{1,\theta}\varPhi_1^\top + \ldots + \varPhi_S\Pi_{S,\theta}\varPhi_S^\top\right)\check{z}.\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что матрица

$$\varPhi_l\Pi_{l,\theta}\varPhi_l^\top = \begin{pmatrix}0_{K_l\times K_l}\otimes I_{r+m} & & 0\\ & \Pi_{l,\theta} & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$$

является проектором. Следовательно, рассматриваемая целевая функция имеет в скобках сумму проекторов и поэтому является вариационной. Утверждение доказано. □

Заметим, что при $\varPhi = I$, $\zeta \doteq z$ из оценки (3.3.11) получается оценка вариационного метода (0.0.18), (0.0.15); при $\varPhi = I$ и $\widetilde{G}_\theta = I\otimes\gamma_\theta$ (0.0.20) — оценка ортогональной регрессии (0.0.9).

Замечание 3.3.2. Отличительной особенностью вариационных целевых функций (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.10), (3.3.11) является их инвариантность по отношению к равносильным преобразованиям $G_\theta \mapsto PG_\theta$, $\det P \neq 0$, матриц систем линейных ограничений $G_\theta z = 0$. Чтобы это увидеть, достаточно заметить, что такие преобразования не изменяют проекторов, входящих в целевую функцию:

$$\Pi_\theta = G_\theta^\top\left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1}G_\theta = G_\theta^\top P^\top\left(PG_\theta G_\theta^\top P^\top\right)^{-1}PG_\theta.$$

Данное свойство целевой функции можно назвать "сферичностью", в том смысле, что для одного уравнения $r = 1$ оно выражается в независимости значения функции от модуля вектора коэффициентов $\|\gamma\|$, так что минимизация осуществляется только по направлению, "на сфере" (см. раздел 3.7.3).

В диссертации рассматриваются задачи идентификации систем (3.3.1) с матрицами G_θ клеточно-теплицевого вида. Это линейные динамические системы с постоянными коэффициентами (3.1.1).

3.3.1 Различные частные случаи вариационных оценок

Для упрощения изложения положим $L = 1$, опустив соответствующие индексы у величин. Переход к случаю $L > 1$ не составляет труда.

Сначала рассмотрим два частных случая оценок (3.3.11): 1) оценки вариационного метода (ВМ) $\theta_{\mathtt{V}}$ и 2) ортогональной регрессии (ОР) $\theta_{\mathtt{OR}}$ [42, 70]:

$$\theta_{\mathtt{V}} = \arg\min_\theta J(\theta), \qquad J(\theta) = \min_{G_\theta z = 0} \|\check{z} - z\|^2, \tag{3.3.12}$$

$$G \doteq G_\theta = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix},$$

$$\theta_{\mathtt{OR}} = \arg\min_\theta J_{\mathtt{OR}}(\theta), \qquad J_{\mathtt{OR}}(\theta) = \min_{G_{\mathtt{OR}} z = 0} \|\check{z} - z\|^2, \tag{3.3.13}$$

$$G_{\mathtt{OR}} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_p & & & & & & 0 \\ & & & \gamma_0 & \cdots & \gamma_p & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \gamma_0 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix}.$$

Выражения (3.3.12) и (3.3.13) отличаются только матрицами ограничений: $G_{\mathtt{OR}}$ получается из G вычеркиванием части строк.

Функцию потерь $J(\theta)$ из (3.3.12) запишем в явном виде. Заметим, что наименьшее по z значение квадрата нормы $\|\check{z} - z\|^2$ при условии $Gz = 0$ равно $\check{z}^\top \Pi_G \check{z}$, где $\Pi_G = G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} G$ есть матрица проектора на ортогональное дополнение к подпространству $\mathcal{N}(G)$ траекторий системы. Заменяя $G\check{z}$ на $V(\check{z})\gamma = V(\check{z})\widetilde{D}\vartheta$, получим

$$J(\theta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C \check{V} \widetilde{D} \vartheta, \qquad \check{V} \doteq V(\check{z}), \qquad C = \left(GG^\top\right)^{-1}. \tag{3.3.14}$$

Таким же образом получаем выражение для $J_{\mathtt{OR}}(\theta)$ из (3.3.13):

$$J_{\mathtt{OR}}(\theta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} \check{V}_{\mathtt{OR}} \widetilde{D} \vartheta,$$

$$\check V_{\mathtt{OR}} \doteq V_{\mathtt{OR}}(\check z), \quad V_{\mathtt{OR}}(z) = \begin{pmatrix} I_r \otimes \left(z[1]^\top, \dots, z[p+1]^\top\right) \\ I_r \otimes \left(z[p+2]^\top, \dots, z[2p+2]^\top\right) \\ \vdots \\ I_r \otimes \left(z[M-p]^\top, \dots, z[M]^\top\right) \end{pmatrix}, \tag{3.3.15}$$

$$N - p < M \leqslant N, \qquad M = K(p+1), \qquad C_{\mathtt{OR}} = \left(G_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}^\top\right)^{-1} = I_K \otimes \left(\gamma_\theta \gamma_\theta^\top\right)^{-1}.$$

После введения обозначений определим третий известный в литературе частный случай вариационных оценок, так называемые *модифицированные* оценки ортогональной регрессии (ОРМ):

$$\theta_{\mathtt{M}} = \arg\min_\theta J_{\mathtt{M}}(\theta), \qquad J_{\mathtt{M}}(\theta) = \vartheta^\top \widetilde D^\top \check V^\top C_{\mathtt{M}} \check V \widetilde D \vartheta, \tag{3.3.16}$$

$$C_{\mathtt{M}} \doteq I_{N-p} \otimes \left(\gamma_\theta \gamma_\theta^\top\right)^{-1}.$$

Как показано в [134], при $r = 1$ оценки ОРМ обладают большей устойчивостью к возмущениям в исходных данных, чем оценки ОР.

Выясним взаимосвязи трех типов оценок. С точки зрения общего определения (3.3.13), оценка ВМ в (3.3.12) при $L \geqslant 1$ может быть представлена как оценка ОР в (3.3.13) с "большой" матрицей $G_L = \operatorname{diag}(G_\theta \dots G_\theta)$ вместо $G_{\mathtt{OR}} = \operatorname{diag}(\gamma_\theta \dots \gamma_\theta)$. С другой стороны, оценка ОР есть оценка ВМ с $N = p + 1$.

По виду целевой функции (3.3.16) оценки ОРМ занимают промежуточное положение между оценками ОР и ВИ. Они получаются из оценок ВМ (3.3.14) заменой матрицы C на матрицу $C_{\mathtt{OR}}$ более простой структуры. С другой стороны, модифицированная оценка $\theta_{\mathtt{M}}$ из (3.3.16) является оценкой ОР (3.3.13) с особым образом сформированным вектором наблюдений $\check z$. Действительно, имеют место соотношения

$$J_{\mathtt{M}} = \min_{G_{\mathtt{M}} z_{\mathtt{M}} = 0} \|\varPhi \check z - z_{\mathtt{M}}\|^2, \tag{3.3.17}$$

$$\varPhi = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & 0 \\ & \boxed{I} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \doteq \overline{\varPhi} \otimes \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+1)l \times l}, \qquad l \doteq N(r+m),$$

$$G_{\mathtt{M}} = I_{N-p} \otimes \gamma_\theta, \qquad G_{\mathtt{M}} \varPhi = G \qquad \overline{\varPhi} \in \mathbb{R}^{(p+1)N \times N}.$$

Как можно увидеть из определений (3.3.17), матрица ограничений $G_{\mathtt{M}}$ в модифицированном методе имеет ту же клеточно-диагональную структуру, что и матрица $G_{\mathtt{OR}}$ в методе ОР, отличаясь только увеличенным размером. Соответственно увеличен размер вектора $z_{\mathtt{M}}$ вспомогательной (модельной) траектории. Но это связано не с увеличением объема выборки за счет добавления новых независимых измерений, а с дублированием компонент в векторе измерений $\Phi\check{z}$:

$$\check{z} = (\check{z}_1; \ldots; \check{z}_N)\,, \qquad \Phi\check{z} = (\check{z}_1; \ldots; \check{z}_{p+1}\check{z}_2; \ldots; \check{z}_{p+2}; \ldots\ldots; \check{z}_N)\,.$$

Заметим, что $V(z) = V_{\mathtt{OR}}(\Phi z)$.

Оценки ВМ можно представить как оценки ОРМ с линейными ограничениями. Чтобы это увидеть, в функциях потерь (3.3.12), (3.3.16) явно выразим траекторию z через начальное состояние системы x_0 и входной сигнал $u = (u_1; \ldots; u_N)$:

$$J(\theta) = \min_w J(\theta, w),$$
$$J(\theta, w) \doteq \|\Phi\check{z} - \Phi H(\theta) w\|^2\,, \qquad w \doteq (x_0; u)\,, \quad (3.3.18)$$

$$J_{\mathtt{M}}(\theta) = \min_{w_{\mathtt{M}}} J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}),$$
$$J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}) \doteq \|\Phi\check{z} - H_{\mathtt{M}}(\theta) w_{\mathtt{M}}\|^2\,, \qquad w \doteq (x_{\mathtt{M},0}; u_{\mathtt{M}})\,. \quad (3.3.19)$$

Матрицы $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$, и векторы w, $w_{\mathtt{M}}$ описаны ниже. Сомножитель Φ добавлен к обоим слагаемым (3.3.18) для приведения к виду (3.3.19) по первому слагаемому $\Phi\check{z}$.

Утверждение 3.3.2. *Существует линейное ограничение $Mw_{\mathtt{M}} = 0$, при наложении которого функция потерь $J_{\mathtt{M}}(\theta)$ в (3.3.19) совпадает с целевой функцией $J(\theta)$ в (3.3.18):*

$$J(\theta) = \min_w J(\theta, w) = \min_{w_{\mathtt{M}}: Mw_{\mathtt{M}}=0} J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}).$$

Доказательство. Выпишем матрицы $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$ в функциях потерь (3.3.18), (3.3.19). Для этого используется запись системы (3.1.1) в форме уравнения 1-го порядка (1.1.2).

Для большей ясности изложения переупорядочим компоненты z согласно (3.1.7). Соответственно переставляются и элементы матрицы Φ (3.3.17), после чего она будет клеточно-диагональной: $\Phi \doteq \left(\begin{smallmatrix} \overline{\Phi}\otimes I_r & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}\otimes I_m \end{smallmatrix}\right) \doteq \left(\begin{smallmatrix} \Phi_x & 0 \\ 0 & \Phi_u \end{smallmatrix}\right)$. Тогда

$$w \doteq (x_0; u_1; \ldots; u_N)\,, \quad (3.3.20)$$

$$w_{\mathtt{M}} \doteq (x_{\mathtt{M},0,1}; \ldots; x_{\mathtt{M},0,t}; u_{\mathtt{M},1}; \ldots; u_{\mathtt{M},t})\,, \quad t \doteq (N-p)(p+1),$$

$$H(\theta) = \left(\begin{array}{c|cccc} C & D & & & 0 \\ CA & CB & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \ldots & CB & D \\ \hline 0 & I & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & I \end{array}\right) \doteq \left(\begin{array}{c|c} H_x & H_u \\ \hline 0 & I \end{array}\right), \quad (3.3.21)$$

$$
\varPhi H(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} \varPhi_x H_x & \varPhi_x H_u \\ \hline 0 & \varPhi_u \end{array}\right), \tag{3.3.22}
$$

$$
\varPhi_x H_x = \left(\begin{array}{c} C \\ \vdots \\ CA^{p-1} \\ \hline CA \\ \vdots \\ CA^{p} \\ \hline \vdots \end{array}\right), \quad
\varPhi_x H_u = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c}
D & & & & & & & 0 \\
CB & D & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
CA^{p-2}B & \dots & CB & D & & & & \\ \hline
CB & D & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
CA^{p-1}B & \dots & \dots & CB & D & & & \\ \hline
CAB & CB & D & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
CA^{p}B & \dots & \dots & \dots & CB & D & & \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
CA^{N-2}B & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & CB & D
\end{array}\right),
$$

$$
H_{\mathtt{M}}(\theta) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
H_{p,x} & & & H_{p,u} & & \\
& \ddots & & & \ddots & \\
& & H_{p,x} & & & H_{p,u} \\ \hline
0 & & & I & & \\
& \ddots & & & \ddots & \\
& & 0 & & & I
\end{array}\right), \tag{3.3.23}
$$

$$
H_{p,x} \doteq \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{pmatrix}, \quad
H_{p,u} \doteq \begin{pmatrix} D & & & 0 \\ CB & D & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{p-2}B & \dots & CB & D \end{pmatrix}.
$$

Замечание. Исходя из структуры матриц $H(\theta)$, $H_{\mathtt{M}}(\theta)$, можно увидеть, что траектория $z = H_{\mathtt{M}}(\theta) w_{\mathtt{M}}$ в модели модифицированного метода (3.3.19) распадается на отдельные несвязанные отрезки длины p, каждый со своими начальными условиями $x_{\mathtt{M},0,i}$. В то же время в модели метода ВМ (3.3.18) траектория представляет собой единое целое с общими начальными условиями x_0. Это находит выражение в структурах матриц C, $C_{\mathtt{OR}}$ функций потерь (3.3.14), (3.3.16).

Для доказательства утверждения 3.3.2 достаточно проверить следующее ключевое соотношение между матрицами $H(\theta)$ и $H_{\mathtt{M}}(\theta)$:

$$
\varPhi H(\theta) = H_{\mathtt{M}}(\theta)
\left(\begin{array}{c|cccc}
I & 0 & \dots & 0 \\
A & B & & \\
A^2 & AB & B & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & \varPhi_u & \\
0 & & &
\end{array}\right)
\doteq H_{\mathtt{M}}(\theta) Q. \tag{3.3.24}
$$

Проверку равенства (3.3.24) удобней осуществить в 3 шага.

1-й шаг:

$$
\begin{pmatrix}
H_{p,x} & & 0 \\
& \ddots & \\
0 & & H_{p,x}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 \\
B & & \\
AB & B & \\
\vdots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix} & 0 & \end{matrix}} & & & 0 \\
\boxed{\begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} & 0 & \end{matrix}} & & \\
\boxed{\begin{matrix} CAB \\ \vdots \\ CA^{p}B \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} & 0 & \end{matrix}} & \\
\vdots & & & \ddots
\end{pmatrix}.
$$

2-й шаг:

$$
\begin{pmatrix}
H_{p,u} & & 0 \\
& \ddots & \\
0 & & H_{p,u}
\end{pmatrix}
\varPhi_u =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\boxed{H_{p,u}} & & 0 \\
& \boxed{H_{p,u}} & \\
0 & & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boxed{I} & & 0 \\
& \boxed{I} & \\
0 & & \ddots
\end{pmatrix} =
$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{H_{p,u}} & & 0 \\ & \boxed{H_{p,u}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

3-й шаг:

$$\begin{pmatrix} H_{p,x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ B & & \\ AB & B & \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{p,u} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{p,u} \end{pmatrix} \varPhi_u =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{3}{c}{H_{p,u}} & 0 \\ \hline \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{H_{p,u}} & \\ \hline \begin{matrix} CAB \\ \vdots \\ CA^{p}B \end{matrix} & \begin{matrix} CB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B \end{matrix} & H_{p,u} & \\ \hline \vdots & & & \ddots \end{array}\right).$$

Учитывая вид матрицы $\varPhi H(\theta)$ (3.3.22), переходим к равенству (3.3.24).

Запись $\varPhi H(\theta) = H_{\mathtt{M}}(\theta)Q$ соответствует замене переменных $Qw = w_{\mathtt{M}}$, которая равносильна некоторой системе линейных ограничений $Mw_{\mathtt{M}} = 0$. Матрица M определяется соотношениями $MQ = 0$, $\ker\left(M^{\top}, Q\right) = 0$, т. е. столбцы составной матрицы $\left(M^{\top}, Q\right)$ образуют базис $\mathbb{R}^{\dim w_{\mathtt{M}}}$, где $\dim w_{\mathtt{M}}$ есть число компонент в векторе $w_{\mathtt{M}}$. Утверждение доказано. □

Введем еще один тип вариационных оценок, по свойствам целевой функции наиболее близкий к скалярному ($r = 1$) методу ОР, описанному во введении. Назовем эти оценки ОРС, обозначим $\theta_{\mathtt{S}}$. Для большей ясности примем упорядочение компонент вектора траектории z в соответствии с порядком, принятым в уравнениях (3.1.9), (3.1.10), тогда

$$\theta_{\mathtt{S}} = \arg\min_{\theta} J_{\mathtt{S}}(\theta), \qquad J_{\mathtt{S}}(\theta) = \min_{G_{\mathtt{S}} z_{\mathtt{S}} = 0} \left\| \varPhi_{\mathtt{S}} \check{z} - z_{\mathtt{S}} \right\|^2, \tag{3.3.25}$$

$$G_{\mathtt{S}} = \begin{pmatrix} G_{1,\mathtt{M}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{r,\mathtt{M}} \end{pmatrix}, \qquad G_{i,\mathtt{M}} \doteq I_{N-p} \otimes \gamma^i, \qquad \varPhi_{\mathtt{S}} \doteq \begin{pmatrix} \varPhi \\ \vdots \\ \varPhi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r(p+1)l \times l},$$

где число l определено в (1.1.1), матрица $\mathit{\Phi} \in \mathbb{R}^{(p+1)l\times l}$ определена в (3.3.17), строка γ^i определена в (3.1.5). При добавлении ограничения $z_{\mathtt{S}} = \mathit{\Phi}_{\mathtt{S}} z$ оценки ОРС становятся оценками ВМ (3.3.12) ввиду соотношения $G_{\mathtt{S}}\mathit{\Phi}_{\mathtt{S}} = G$. Смысл оценок (3.3.25) состоит в том, чтобы по одному измерению $\check{z}$ идентифицировать параметры уравнения с матрицей γ из r строк так, как бы идентифицировалась каждая из этих строк по-отдельности скалярным ($r=1$) методом ОРМ (3.3.17). Единственным отличием является то, что в оценках ОРС учитывается зависимость коэффициентов разных уравнений от общего параметра θ.

Утверждение 3.3.3. *Целевая функция* ОРС (3.3.25) *имеет равносильное выражение*

$$J_{\mathtt{S}}(\theta) \doteq J_{\mathtt{S}}(\vartheta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C_{\mathtt{S}} \check{V} \widetilde{D}\vartheta, \qquad C_{\mathtt{S}} \doteq \begin{pmatrix} \gamma^{1\top}\gamma^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma^{r\top}\gamma^r \end{pmatrix}^{-1} \otimes I_{N-p}. \quad (3.3.26)$$

Доказательство. Из (3.3.25) получаем обычным способом через множители Лагранжа:

$$J_{\mathtt{S}}(\theta) = \check{z}^\top \mathit{\Phi}_{\mathtt{S}}^\top \Pi_{\mathtt{S}} \mathit{\Phi}_{\mathtt{S}} \check{z}, \qquad \Pi_{\mathtt{S}} \doteq G_{\mathtt{S}}^\top \left(G_{\mathtt{S}} G_{\mathtt{S}}^\top\right)^{-1} G_{\mathtt{S}} = \begin{pmatrix} \Pi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_r \end{pmatrix},$$

$$\Pi_i \doteq G_{i,\mathtt{M}}^\top \left(G_{i,\mathtt{M}} G_{i,\mathtt{M}}^\top\right)^{-1} G_{i,\mathtt{M}} = I_{N-p} \otimes \left(\frac{\gamma^i\gamma^{i\top}}{\gamma^{i\top}\gamma^i}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^i\gamma^{i\top}}{\gamma^{i\top}\gamma^i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\gamma^i\gamma^{i\top}}{\gamma^{i\top}\gamma^i} \end{pmatrix}.$$

Учитывая определение матрицы $\mathit{\Phi}_{\mathtt{S}}$ (3.3.17), (3.3.25), получаем

$$\begin{aligned} J_{\mathtt{S}}(\theta) &= \check{z}^\top \mathit{\Phi}^\top \left(\Pi_1 + \ldots + \Pi_r\right) \mathit{\Phi} \check{z} = \\ &= \frac{\gamma^{1\top}\bar{V}^\top\bar{V}\gamma^1}{\gamma^{1\top}\gamma^1} + \ldots + \frac{\gamma^{r\top}\bar{V}^\top\bar{V}\gamma^r}{\gamma^{r\top}\gamma^r} \end{aligned}$$

для $\bar{V}$ из (3.1.9). Введем ограничение $\gamma^i = D_i\vartheta$, где $\vartheta \doteq \left(\begin{smallmatrix}1\\ \theta\end{smallmatrix}\right)$. Тогда с учетом определения матрицы $V \doteq \check{V}$ (3.1.9) получаем соотношения

$$\begin{aligned} J_{\mathtt{S}}(\vartheta) &= \frac{\vartheta^\top D_1^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_1 \vartheta}{\vartheta^\top D_1^\top D_1 \vartheta} + \ldots + \frac{\vartheta^\top D_r^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_r \vartheta}{\vartheta^\top D_r^\top D_r \vartheta} = \\ &= \vartheta^\top \begin{pmatrix} D_1^\top & \ldots & D_r^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{V}^\top\bar{V}}{\gamma^{1\top}\gamma^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\bar{V}^\top\bar{V}}{\gamma^{r\top}\gamma^r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_r \end{pmatrix} \vartheta = \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

$$
= \vartheta^\top \widetilde{D}^\top V^\top \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\gamma^{1\top}\gamma^1}\right) I_{N-p} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\frac{1}{\gamma^{r\top}\gamma^r}\right) I_{N-p} \end{pmatrix} V \widetilde{D}\vartheta =
$$

$$
= \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C_{\mathtt{S}} \check{V} \widetilde{D}\vartheta, \qquad C_{\mathtt{S}} \doteq \begin{pmatrix} \gamma^{1\top}\gamma^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma^{r\top}\gamma^r \end{pmatrix}^{-1} \otimes I_{N-p}.
$$

Утверждение доказано. □

Утверждение 3.3.4. 1) *Число локальных экстремумов целевой функции* ОРС $J_{\mathtt{S}}(\theta)$ (3.3.25) *не превосходит* $r(p+1)(r+m)$. 2) *Пусть матрица* $\widetilde{D}$ *из условия* (i') *на с. 128 имеет клеточно-диагональный вид*

$$
\widetilde{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{rr} \end{pmatrix}, \qquad D_{ii} \in \mathbb{R}^{(p+1)(r+m)\times v_i}, \qquad \sum_{i=1}^{r} v_i = v, \tag{3.3.28}
$$

т. е. вектор параметров $\vartheta = (1;\theta)$ *распадается на* r *подвекторов* $\vartheta^i = (1;\theta^i)$, $i \in \overline{1,r}$, *так что каждая из строк* γ^i *зависит только от* i*-го подвектора параметров. Тогда число экстремальных точек в точности равно* $r(v+1)$, *а оценка* ОРС $\vartheta_{\mathtt{S}}$, *минимизирующая целевую функцию* (3.3.25), *имеет вид* $\vartheta_{\mathtt{S}} = (\vartheta^1_{\mathtt{S}};\ldots;\vartheta^r_{\mathtt{S}})$, *где каждый из подвекторов* $\vartheta^i_{\mathtt{S}}$ *является решением некоторой скалярной* ($r=1$) *задачи* ОРМ (3.3.17), *а именно, минимизирует целевую функцию*

$$
J^i_{\mathtt{S}}(\theta) = \min_{G_{i,\mathtt{M}}z=0} \|\check{z} - z\|^2,
$$

являясь собственным вектором регулярного пучка матриц $D_{ii}^\top\left(\bar{V}^\top\bar{V} - \mu I\right)D_{ii}$ [23, гл.X, п.6], *соответствующим минимальному собственному числу* μ (*см. раздел 3.7.3*). *Матрица* $\bar{V}$ *определена в* (3.1.9).

Доказательство. 1) Из (3.3.27) получаем уравнение на экстремальные точки:

$$
\frac{\partial J_{\mathtt{S}}(\vartheta)}{\partial\vartheta} = 2\vartheta^\top \left[\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{D_\alpha^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_\alpha}{(\vartheta^\top D_\alpha^\top D_\alpha \vartheta)} - \frac{\left(\vartheta^\top D_\alpha^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_\alpha \vartheta\right)}{\left(\vartheta^\top D_\alpha^\top D_\alpha \vartheta\right)^2} D_\alpha^\top D_\alpha\right] = 0.
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
a_\alpha(\vartheta) &\doteq \vartheta^\top D_\alpha^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_\alpha \vartheta, \qquad & A_\alpha &\doteq D_\alpha^\top \bar{V}^\top \bar{V} D_\alpha, \\
b_\alpha(\vartheta) &\doteq \vartheta^\top D_\alpha^\top D_\alpha \vartheta = \|\gamma^\alpha\|^2, \qquad & B_\alpha &\doteq D_\alpha^\top D_\alpha, \\
J_\alpha(\vartheta) &\doteq \frac{a_\alpha(\vartheta)}{b_\alpha(\vartheta)}.
\end{aligned}
$$

Уравнение на экстремальные точки запишем в виде

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{1}{b_\alpha(\vartheta)}D_\alpha^\top\left(\bar V^\top\bar V-J_\alpha(\vartheta)I\right)D_\alpha\right]\vartheta=0.$$

В матричной записи

$$\begin{pmatrix} D_1^\top & \dots & D_r^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\left(\bar V^\top\bar V-J_1(\vartheta)I\right)}{b_1(\vartheta)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\left(\bar V^\top\bar V-J_r(\vartheta)I\right)}{b_r(\vartheta)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1\\ \vdots\\ D_r\end{pmatrix}\vartheta\doteq$$

$$\doteq\widetilde D^\top\begin{pmatrix} W_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & W_r\end{pmatrix}\widetilde D\vartheta\doteq\widetilde D^\top W\widetilde D\vartheta=0. \quad (3.3.29)$$

Как следует из принятых обозначений, матрица W симметричная, но не обязательно положительно определена.

Несложно проверить тождество $\forall\vartheta\ \vartheta^\top\widetilde D^\top W\widetilde D\vartheta=0$. Смысл его в том, что производная $\frac{\partial J_{\mathtt{S}}(\vartheta)}{\partial\vartheta}$ перпендикулярна направлению ϑ, т. е. $J_{\mathtt{S}}(\vartheta)$ не зависит от нормы ϑ.

Ввиду линейной независимости столбцов $\widetilde D$ при неособенной матрице W матрица $\widetilde D^\top W\widetilde D$ также неособенная, и условие (3.3.29) означало бы $\vartheta=0$. Поэтому при $\vartheta\neq 0$ из (3.3.29) следует особенность W. Отсюда получаем необходимое условие существования экстремальной точки:

$$\exists\,\alpha\in\overline{1,r}\quad \det\left(\bar V^\top\bar V-J_\alpha(\vartheta)I\right)=0.$$

Следовательно, число экстремальных точек не превосходит числа rt, где $t=(p+1)(r+m)$ есть размерность векторов γ^i и матрицы $\bar V^\top\bar V$.

2) Заметим, что в случае (3.3.28) независимой параметризации разных уравнений получаем

$$J_{\mathtt{S}}(\vartheta)=J_{\mathtt{S}}(\vartheta^1,\dots,\vartheta^r)=\frac{\vartheta^{1\top}D_{11}^\top\bar V^\top\bar V D_{11}\vartheta^1}{\vartheta^{1\top}D_{11}^\top D_{11}\vartheta^1}+\dots+\frac{\vartheta^{r\top}D_{rr}^\top\bar V^\top\bar V D_{rr}\vartheta^r}{\vartheta^{r\top}D_{rr}^\top D_{rr}\vartheta^r}.$$

Отсюда с учетом выкладок раздела 3.7.3 следует 2-я часть утверждения. Утверждение доказано. □

С точки зрения вычислительных ресурсов, поиск минимума целевой функции ВМ требует существенно большего числа операций, чем ОР. Оценки ОР, ОРМ и ОРС по вычислительным затратам заметно не отличаются. Работоспособность и устойчивость алгоритмов проверялась для значений переменных $p\in\overline{0,6}$, $r\in\overline{1,5}$, $N\in\overline{50,5000}$ (см. раздел 3.7.4).

Установленные соотношения между описанными вариантами вариационных методов (3.3.11) и их свойства, установленные далее в этой главе, позволяют объединить их в один класс методов. В дальнейшем иногда будем использовать наименования "вариационный" и "орторегрессионный" как синонимы.

3.4 Состоятельность

Условия сильной состоятельности для оценок θ_L (3.3.13) при $r = 1$ исследовались М. Аоки и П. Ю (1970) [133, 134]. Состоятельность ими была доказана в предельном случае $N \to \infty$, когда оценки ОР приближаются к оценкам максимального правдоподобия и становится актуальным результат А. Вальда (1949) [261]. Нас интересует случай конечной длины N. Схема доказательства сильной состоятельности вариационных оценок (и оценок ОР, ОРМ как частных случаев ВМ, см. раздел 3.3) для конечных N была предложена при $\Phi = I$ в статье автора диссертации (1997) [70]. Переход к случаю $\Phi \neq I$ не составляет принципиальных затруднений, как и возможное наличие не зависящей от параметра θ неособенной весовой матрицы в норме $\|\cdot\|$ (см. раздел 3.7.1). Ранее Л. Глэзер (1981) [158] доказал сильную состоятельность оценок ОР при $\Phi = I$, $p = 0$, $\alpha_{0,\theta} \equiv I$, $\operatorname{vect}\beta_{0,\theta} \equiv \theta$. Теорема Л. Глэзера и техника ее доказательства вошли в монографию У. Фуллера (1987) [154]. Следующая наша теорема обобщает результат Л. Глэзера [158] на случай $p > 0$ и результат М. Аоки, П. Ю (1970) [133, 134] на случай неуправляемых систем с $r > 1$ и конечными N. Близкий нашему результат о состоятельности со ссылкой на те же работы М. Аоки, П. Ю (1970) [133, 134], У. Фуллера (1987) [154] опубликовали А. Кукуш, И. Марковский и С. Ван Хуффель (2005) [180]. Они рассматривали оценки ОР (TLS) с учетом клеточной теплицевости матрицы G (или ганкелевости структуры матрицы возмущений $V(\eta)$). Наше доказательство состоятельности, опубликованное в 1997 г. [69, 70], более компактно и непосредственно опирается на условие полноты наблюдений.

Теорема 3.4.1. *При ограничениях* (i'), (i") (раздел 3.1), (ii) (раздел *2.3*) *и полном множестве наблюдений* $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ (*определение 3.2.2*) *вариационная оценка* θ_L *из* (3.3.11) *сильно состоятельна по* $L \to \infty$.

Доказательство. Без потери общности рассуждений можно положить $\Phi = I$. В принятых обозначениях (3.1.8) целевая функция $J_L(\theta)$ (3.3.11) имеет вид

$$J_L(\theta) = \mathbf{M}_{i=1}^{L}\, \check{z}_{(i)}^{\top} G_\theta^{\top} (G_\theta G_\theta^{\top})^{-1} G_\theta \check{z}_{(i)}. \tag{3.4.1}$$

Способ формирования матрицы G_θ зависит от типа исследуемой вариационной оценки (раздел 3.3). Если матрица Φ в записи (3.3.11) отличается от единичной, достаточно заменить $\check{z}$ на $\Phi\check{z}$ и учесть переход от одного проектора к сумме проекторов в выражении для целевой функции.

Из усиленного закона больших чисел [89] следует

$$J_L(\theta) \to J(\theta) + J_0 \quad \text{(п.н.)},$$

$$\text{где} \qquad J(\theta) \doteq \mathbf{M}\, z_*^\top G_\theta^\top \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta z_*, \tag{3.4.2}$$

и число $J_0 \doteq \operatorname{Sp} G_\theta^\top \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta = \operatorname{rank} G_\theta$ в силу условий (ii) на с. 91 не зависит от θ.

Далее будем следовать схеме доказательства М. Аоки, П. Ю (1970) [133]. Принципиальное отличие нашего доказательства отметим особо.

Введем множество истинных значений параметра: $\Theta_* \doteq \{\theta_* : \ G_{\theta_*}\mathcal{M}_{*L} = 0, \ L \geqslant 1\}$. Это множество непусто вследствие определения (3.2.1). Сначала допустим, что Θ_* может состоять более чем из одной точки. Обозначим $\theta_L \doteq \arg\min_{\theta\in\Theta} J_L(\theta)$. Надо показать сходимость $\inf_{\theta\in\Theta_*\cap\Theta} \|\theta_L - \theta\| \to 0$ п. н.

Определим множество $\Theta_\varepsilon \doteq \bigcup_{\theta_*\in\Theta_*} \{\theta : \ \|\theta - \theta_*\| < \varepsilon\}$. Обозначим $\overline{\Theta}_\varepsilon$ дополнение Θ_ε. Множество $\overline{\Theta}_\varepsilon\cap\Theta$ компактно. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеет место вложение $\Theta_\varepsilon\cap\Theta \supset \Theta_*\cap\Theta$. Пусть $\theta_* \in \Theta_*\cap\Theta$. Для любой точки $\tilde\theta \in \overline{\Theta}_\varepsilon\cap\Theta$ имет место $\tilde\theta \notin \Theta_*\cap\Theta$, поэтому

$$\exists\, \delta(\tilde\theta, \theta_*) > 0 \quad |J(\tilde\theta) - J(\theta_*)| = \delta.$$

Из (3.4.2) следует $J(\theta_*) = 0$, $J(\tilde\theta) = J(\theta_*) + \delta$.

Заметим, что для доказательства соотношения $J(\tilde\theta) > J(\theta_*)$ М. Аоки и П. Ю (1970) [133] использовали неравенство Иенсена, применяя его в предположении нормальности распределения возмущений $\eta_{*(i)}$ (3.2.1) и считая, что $J_L(\theta)$ есть логарифм плотности распределения наблюдений $\check z_{(i)}$. Этот подход является более общим в том смысле, что доказательство не использует конкретного вида целевой функции $J_L(\theta)$; с другой стороны, доказательство М. Аоки и П. Ю опирается на предположение о нормальности возмущений и требует совпадения $J_L(\theta)$ с логарифмом функции правдоподобия; это сужает область применимости их результата. Кроме того, М. Аоки и П. Ю рассматривают предельный случай больших длин траекторий $N \to \infty$ и принципиально требуют, чтобы система была управляемой. Мы строим доказательство без таких существеннейших предположений. На нашем пути, сужая вид целевой функции до выражений (3.3.11), (3.4.2), удается 1) ослабить условие на распределение возмущений, 2) допустить конечные N и 3) снять ограничения на устойчивость и управляемость.

Итак, $J(\tilde\theta) = J(\theta_*) + \delta$. Ввиду сходимости п. н. $J_L(\tilde\theta) \to J(\tilde\theta)$, $J_L(\theta_*) \to J(\theta_*)$ существует L_δ: $\forall\, L > L_\delta$ одновременно выполнены неравенства

$$|J_L(\tilde\theta) - J(\tilde\theta)| < \frac{\delta}{2}, \qquad |J_L(\theta_*) - J(\theta_*)| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $J_L(\tilde\theta) > J_L(\theta_*)$. Ввиду компактности множеств $\Theta_* \cap \Theta$, $\overline{\Theta}_\varepsilon \cap \Theta$ и непрерывности целевой функции $J_L(\theta)$ существует L_ε: $\forall\, L > L_\varepsilon$

$$\min_{\tilde\theta\in\overline{\Theta}_\varepsilon\cap\Theta} J_L(\tilde\theta) > \max_{\theta_*\in\Theta_*\cap\Theta} J_L(\theta_*) \qquad \text{п. н.}$$

С другой стороны, $J_L(\theta_*) \geqslant J_L(\theta_L)$. Поэтому $\theta_L \notin \overline{\Theta}_\varepsilon \cap \Theta$, то есть $\theta_L \in \Theta_\varepsilon \cap \Theta$. Это означает $\inf_{\theta\in\Theta_*\cap\Theta} \|\theta_L - \theta\| < \varepsilon$ п. н. $\forall\, L > L_\varepsilon$.

Остается показать, что множество Θ_* состоит из одной точки, т. е. предельная целевая функция $J(\theta)$ (3.4.2) имеет единственную точку глобального минимума $\theta = \theta_*$. Поскольку $J(\theta) \geqslant 0$, достаточно убедиться, что $J(\theta) = 0$ влечет $\theta = \theta^*$.

Пусть $J(\theta) = 0$. Учитывая равенство

$$z_*^\top G_\theta^\top \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta z_* = \| \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1/2} G_\theta z_* \|^2,$$

получаем $\mathbf{M} \| \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1/2} G_\theta z_* \|^2 = 0$. Отсюда следует $G_\theta z_* = 0$ для любых z_* из подпространства

$$\mathcal{M}_* \doteq \operatorname{span}\left\{H(\theta_*)x \;:\; x \in \operatorname{supp} \mathrm{P}_{w_*}\right\},$$

где $\operatorname{supp} \mathrm{P}_{w_*}$ обозначает носитель распределения P случайной величины $w_* \in \mathbb{R}^{Mm+q}$:

$$\operatorname{supp} \mathrm{P}_{w_*} \doteq \mathbb{R}^{Mm+q} \Bigg\backslash \left\{ \bigcup_{P(B)=0} B \subset \mathbb{R}^{Mm+q} \right\}.$$

Согласно этому определению, множество $\mathcal{M}_*$ есть линейная оболочка предельного множества $\mathcal{M}_{*,\infty}$ (3.2.3) без областей нулевой меры. Пусть множество наблюдений $\mathcal{M}_L$ полно, тогда

$$\lim_{L\to\infty} \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)}) D > 0$$

(утверждение (3.2.1)). Это означает полноту множества $\mathcal{M}_{*,\infty}$ без областей нулевой меры, то есть полноту $\mathcal{M}_*$. Ввиду определения полноты (3.2.1), из $G_\theta \mathcal{M}_* = 0$ вытекает $\theta = \theta^*$. Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть* $\Theta_* \doteq \{\theta_* :\; G_{\theta_*} \Phi \mathcal{M}_{*L} = 0,\; L \geqslant 1\} \in \mathbb{R}^v$ *и*

$$\Omega_* \doteq \left\{\omega_* :\; G'_{\omega_*} \Phi' \mathcal{M}_{*L} = 0,\; L \geqslant 1\right\} \in \mathbb{R}^v, \qquad \mathcal{N}(\Phi) = \mathcal{N}(\Phi') = \{0\},$$

суть два множества "истинных" значений параметров θ *и* ω *моделей*

$$G_\theta z = 0, \qquad z \in \mathbb{R}^t, \qquad G'_\omega z' = 0, \qquad z' \in \mathbb{R}^{t'}. \tag{3.4.3}$$

Пусть также $\theta_L = \arg\min_\theta L^{-1} \sum_{i=1}^L \min_{G_\theta z_{(i)}=0} \left\| \Phi \check{z}_{(i)} - z_{(i)} \right\|^2$,

$$\omega_L = \arg\min_\omega L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \min_{G'_\omega z_{(i)}=0} \left\| \Phi' \check{z}_{(i)} - z_{(i)} \right\|^2 \tag{3.4.4}$$

суть две орторегрессионные оценки вида (3.3.11)*, полученные по моделям* (3.4.3) *и одному и тому же полному множеству измерений*

$$\mathcal{M}_L \doteq \left\{\check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{*(i)},\; z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L},\; i \geqslant 1\right\}.$$

Тогда для совпадения предельных значений оценок $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \lim_{L\to\infty} \omega_L$ *достаточно* *условия*

$$\Theta_* = \Omega_* = \{\theta_*\} . \tag{3.4.5}$$

Определение 3.4.1. Пусть $\mathcal{M}_{*L}$ — полное в смысле определения 3.2.1 множество решений системы (3.1.1), и пусть

$$\mathcal{M}_L \doteq \left\{ \check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{*(i)},\ z_{*(i)} \in \mathcal{M}_{*L},\ i \geqslant 1 \right\}$$

есть полное в смысле определения 3.2.2 множество наблюдений. Уравнение (3.1.1), представленное множеством наблюдений $\mathcal{M}_L$, называем объектом (моделирования). Пару матриц $\left(\widetilde{G}_\theta, \Phi\right)$ из формулы (3.3.11) ради краткости иногда будем называть моделью (в узком смысле; согласно определениям раздела 2.1, о матрицах точнее будет говорить как об *описаниях* модельного многообразия $\mathcal{M} = \mathcal{N}\left(G_\theta\right)$). Пусть (G_θ, Φ), (G'_ω, Φ') — две модели объекта, и θ_L, ω_L — построенные на их основе оценки параметров θ_* согласно формулам (3.4.4), (3.4.4). Модели (G_θ, Φ) и (G'_ω, Φ') называем *равносильными по состоятельности*, если из состоятельности оценки θ_L следует состоятельность оценки ω_L, и наоборот.

Утверждение 3.4.1. *Модели* (G, I), $(G_{\mathtt{OR}}, I)$, $(G_{\mathtt{M}}, \Phi)$, $(G_{\mathtt{S}}, \Phi_{\mathtt{S}})$ *одного и того же объекта, описываемого уравнением* (3.1.1) *с полным в смысле определения 3.2.2 множеством наблюдений* $\mathcal{M}_L$, *соответствующие оценкам* ВМ, ОР, ОРМ, ОРС (3.3.14), (3.3.15), (3.3.16), (3.3.26) *и различимые по множеству невозмущенных наблюдений* $\mathcal{M}_{*L}$ *в смысле определения 2.3.1, равносильны по состоятельности. При этом модели* (G, I), $(G_{\mathtt{M}}, \Phi)$, $(G_{\mathtt{S}}, \Phi_{\mathtt{S}})$ *равносильны не только по состоятельности, но и по условиям различимости.*

Доказательство. 1) В силу различимости при полном множестве наблюдений $\mathcal{M}_{*L}$ (т. е. при нулевых возмущениях) все упомянутые модели приводят к единственному истинному значению оценки параметров: $\theta_{\mathtt{V}} = \theta_{\mathtt{OR}} = \theta_{\mathtt{M}} = \theta_{\mathtt{S}} = \theta_*$ (см. (3.3.12), (3.3.14), (3.3.13), (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17), (3.3.25), (3.3.26)).

2) При наличии ненулевых возмущений и полном множестве наблюдений $\mathcal{M}_L$, ввиду того, что все четыре оценки принадлежат одному и тому же типу орторегрессионных (3.3.11), и в силу состоятельности (теорема 3.4.1), предельные по $L \to \infty$ значения оценок совпадают с истинным значением θ_*.

3) Если для какой-то одной из упомянутых моделей нарушено условие различимости по невозмущенному множеству наблюдений $\mathcal{M}_{*L}$, то это условие различимости нарушено и для всех остальных моделей, ввиду того, что множества $\mathcal{M}_{*L}$, $\Phi\mathcal{M}_{*L}$, $\Phi_{\mathtt{S}}\mathcal{M}_{*L}$ входят в многообразия решений модельных уравнений с матрицами соответственно G, $G_{\mathtt{OR}}$, $G_{\mathtt{M}}$, $G_{\mathtt{S}}$.

4) Ввиду теоремы 3.2.1 и следствия, из определения целевых функций (3.3.14), (3.3.16), (3.3.26) следует равносильность не только по состоятельности, но и даже по условиям различимости для моделей ВМ, ОРМ, ОРС (кроме ОР). Этими замечаниями завершается доказательство утверждения. □

Замечание 3.4.1. Ввиду следствия теоремы 3.4.1 о состоятельности, оценки ВМ, более сложные в вычислительном отношении и со сложно устроенной целевой функцией, можно в ряде случаев заменить равносильными по состоятельности оценками ОРС, целевая функция которых существенно проще и имеет число экстремумов не больше $r(p+1)(r+m)$ независимо от объема выборки наблюдений (утверждение 3.3.4). Такая замена оправдана с точки зрения теоретического исследования свойств вариационных оценок. Если на первое место по важности ставить скорость сходимости итерационной процедуры минимизации целевой функции и величину асимптотической дисперсии, то оценки ВМ предпочтительней оценок ОРС. Условие (3.4.5) перехода к более простым оценкам будет выполнено, если для любого $L \geqslant 1$ обе модели (3.4.3) и (3.4.4) различимы по множествам соответственно $\varPhi\mathcal{M}_{*L}$ и $\varPhi'\mathcal{M}_{*L}$.

Свойство равносильности по состоятельности для орторегрессионных оценок используется в разделе 3.6 для решения проблемы локальных экстремумов.

3.5 Сравнение оценок по линейному приближению

В этом разделе сравним вариационные оценки (3.3.12), (3.3.13), (3.3.16) с точки зрения учета связей между переменными $z[k]$ в разные моменты времени k. Будет показано, что учет связей влияет на дисперсию оценок.

Схема сравнения методов иллюстрируется следующей задачей.

Пусть объект описывается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \check{y} = K\theta_* + Lw_* + \eta_*, \\ Mw_* = 0, \end{cases}$$

где K, L, M — заданные числовые матрицы с линейно независимыми столбцами K, L и строками M; θ_*, w_* — векторы оцениваемых параметров; $\eta_* \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$ — возмущения; $\check{y}$ — наблюдаемый вектор. (Переменные w_* будут далее играть роль координат точки $z = H(\theta_*)$ на многообразии $\mathcal{N}(G_\theta) \ni z$.)

Записываются две гипотетические системы, которые могут порождать наблюдения $\check{y} = y + \eta$:

(а) полная $\begin{cases} y = K\theta + Lw, \\ Mw = 0; \end{cases}$ (б) упрощенная $y = K\theta + Lw$.

Согласно случаям (а) и (б) для составного вектора параметров $(\theta_*; w_*)$ строятся две оценки:

$$(\theta_0; w_0) \doteq \arg\min_{\theta,w:\, Mw=0} \|\check{y} - y\|^2, \qquad (\theta_1; w_1) \doteq \arg\min_{\theta,w} \|\check{y} - y\|^2.$$

Показывается, что оценка θ_0, при получении которой учитывается наличие ограничения $Mw = 0$, в общем случае имеет меньшую дисперсию, чем оценка θ_1 (теорема 3.7.2 в разделе 3.7.2).

Данная схема сравнения *линейных* оценок применяется к вариационным оценкам

(3.3.12), (3.3.13), (3.3.16), которые нелинейны. Для сравнения оценок рассматривается случай малых возмущений с заменой оценок линейными приближениями. Будет показано, что оценки ВМ (3.3.12) полностью используют всю информацию $Mw = 0$ о связях между отсчетами траекторий линейного динамического объекта, а в оценках ОР, ОРМ часть ограничений не учитывается. Это позволяет на коротких участках переходных процессов за счет более интенсивных вычислений получать состоятельные оценки параметров по методу ВМ с лучшими асимптотическими свойствами (теорема 3.5.1 ниже).

Рассмотрим оценки $\theta_{\mathtt{V}}$ (3.3.12), (3.3.14) и $\theta_{\mathtt{M}}$ (3.3.16). Минимизация целевых функций (3.3.18), (3.3.19) осуществляется по параметрам θ совместно с w, $w_{\mathtt{M}}$. Совместные оценки $(\theta_{\mathtt{V}}; w)$, $(\theta_{\mathtt{M}}; w_{\mathtt{M}})$ можно заменить линейными приближениями, рассмотрев предельный случай малых возмущений.

В этом разделе предположим, что независимые случайные величины $\eta_{(i)}$ имеют одинаковое распределение $\mathbf{P}$ из класса распределений с нулевым средним, конечной матрицей вторых моментов $\sigma^2 I$ и ограниченным носителем $\operatorname{supp}\mathbf{P}$ диаметра не больше $c\sigma$, где c — некоторая константа. Этот факт будем обозначать $\eta_{(i)} \in \mathbf{M}_{2,c\sigma}(0, \sigma^2 I)$. Ввиду вложения $\mathbf{M}_{2,c\sigma}(0, \sigma^2 I) \subset \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$ вариационные оценки при возмущениях такого типа обладают свойством состоятельности (теорема 3.4.1).

Будем полагать величину σ достаточно малой, чтобы оценки $\chi_{\mathtt{V}} \doteq (\theta_{\mathtt{V}}; w)$ и $\chi_{\mathtt{M}} \doteq (\theta_{\mathtt{M}}; w_{\mathtt{M}})$, получаемые минимизацией (3.3.18), (3.3.19), с вероятностью 1 уклонялись от истинных значений $\chi_* \doteq (\theta_*; w_*)$ и $\chi_{\mathtt{M}*} \doteq (\theta_*; w_{\mathtt{M}*})$ не более чем на заранее заданную малую величину ε. Возможность такого выбора σ обусловлена непрерывностью зависимости оценок $\chi_{\mathtt{V}}$ и $\chi_{\mathtt{M}}$ от исходных данных $\check{z}$ почти всюду в $\mathbb{R}^{N(r+m)}$. Существование и непрерывность неявных функций $\chi_{\mathtt{V}}(\check{z})$ и $\chi_{\mathtt{M}}(\check{z})$, задаваемых равенствами

$$\frac{\partial J(\check{z}, \chi_{\mathtt{V}})}{\partial \chi_{\mathtt{V}}} = 0, \qquad \frac{\partial J_{\mathtt{M}}(\check{z}, \chi_{\mathtt{M}})}{\partial \chi_{\mathtt{M}}} = 0,$$

следует непосредственно из результатов главы 5 (теорема 5.1.2).

Пусть χ^0 и $\chi^0_{\mathtt{M}}$ — некоторые оценки для χ_* и $\chi_{\mathtt{M}*}$ с уклонением не более ε.

Запишем целевую функцию (3.3.18) без сомножителя Φ:

$$J \doteq \min \|F\|^2, \qquad F = F(\check{z}; \theta; w) = \check{z} - H(\theta) w \doteq \check{z} - f(\theta, w).$$

Разложим функцию F относительно точки $(z^0; \theta^0; w^0)$, $z^0 = H(\theta^0) w^0$, в ряд Тейлора с остаточным членом R:

$$\begin{aligned} J = J(\theta, w) &= \|F_0 + \Delta F(\theta, w) + R(\theta, w)\|^2, \\ F_0 &\doteq z^0 - H(\theta^0) w^0 = 0, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

$$\Delta F \doteq \Delta\check{z} - \Delta H(\theta^0, \Delta\theta) w^0 - H(\theta^0)\Delta w \doteq \Delta\check{z} - \Delta f(\theta^0, \Delta\theta, w^0, \Delta w),$$
$$\Delta\check{z} \doteq \check{z} - z^0, \qquad \Delta\theta \doteq \theta - \theta^0, \qquad \Delta w \doteq w - w^0.$$

В записи (3.5.1) выделим слагаемые, зависящие от переменных $(\Delta\theta; \Delta w) \doteq h$:

$$J(h) = \left\|\Delta\check{z} - \Delta f(\chi^0, h) + R(\chi^0, h)\right\|^2 =$$

$$= \left\|\Delta\check{z} - \Delta f(\chi^0, h)\right\|^2 + O\left(\|h\|^3\right). \tag{3.5.2}$$

Оценка ВМ $\chi_{\mathtt{V}}$, соответствующая измерениям $\Delta\check{z} \doteq \check{z} - z^0$, вычисляется минимизацией целевой функции (3.5.2):

$$\chi_{\mathtt{V}} = \chi^0 + \Delta\chi_{\mathtt{V}}, \qquad \Delta\chi_{\mathtt{V}} = \arg\min_h J(h). \tag{3.5.3}$$

Зададимся приближенной целевой функцией

$$\widetilde{J}(h) = \|\Delta F\|^2 = \left\|\Delta\check{z} - \Delta f(\chi^0, h)\right\|^2.$$

Минимизируя функцию $\widetilde{J}(h)$, получим некоторую оценку $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$:

$$\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} = \chi^0 + \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}, \qquad \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} = \arg\min_h \widetilde{J}(h). \tag{3.5.4}$$

Оценка $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{V}}$ в следующем смысле.

Утверждение 3.5.1. *Верно соотношение* $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} - \chi_{\mathtt{V}}\| = o\left(\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^0\|\right)$, *т. е. при* $\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^0\| \to 0$ *имеет место сходимость* $\frac{\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}} - \chi_{\mathtt{V}}\|}{\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^0\|} \to 0$.

Другими словами, если рассматривать оценку $\chi_{\mathtt{V}}$ как один шаг итерационной процедуры уточнения оценки χ^0, то по мере уменьшения величины шага разница между $\chi_{\mathtt{V}}$ и $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ будет уменьшаться быстрее, чем величина шага $\|\chi_{\mathtt{V}} - \chi^0\|$. В этом смысле $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{V}}$.

Прежде доказательства утверждения установим лемму.

Лемма 3.5.1. *Пусть некоторая функция* $J(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *представима в виде суммы* $J(x) = J_1(x) + R(x)$, $J_1(x) = J_0 + (x - x_0)^\top Q(x - x_0)$, $x, x_0 \in B$, *где* $Q > 0$ *— положительно определенная матрица,* B *— замкнутое выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^n$, *и функция* $R(x)$ *в* B *непрерывна и ограничена:* $\forall x \in B \ \|R(x)\| < C$. *Обозначим* x_1 *точку минимума* $J(x)$ *в* B. *Тогда расстояние между точками минимума функций* $J(x)$ *и* $J_1(x)$ *ограничено сверху величиной:* $\|x_1 - x_0\| < \sqrt{\frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)}}$, *где* $\lambda_{\min}(Q)$ *— наименьшее собственное число матрицы* Q.

Доказательство. Выразим x через новые переменные: $x = Q^{-1/2}y$. Функция $J_1(x(y)) = J_0 + (y - y_0)^\top(y - y_0)$ монотонно непрерывно растет вместе с увеличением расстояния $\|y - y_0\|$. Следовательно, если область $B_y \doteq Q^{1/2}B$ достаточно большая, то в ней найдется точка y_C такая, что

$$J_0 + (y_C - y_0)^\top(y_C - y_0) - C = J_0 + C. \tag{3.5.5}$$

Пусть $\|y - y_0\| \geqslant \|y_C - y_0\|$, тогда

$$J_0 + (y - y_0)^\top (y - y_0) - C \geqslant J_0 + C,$$

и y не может быть точкой минимума $J(x(\cdot)) = J_1(x(\cdot)) + R(x(\cdot))$. Поэтому $x(y) = Q^{-1/2} y$ не может быть точкой минимума $J(\cdot) = J_1(\cdot) + R(\cdot)$. Следовательно, величина $\|y_C - y_0\| = \sqrt{2C}$ является оценкой сверху для расстояния между точками минимума функций $J(x(\cdot))$ и $J_1(x(\cdot))$. Из (3.5.5) следуют неравенства

$$(x_1 - x_0)^\top Q(x_1 - x_0) = (y_1 - y_0)^\top (y_1 - y_0) < 2C,$$

$$(x_1 - x_0)^\top (x_1 - x_0) < \frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)},$$

$$\|x_1 - x_0\| < \sqrt{\frac{2C}{\lambda_{\min}(Q)}}.$$

Если область B_y недостаточно большая для выполнения (3.5.5), то доопределим функцию $R(x(y))$ вне B_y произвольным согласным с условием леммы образом, и повторив рассуждения, получим, что точка минимума функции $J(x(y))$ необходимо лежит на пересечении B_y и круга $\|y - y_0\| < \sqrt{2C}$. Лемма доказана. □

Доказательство утверждения 3.5.1. Введем обозначения:

$$x \doteq \Delta\chi, \qquad J_1(x) \doteq \widetilde{J}(\Delta\chi),$$

$$x_0 \doteq \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{v}}, \qquad J_0 \doteq \widetilde{J}(\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{v}}),$$

$$Q \doteq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{J}(x)}{\partial x^2}(x_0).$$

Запишем целевую функцию $\widetilde{J}(\Delta\chi)$:

$$\widetilde{J}(\Delta\chi) \doteq J_1(x) = J_0 + (x - x_0)^\top Q(x - x_0). \tag{3.5.6}$$

Применим лемму 3.5.1 к функциям $\widetilde{J}(\Delta\chi)$ (3.5.6) и $J(\Delta\chi) = \widetilde{J}(\Delta\chi) + O\left(\|\Delta\chi\|^3\right)$ (3.5.2), учитывая оценку

$$R(x) = O\left(\|\Delta\chi\|^3\right) < C_1 \|\Delta\chi_{\mathtt{v}}\|^3$$

с некоторой константой C_1. Эта оценка обеспечивается надлежащим выбором области B значений $\Delta\chi$. Согласно лемме, имеет место следующая оценка сверху для расстояния между корнями функций $\widetilde{J}(\Delta\chi)$ и $J(\Delta\chi)$:

$$\|\Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{v}} - \Delta\chi_{\mathtt{v}}\| = \|\widetilde{\chi}_{\mathtt{v}} - \chi_{\mathtt{v}}\| < \sqrt{\frac{2C_1\|\Delta\chi_{\mathtt{v}}\|^3}{\lambda_{\min}(Q)}} \doteq C_2 \|\Delta\chi_{\mathtt{v}}\|^{3/2} = C_2 \|\chi_{\mathtt{v}} - \chi^0\|^{3/2}.$$

Отсюда следует $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{v}} - \chi_{\mathtt{v}}\| = o\left(\|\chi_{\mathtt{v}} - \chi^0\|\right)$. Утверждение доказано. □

Аналогично строится линейное приближение $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$ для модифицированных оценок $\chi_{\mathtt{M}}$ из (3.3.19). Запишем функцию потерь (3.3.19) в виде

$$J_{\mathtt{M}} = \min \|F_{\mathtt{M}}\|^2, \qquad F_{\mathtt{M}} = F_{\mathtt{M}}(\check{z};\theta;w_{\mathtt{M}}) = \Phi\check{z} - H_{\mathtt{M}}(\theta)w_{\mathtt{M}} \doteq \Phi\check{z} - f_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}).$$

Разложим функцию $F_{\mathtt{M}}$ относительно точки $(z^0;\theta^0;w^0_{\mathtt{M}})$ в ряд Тейлора с остаточным членом $R_{\mathtt{M}}$:

$$J_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}) = \|F_{\mathtt{M},0} + \Delta F_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}}) + R_{\mathtt{M}}(\theta, w_{\mathtt{M}})\|^2, \tag{3.5.7}$$

$$F_{\mathtt{M},0} \doteq \Phi z^0 - H_{\mathtt{M}}(\theta^0)w^0_{\mathtt{M}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta F_{\mathtt{M}} \doteq \Phi\Delta\check{z} - \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta^0, \Delta\theta)w^0_{\mathtt{M}} - H_{\mathtt{M}}(\theta^0)\Delta w_{\mathtt{M}} \doteq& \\ \doteq \Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\theta^0, \Delta\theta, w^0_{\mathtt{M}}, \Delta w_{\mathtt{M}}),& \\ \Delta\check{z} \doteq \check{z} - z^0, \qquad \Delta\theta \doteq \theta - \theta^0, \qquad \Delta w_{\mathtt{M}} \doteq w_{\mathtt{M}} - w^0_{\mathtt{M}}.& \end{aligned}$$

В записи (3.5.7) выделим слагаемые, зависящие от переменных $(\Delta\theta;\Delta w_{\mathtt{M}}) \doteq h_{\mathtt{M}}$:

$$\begin{aligned} J_{\mathtt{M}}(h_{\mathtt{M}}) &= \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^0_{\mathtt{M}}, h_{\mathtt{M}}) + R_{\mathtt{M}}(\chi^0_{\mathtt{M}}, h_{\mathtt{M}})\right\|^2 = \\ &= \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^0_{\mathtt{M}}, h_{\mathtt{M}})\right\|^2 + O\left(\|h_{\mathtt{M}}\|^3\right). \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Модифицированная оценка $\chi_{\mathtt{M}}$, соответствующая измерениям $\Delta\check{z} \doteq \check{z}-z^0$, вычисляется путем минимизации целевой функции (3.5.8):

$$\chi_{\mathtt{M}} = \chi^0_{\mathtt{M}} + \Delta\chi_{\mathtt{M}}, \qquad \Delta\chi_{\mathtt{M}} = \arg\min_{h_{\mathtt{M}}} J_{\mathtt{M}}(h_{\mathtt{M}}). \tag{3.5.9}$$

Зададимся приближенной целевой функцией

$$\widetilde{J}_{\mathtt{M}}(h_{\mathtt{M}}) = \left\|\Phi\Delta\check{z} - \Delta f_{\mathtt{M}}(\chi^0_{\mathtt{M}}, h_{\mathtt{M}})\right\|^2.$$

Минимизируя функцию $\widetilde{J}_{\mathtt{M}}(h_{\mathtt{M}})$, получим некоторую оценку $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$:

$$\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} = \chi^0_{\mathtt{M}} + \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}, \qquad \Delta\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} = \arg\min_{h_{\mathtt{M}}} \widetilde{J}_{\mathtt{M}}(h_{\mathtt{M}}). \tag{3.5.10}$$

Оценка $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$ является приближением для $\chi_{\mathtt{M}}$ в следующем смысле.

Утверждение 3.5.2. *Верно соотношение* $\|\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}} - \chi_{\mathtt{M}}\| = o\left(\|\chi_{\mathtt{M}} - \chi^0_{\mathtt{M}}\|\right)$.

Доказательство. Полностью аналогично доказательству утверждения 3.5.1. □

В смысле утверждений 3.5.1, 3.5.2 можно заменить оценки $\chi_{\mathtt{V}}$, $\chi_{\mathtt{M}}$ (и соответственно $\theta_{\mathtt{V}}$, $\theta_{\mathtt{M}}$) из (3.5.3), (3.5.9) линейными приближениями $\widetilde{\chi}_{\mathtt{V}}$, $\widetilde{\chi}_{\mathtt{M}}$ (или $\widetilde{\theta}_{\mathtt{V}}$, $\widetilde{\theta}_{\mathtt{M}}$) из (3.5.4), (3.5.10). После такой замены применима описанная в начале раздела схема сравнения линейных оценок. Это приводит к следующему результату.

Теорема 3.5.1. *Пусть $D_{\mathtt{V}}$ и $D_{\mathtt{M}}$ — дисперсии оценок $\widetilde{\theta}_{\mathtt{V}}$ и $\widetilde{\theta}_{\mathtt{M}}$ соответственно. Тогда $D_{\mathtt{V}} \leqslant D_{\mathtt{M}}$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда*

$$H_{\mathtt{M}}^{\top}(\theta_*)\Delta H_{\mathtt{M}}(\theta_*, \Delta\theta) = 0 \quad \text{для любых} \quad \Delta\theta.$$

Доказательство. Применим теорему 3.7.2 из приложения ниже. Для этого сопоставим обозначения, заменив θ^0 на θ_* при малых ε:

$$\begin{aligned} \theta &\doteq \Delta\theta, \qquad w \doteq \Delta w_{\mathtt{M}}, \qquad Y \doteq \varPhi\Delta\check{z}, \\ K\theta &\doteq \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta_*, \Delta\theta) w_{\mathtt{M}*}, \\ Lw &\doteq H_{\mathtt{M}}(\theta_*)\Delta w_{\mathtt{M}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.5.1 доказана. □

Укажем класс систем, для которого в условиях теоремы всегда выполняется строгое неравенство
$D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$.

Определение. Пусть многочлен $\det\alpha(s) = \det\left(\alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p\right)$, ассоциированный с системой (3.1.2), не имеет нулевых корней. Это значит, что в равносильной системе 1-го порядка (1.1.2) многочлен $\det(sI - A)$ не имеет нулевых корней, т. е. матрица A неособенная. Кроме того, пусть в разложении

$$\begin{gathered} \alpha(s) = (\operatorname{diag}_i s^{p_i}) \cdot \left(\alpha_{[0]} + s^{-1}\alpha_{[-1]} + \ldots + s^{-p_r}\alpha_{[-p_r]}\right), \\ \operatorname{diag}_i s^{p_i} \doteq \operatorname{diag}\left(s^{p_1}, s^{p_2}, \ldots, s^{p_r}\right), \end{gathered}$$

с числовыми матрицами $\alpha_{[i]}$ матрица $\alpha_{[0]}$ не зависит от параметра θ. Тогда будем говорить, что система (3.1.2) принадлежит классу *простых*.

Обозначим $\Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta)$ 1-й дифференциал отображения $\theta \mapsto H_{\mathtt{M}}(\theta)$, т. е.

$$H_{\mathtt{M}}(\theta + \Delta\theta) = H_{\mathtt{M}}(\theta) + \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta) + O(\|\Delta\theta\|).$$

Теорема 3.5.2. *Для систем из класса простых всегда существует приращение $\Delta\theta$ такое, что произведение $H_{\mathtt{M}}^{\top}(\theta)\Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta)$ не равно нулю, т. е. всегда имеет место неравенство $D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$.*

Доказательство. Запишем матрицу $H_{\mathtt{M}}(\theta)$ (3.3.23) через кронекерово произведение:

$$H_{\mathtt{M}}(\theta) = \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x} & I \otimes H_{p,u} \\ \hline 0 & I \end{array}\right).$$

Упростим обозначения: $H \doteq H_{\mathtt{M}}(\theta)$, $\Delta H \doteq \Delta H_{\mathtt{M}}(\theta, \Delta\theta)$.

Покажем, что если выполнены условия $\det A \neq 0$, $\Delta C = 0$, и строки C линейно независимы, то из равенства $H^{\top}\Delta H = 0$ следует $\Delta H = 0$.

Используем свойство кронекерова произведения: $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$. Тогда

$$H^\top \Delta H = \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x}^\top & 0 \\ \hline I \otimes H_{p,u}^\top & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I \otimes \Delta H_{p,x} & I \otimes \Delta H_{p,u} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I \otimes H_{p,x}^\top \Delta H_{p,x} & I \otimes H_{p,x}^\top \Delta H_{p,u} \\ \hline I \otimes H_{p,u}^\top \Delta H_{p,x} & I \otimes H_{p,u}^\top \Delta H_{p,u} \end{array}\right).$$

Следовательно, условие $H^\top \Delta H = 0$ равносильно условию

$$\left(\begin{array}{c|c} H_{p,x}^\top \Delta H_{p,x} & H_{p,x}^\top \Delta H_{p,u} \\ \hline H_{p,u}^\top \Delta H_{p,x} & H_{p,u}^\top \Delta H_{p,u} \end{array}\right) = 0.$$

Из равенства $H_{p,x}^\top \Delta H_{p,u} = 0$ следует система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{r} C^\top \Delta D + A^\top C^\top C \Delta B + A^{2\top} C^\top C \Delta (AB) + \ldots + A^{(p-1)\top} C^\top C \Delta \left(A^{p-2} B\right) = 0 \\ A^\top C^\top \Delta D + A^{2\top} C^\top C \Delta B + \ldots + A^{(p-1)\top} C^\top C \Delta \left(A^{p-3} B\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{(p-2)\top} C^\top \Delta D + A^{(p-1)\top} C^\top C \Delta B = 0 \\ A^{(p-1)\top} C^\top \Delta D = 0 \end{array}\right. \qquad (3.5.11)$$

Пусть f_k обозначает левую часть k-го уравнения $f_k = 0$ в системе (3.5.11). Несложно получить следующие соотношения:

$$f_2 = A f_1 - A^{p\top} C^\top C \Delta \left(A^{p-2} B\right),$$

$$f_k = A f_{k-1} - A^{p\top} C^\top C \Delta \left(A^{p-k} B\right),$$

$$k = \overline{2, p}.$$

Из равенств $f_1 = 0$, ... , $f_p = 0$ следует

$$\left\{\begin{array}{c} A^{p\top} C^\top C \Delta \left(A^{p-k} B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p}. \end{array}\right.$$

Если матрица A неособенная и строки C линейно независимы, последнее равенство означает

$$\left\{\begin{array}{c} C \Delta \left(A^{p-k} B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p}. \end{array}\right.$$

Учитывая равенство $\Delta C = 0$, можем записать

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta \left(C A^{p-k} B\right) = 0 \\ k = \overline{2, p}. \end{array}\right.$$

Кроме того, из последнего уравнения системы (3.5.11) следует $\Delta D = 0$. Тем самым,

$\Delta H_{p,u} = 0$.

Далее, все допустимые изменения матриц A, B, C, D, сохраняющие $H_{p,u}$ ($\Delta H_{p,u} = 0$), описываются уравнением

$$(A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C, D + \Delta D) = (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D), \qquad \det P \neq 0.$$

Если наложить условие различимости (i”) (с. 128), с необходимостью получаем

$$P = I, \qquad \Delta A = 0, \qquad \Delta B = 0, \qquad \Delta C = 0, \qquad \Delta D = 0,$$

что означает $\Delta H = 0$.

Таким образом, доказано утверждение, даже более сильное, чем теорема 3.5.2. А именно, для различимых в смысле условия (i”) систем из класса простых любое изменение $\Delta\theta$ параметров θ (и, соответственно, изменение матриц A, B, C, D) с необходимостью влечет $\Delta H \neq 0$ (в силу различимости) и влечет $H^\top \Delta H \neq 0$ (в силу вышеприведенных рассуждений), то есть в силу теоремы 3.5.1 всегда $D_{\mathtt{V}} < D_{\mathtt{M}}$. Теорема 3.5.2 доказана. □

Таким образом, оценки ВМ в предельном случае малых возмущений имеют меньшую дисперсию, чем оценки ОРМ, по крайней мере для систем из класса простых, за счет использования информации о линейных связях в наблюдениях.

3.6 О проблеме локальных экстремумов

В статье И. И. Перельмана «Методы состоятельного оценивания параметров линейных динамических объектов и проблематичность их реализации на конечных выборках», опубликованной в журнале «Автоматика и телемеханика» в 1981 г. [98], было показано, что широко распространенные так называемые *прямые* методы идентификации параметров линейных динамических систем (см. введение) на конечных выборках приводят к проблеме большого числа локальных экстремумов целевой функции. Наличие локальных экстремумов отмечалось также в [142, 243]. Откликом на статью И. И. Перельмана явилась работа Б. Г. Ворчика (1984) [21], в которой рассматривалось предельное по $N \to \infty$ поведение экстремумов целевой функции. Здесь мы рассмотрим формальную постановку задачи, которая приводит к проблеме локальных экстремумов, и покажем, что в интересующем нас случае конечных N эта задача всегда может быть переформулирована как вариационная. Вычислительное решение вариационной задачи более сложно (раздел 3.7.3), чем прямой задачи, но равносильная по состоятельности вариационная задача ОРС (см. определение 3.4.1 и утверждение 3.4.1) имеет для любых конечных $N \geqslant p + 1$ целевую функцию с конечным числом локальных экстремумов $\leqslant r(p + 1)(r + m)$ (замечание 3.4.1 и утверждение 3.3.4). Таким образом, в указанном смысле вариационная постановка задачи идентификации обладает ”регуляризующим эффектом” по отношению к целевой функции оценок параметров. Кроме того, согласно утверждению 3.3.4, в частном случае независимой параметризации разных уравнений число экстремумов целевой функции ОРС всегда равно $r(v+1)$, где v — размерность вектора параметров, и r — число уравнений. Поэтому задача идентификации в вариационной постановке равносильна по состоятельности r задачам скалярной ортогональной регрессии с хорошо изученными свойствами глобальной сходимости (раздел 3.7.3).

Используя обозначения (0.0.36), (0.0.37), (0.0.38) рассмотрим простейший пример, предложенный И. И. Перельманом [98]:

$$y[k] = ay[k-1] + x[k], \qquad \check{y}[k] = y[k] + \varepsilon[k], \qquad \check{x}[k] = x[k].$$

Уравнение (0.0.39) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon[k] &= \check{y}[k] - \check{x}[k] - a\check{y}[k-1] + a\varepsilon[k-1] \doteq \\ &\doteq \check{\omega}[k] + a\varepsilon[k-1], \end{aligned}$$

где $\check{\omega}[k]$ — измерения. Принимая в качестве целевой функции квадрат нормы ошибки прогноза на конце траектории, получаем

$$\varepsilon^2[N] = \left(a^{N-1}\varepsilon[1] + a^{N-2}\check{\omega}[1] + \ldots + \check{\omega}[N]\right)^2 \doteq J(a).$$

Локальные экстремумы определяются из уравнения $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$, которое может иметь до $(2N-3)$ действительных корней. Очевидно, число корней растет с ростом N, и все они должны рассматриваться как претенденты на точки глобального минимума. Этот факт, как пишет И. И. Перельман, ”приводит к обоснованным сомнениям относительно практической разрешимости” поставленной простейшей задачи идентификации. Трудности только усугубляются, если рассмотреть более сложные системы и задачи идентификации объекта в контуре обратной связи, т. е. системы с несколькими уравнениями. Отвечая на статью И. И. Перельмана [98], Б. Г. Ворчик (1984) показал [21], что в пределе $N \to \infty$ вероятность большого числа действительных корней стремится к нулю. Однако этот факт не снимает отмеченных И. И. Перельманом трудностей идентификации прямым методом по конечному множеству наблюдений.

Наболее общий вид систем, рассмотренных И. И. Перельманом, следующий:

$$\begin{aligned} y[k] &= -a_{p-1}y[k-1] - \ldots - a_0 y[k-p] + \\ &\quad + b_{p-1}x[k-1] + \ldots + b_0 x[k-p] + \zeta[k], \qquad (3.6.1) \\ \check{y}[k] &= y[k] + \varphi[k], \\ x[k] &= -c_{q-1}x[k-1] - \ldots - c_0 x[k-p] + \\ &\quad + d_{q-1}\check{y}[k-m-1] + \ldots + d_0\check{y}[k-m-p] + \check{u}[k]. \qquad (3.6.2) \end{aligned}$$

Здесь $x[k]$ и $y[k]$ — вход и выход объекта управления, $\zeta[k]$ и $\varphi[k]$ — случайные возмущения, $\check{u}[k]$ — вход системы управления. Последнее уравнение описывает обратную связь. Наблюдаются величины $\check{y}[k]$ и $\check{u}[k]$. Можно считать, что такой вид систем охватывает широкий класс встречающихся на практике задач идентификации в замкнутых контурах управления.

Сформулируем задачу идентификации системы (3.6.1), (3.6.2) в вариационной постановке. Перейдем к матричной записи, введя векторы траекторий (процессов)

$$y \doteq (y[1]; \ldots; y[N]), \qquad x \doteq (x[1]; \ldots; x[N]), \qquad u \doteq (u[1]; \ldots; u[N]),$$
$$\zeta \doteq (\zeta[1]; \ldots; \zeta[N]), \qquad \varphi \doteq (\varphi[1]; \ldots; \varphi[N])$$

и аналогично векторы $\check{y}$, $\check{u}$. Определим клеточно-теплицевые матрицы вида (1.4.3)

$$A \doteq (\backslash a \backslash), \qquad B \doteq (\backslash b \backslash), \qquad C \doteq (\backslash c \backslash), \qquad D \doteq (\backslash d \backslash).$$

Знаки коэффициентов уравнений учтены в записи клеточных строк a, b, c, d. Система (3.6.1), (3.6.2) примет вид

$$\begin{aligned} Ay + Bx + \zeta &= 0, \\ Cx + Dy + u &= 0, \\ \check{y} &= y + \varphi. \end{aligned}$$

Возмущения $\zeta[k]$ и $\varphi[k]$ по условию являются стационарными случайными последовательностями типа "авторегрессия — скользящее среднее", т. е. описываются уравнениями

$$A_\varphi \varphi + B_\eta \eta = 0, \qquad A_\zeta \zeta + B_\xi \xi = 0, \tag{3.6.3}$$
$$A_\varphi \doteq (\backslash a_\varphi \backslash), \qquad B_\eta \doteq (\backslash b_\eta \backslash), \qquad A_\zeta \doteq (\backslash a_\zeta \backslash), \qquad B_\xi \doteq (\backslash b_\xi \backslash).$$
$$\eta \in \mathbf{M}_2(0, \sigma_\eta^2 I_N), \qquad \xi \in \mathbf{M}_2(0, \sigma_\xi^2 I_N).$$

Введем вектор переменных $z \doteq (x; y; u; \zeta; \varphi; \eta; \xi)$. Обозначим матрицы знаменателей $A_y \doteq A$, $A_x \doteq C$. Уравнение системы (3.6.1), (3.6.2) с учетом введенных обозначений примет вид

$$\begin{pmatrix} B & A_y & & I & & & \\ A_x & D & I & & & & \\ & & & A_\zeta & & B_\eta & \\ & & & & A_\varphi & & B_\xi \end{pmatrix} z \doteq G_\theta z = 0, \tag{3.6.4}$$

$$\bar{z} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & & & & & \\ & I & & & & & \\ & & I & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 & I & \\ & & & & & & I \end{pmatrix} z \doteq Mz, \qquad \check{\bar{z}} \doteq \begin{pmatrix} \check{x} \\ \check{y} \\ \check{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем задачу вариационной идентификации параметров θ уравнения (3.6.4):

$$\theta_{\mathtt{V}} = \arg\min_{\theta} J(\theta), \qquad J(\theta) \doteq \min_{G_\theta z = 0} \|\check{\bar{z}} - Mz\|^2.$$

Существенное отличие от задачи (3.3.12) состоит в том, что 1) имеется матрица M, играющая роль "наблюдателя", с ненулевым правым нуль-пространством, 2) в вектор наблюдений $\check{\bar{z}}$ вставляются нулевые клетки напротив процессов $(\eta;\xi)$. При фиксированных известных матрицах B_η, B_ξ наличие нулевых клеток в векторе наблюдений принципиально не изменяет хода итераций А. О. Егоршина (3.7.27) (раздел 3.7.3). Численный пример приведен в разделе 3.7.5, где рассмотрена минимизация равносильной по состоятельности целевой функции ОР для случая нулевых клеток в векторе наблюдений.

Рассмотрим, к чему приводит включение в целевую функцию $J(\theta)$ матрицы M. Как и в разделе 3.1 на с. 128, на многообразии модельных траекторий $\mathcal{N}(G)$ введем базис $H\colon \mathcal{R}(H) = \mathcal{N}(G)$. Матрицу M подчиним естественному условию $\mathcal{N}(MH) = \{0\}$, т. е. матрица MH должна быть "негоризонтальная" полного ранга. Это можно понимать как условие "наблюдаемости" всех модельных траекторий z (оно отличается от классического условия наблюдаемости из определения 1.1.2). Из материала главы 1 (раздел 1.3) следует, что многообразие $\mathcal{R}(MH)$, как и $\mathcal{R}(H)$, является стационарной динамической моделью в смысле определения 1.1.1. Обозначим $\bar{G}$ РКТ-описание многообразия $\mathcal{R}(MH)$, т. е. $\mathcal{R}(MH) = \mathcal{N}\left(\bar{G}\right)$. Такое описание всегда существует ввиду теоремы 1.3.1. Тогда получаем равносильную задачу минимизации с целевой функцией уже без матрицы наблюдения:

$$\theta_{\mathtt{V}} = \arg\min_{\theta} \min_{\bar{G}_\theta \bar{z} = 0} \|\check{\bar{z}} - \bar{z}\|^2.$$

Если какие-то компоненты траектории измеряются точно, т. е. $\exists\, i\ \check{\bar{z}}_i = \bar{z}_i$, то в норме вводится весовая диагональная матрица с нулевыми элементами на i-м месте диагонали [42, 45] (см. раздел 3.7.1).

Оценки $\theta_{\mathtt{V}}$ равносильны по состоятельности скалярным оценкам ортогональной регрессии (ОРС)

$$\theta_{\mathtt{S}} = \arg\min_{\theta} \min_{\bar{G}_{\mathtt{S},\theta} \bar{z} = 0} \|\check{\bar{z}} - \bar{z}\|^2$$

(утверждение 3.4.1). Целевая функция ОРС всегда имеет не более $r(p+1)(r+m)$ экстремумов; в случае независимой параметризации уравнений число экстремумов равно $r(v+1)$ и задача минимизации распадается на r независимых задач скалярной ортогональной регрессии для разных уравнений (утверждение 3.3.4). Свойства глобальной сходимости итерационных процедур для этого случая хорошо изучены (раздел 3.7.3).

Следовательно, при вариационной постановке задачи идентификации проблемы большого числа локальных экстремумов, по крайней мере, в том виде, в котором ее сформулировал И. И. Перельман, не существует.

3.7 Приложение

3.7.1 Случай наблюдений с недиагональной матрицей дисперсий

Укажем, как модифицировать вариационную целевую функцию (3.3.12), (3.3.14) в случае наблюдений (3.2.1) с недиагональной матрицей дисперсии. Для упрощения обозначений ограничимся случаем $L = 1$. Целевые функции других вариантов орторегрессионных оценок (ОР, ОРМ, ОРС и т. п.) модифицируются аналогично.

Пусть $\eta = \Sigma\xi$, матрица $\Sigma \in \mathbb{R}^{(N-p)r\times l}$ имеет линейно независимые столбцы,

$$\check{z} = z_* + \Sigma\xi, \qquad \mathbf{M}\,\xi = 0, \qquad \mathbf{M}[\xi\xi^\top] = I. \tag{3.7.1}$$

Напомним, в случае $\Sigma = I$ вариационная целевая функция (3.3.12), приводящая к состоятельным оценкам, имеет вид

$$J(\theta) = \check{z}^\top \Pi_\theta \check{z}, \qquad \Pi_\theta \doteq G_\theta^\top \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta. \tag{3.7.2}$$

Как было показано в разделе 3.4, достаточными условиями состоятельности вариационной оценки $\hat{\theta} \doteq \arg\min_\theta J(\theta)$ являются 1) независимость следа матрицы Π_θ от параметров θ и 2) обращение слагаемого $\mathbf{M}\,z_*^\top \Pi_\theta z_*$ в ноль только при истинном значении параметра $\theta = \theta_*$:

$$\begin{aligned} J(\theta) \underset{L\to\infty}{\to} \mathbf{M}\,J(\theta) &= \mathbf{M}\,z_*^\top \Pi_\theta z_* + \mathbf{M}\,\xi^\top \Pi_\theta \xi \\ &= \mathbf{M}\,z_*^\top \Pi_\theta z_* + \mathrm{Sp}\,\Pi_\theta. \end{aligned}$$

Поскольку Π_θ — проектор, то его след равен его рангу; ввиду условия (ii) на с. 91 этот ранг постоянен, и состоятельность имеет место, если параметризация $\theta \to G_\theta$ различима (структурно идентифицируема), а носитель распределения процессов z_* содержит полное в смысле определений раздела 3.2 подмножество.

Модифицируем целевую функцию (3.7.2) так, чтобы сохранить состоятельность при неединичной матрице Σ. Несложно убедиться, что нашей цели удовлетворяет целевая функция

$$J_\Sigma \doteq \check{z}^\top G_\theta^\top \left(G_\theta \Sigma\Sigma^\top G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta \check{z}. \tag{3.7.3}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,J_\Sigma &= \mathbf{M}\,z_*^\top G_\theta^\top \left(G_\theta \Sigma\Sigma^\top G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta z_* + \mathrm{Sp}\,\underbrace{G_\theta^\top \Sigma^\top \left(G_\theta \Sigma\Sigma^\top G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta \Sigma}_{\Pi_\Sigma} \doteq \\ &\doteq \mathbf{M}\,z_*^\top G_\theta^\top C_\Sigma G_\theta z_* + \mathrm{Sp}\,\Pi_\Sigma, \end{aligned}$$

где Π_Σ — проектор постоянного ранга, а первое слагаемое обращается в ноль только при истинном значении параметров $\theta = \theta_*$.

Вычислим оценку $\hat{z}$ процесса z_*. Будем исходить из соотношения

$$J_\Sigma = \|\check{z} - \hat{z}\|_X^2, \tag{3.7.4}$$

где X — некоторая весовая матрица. Пусть сначала матрица $\Sigma\Sigma^\top$ в (3.7.1) неособенная. Из сравнения выражений (3.7.3) и (3.7.4) можем получить равенства

$$\begin{aligned} J_\Sigma &= (\check{z} - \hat{z})^\top \left(\Sigma\Sigma^\top\right)^{-1} (\check{z} - \hat{z}) = \\ &= \check{z}^\top G_\theta^\top \left(G_\theta \Sigma\Sigma^\top G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta \check{z} = \\ &= \underbrace{\check{z}^\top G^\top \left(G\Sigma\Sigma^\top G^\top\right)^{-1} G\Sigma\Sigma^\top}_{(\check{z}-\hat{z})^\top} \left(\Sigma\Sigma^\top\right)^{-1} \underbrace{\Sigma\Sigma^\top G^\top \left(G\Sigma\Sigma^\top G^\top\right)^{-1} G\check{z}}_{\check{z}-\hat{z}}, \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

что означает

$$\hat{z} = \left[I - \Sigma\Sigma^\top G^\top \left(G\Sigma\Sigma^\top G^\top\right)^{-1} G\right] \check{z}. \tag{3.7.6}$$

Пусть теперь матрица Σ ”вертикальная”, т. е. $l < (N-p)r$. Тогда в формуле (3.7.5) вместо обращения $\left(\Sigma\Sigma^\top\right)^{-1}$ следует использовать псевдообращение Мура—Пенроуза $\left(\Sigma\Sigma^\top\right)^{+}$, учитывая свойство $AA^+A = A$. Выражение (3.7.6) для оценки процесса сохраняет свою силу.

3.7.2 Линейные оценки в случае разбиения параметров на две группы

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \check{y} = F\chi_* + \eta_*, \\ W\chi_* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_* = W_\perp \varphi_*, \end{cases} \tag{3.7.7}$$

где F, W — заданные матрицы, $\ker F = 0$, $\ker W^\top = 0$; $\chi_* \in \mathbb{R}^t$ — вектор параметров; $\eta_* \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$ — случайная величина.

Оценка с линейным ограничением. Пусть $\chi = \chi(\check{y})$ — оценка χ_*, построенная по наблюдению $\check{y}$. Будем выбирать оптимальное значение χ исходя из условия минимума целевой функции $j(\chi) \doteq \|\check{y} - F\chi\|^2$ при ограничении $W\chi = 0$. Функция Лагранжа имеет вид

$$j^*(\chi, \lambda) = \|\check{y} - F\chi\|^2 + \lambda^\top W\chi.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} (\check{y} - F\chi)^\top F + \lambda^\top W = 0, \\ W\chi = 0. \end{cases}$$

Транспонируем первое уравнение:

$$\begin{cases} F^\top F\chi - F^\top \check{y} - W^\top \lambda = 0 \\ W\chi = 0. \end{cases} \tag{3.7.8}$$

Домножим первое уравнение слева на $W\left(F^\top F\right)^{-1}$:

$$W\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y} = (-)W\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top \lambda.$$

Выразим вектор множителей Лагранжа:

$$\lambda = (-)\left[W\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top\right]^{-1} W\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y}.$$

Наконец из уравнения (3.7.8) получим оптимальное значение χ:

$$\begin{aligned} \chi &= \left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y} - \left(F^\top F\right)^{-1} W^\top \left[W\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top\right]^{-1} W\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y} = \\ &= \left[I - \left(F^\top F\right)^{-1} W^\top \left[W\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top\right]^{-1} W\right]\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y} \doteq \\ &\doteq \Pi\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y}, \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

Заметим, что выражение

$$\Pi \doteq I - \left(F^\top F\right)^{-1} W^\top \left[W\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top\right]^{-1} W \tag{3.7.10}$$

описывает матрицу косого проецирования на подпространство $\mathcal{R}(W_\perp)$ вдоль подпространства $\mathcal{R}\left(\left(F^\top F\right)^{-1} W^\top\right)$ (см. раздел 6.5 с учетом подстановок $\overline{A}^\top = W$, $B = \left(F^\top F\right)^{-1} W^\top$ и равенств $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}\left(\overline{A}^\top\right) = \mathcal{R}(W_\perp)$).

Оценка без учета линейных ограничений. Будем выбирать оптимальное значение χ исходя из условия минимума целевой функции $j(\chi) = \|\check{y} - F\chi\|$, опуская ограничение $W\chi = 0$. Несмотря на неполный учет априорной информации, такая оценка останется состоятельной, как и оценка (3.7.9). Известно, что безусловный минимум $j(\chi)$ достигается при значении аргумента

$$\chi_1 = \left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y}. \tag{3.7.11}$$

Состоятельность и сравнение двух оценок. Для проверки состоятельности подставим в выражения для оценок (3.7.9), (3.7.11) правило генерации исходных данных (3.7.7):

$$\begin{aligned} \chi &= \Pi\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y} = \Pi\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \left(FW_\perp \varphi_* + \eta_*\right) = \\ &= \Pi W_\perp \varphi_* + \Pi\left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \eta_*. \end{aligned}$$

Учитывая определение проектора Π (3.7.10), имеем $\Pi W_\perp \varphi_* = W_\perp \varphi_*$, тогда

$$\begin{aligned} \chi &= W_\perp \varphi_* + \Pi \left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \eta_* = \\ &= \chi_* + \Pi \left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \eta_*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оценка χ является несмещенной, с дисперсией

$$D_\chi = \Pi \left(F^\top F\right)^{-1} \Pi^\top. \tag{3.7.12}$$

По закону больших чисел, эмпирическое среднее $\chi_L \doteq \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \chi_{(i)}$ оценок $\left\{\chi_{(i)}\right\}$, вычисленных по разным реализациям случайной величины $\check{y}$, сходится с вероятностью 1 (п.н.) при $L \to \infty$ к истинному значению χ_*. Таким образом, оценка χ_L состоятельна.

Оценка χ_1 (3.7.11) отличается от χ (3.7.9) отсутствием проецирующего сомножителя Π и имеет дисперсию $D_1 = \left(F^\top F\right)^{-1}$. Несложно повторить рассуждения и получить, что оценка $\chi_{1,L} \doteq \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \chi_{1,(i)}$ также, как и χ_L, состоятельна.

Поскольку матрица Π вырождена (будучи проектором на подпространство $\mathcal{R}\left(W_\perp\right)$, собственное в $\mathbb{R}^{N(r+m)}$), то вырождена и матрица дисперсий D_χ, т. к. все оценки χ расположены в подпространстве $\mathcal{R}\left(W_\perp\right)$. Справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} \Pi \left(F^\top F\right)^{-1} \Pi^\top &\leqslant \left(F^\top F\right)^{-1}, \\ D_\chi &\leqslant D_1. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка χ, учитывающая линейные ограничения, в среднем меньше уклоняется от неизвестного истинного значения χ_*, чем упрощенная оценка χ_1. Но это простое наблюдение малоинтересно.

Частный случай разделения параметров на две группы. Выделим в векторе параметров χ_* две группы компонент $\chi_* \doteq (\theta_*; w_*)$ и соответственно разделим на две группы столбцов матрицу $F \doteq (K, L)$, так что $F\chi_* = K\theta_* + Lw_*$. Будем считать, что линейные ограничения наложены только на w_*: $Mw_* = 0$. Как и раньше, оцениваться будут параметры из обеих групп θ_*, w_* (то есть весь вектор χ_*), но нас будет интересовать только дисперсии оценок подпараметра θ_*, точнее, зависимость дисперсий от того, учитываются ли при получении оценок линейные ограничения, наложенные на w_*. Таким образом, параметры w_* в этом смысле являются вспомогательными, вторичными*) по отношению к θ_*.

Система уравнений объекта (3.7.7) с учетом разделения χ_* на две группы парамет-

*) В литературе употребляется термин “nuisance” (“мешающие” параметры) [152]; такое название представляется не очень точным: в ряде случаев без оценки w совместно с θ оценка θ может оказаться несостоятельной, т. е. возможность оценить параметры w не мешает, а наоборот, помогает.

ров принимает вид:

$$\begin{cases} \check{y} = F\chi_* + \eta_* = K\theta_* + Lw_* + \eta_*, \\ Mw_* = 0. \end{cases} \tag{3.7.13}$$

Будем сравнивать две модели "объекта" (3.7.13) — полную:

$$\begin{cases} y = K\theta + Lw + \eta, \\ Mw = 0. \end{cases} \tag{3.7.14}$$

— и упрощенную:

$$y = K\theta + Lw + \eta. \tag{3.7.15}$$

Заметим, что случай (3.7.13) соответствует матрице ограничений

$$W = (0, M)\,. \tag{3.7.16}$$

Вычислим дисперсию оценки θ по модели (3.7.14) и покажем, что она невырождена, в отличие от матрицы дисперсии всего вектора χ. Покажем, что если опустить условие $Mw = 0$, перейдя к упрощенной модели (3.7.15), то дисперсия оценки θ может только увеличиться.

Теорема 3.7.1. *Пусть* $\theta = (I, 0)\,\chi$,

$$\chi \doteq (\theta; w) = \arg\min_{Mw=0} j(\chi), \qquad j(\chi) \doteq \|\check{y} - F\chi\|^2,$$

где данные $\check{y}$ *получены из системы* (3.7.13). *Строки матрицы* M *линейно независимы, и столбцы матрицы* F *линейно независимы. Тогда случайная величина* θ *имеет строго положительно определенную матрицу дисперсии* $D_\theta > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$\left(F^\top F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} K^\top K & K^\top L \\ L^\top K & L^\top L \end{pmatrix}^{-1} \doteq \begin{pmatrix} \Phi_{\theta\theta} & \Phi_{\theta w} \\ \Phi_{w\theta} & \Phi_{ww} \end{pmatrix} \doteq \Phi. \tag{3.7.17}$$

Поскольку $\theta = (I, 0)\,\chi$, то имеем $D_\theta = (I, 0)\,D_\chi\,(I; 0)$, где матрица D_χ определена выражениями (3.7.12), (3.7.10), (3.7.16). Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} D_\theta &= \Phi_{\theta\theta} - (I, 0)\,\Phi W^\top \left(W\Phi W^\top\right)^{-1} W\Phi\,(I; 0) = \\ &= \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w} M^\top \left(M\Phi_{ww} M^\top\right)^{-1} M\Phi_{w\theta}. \end{aligned} \tag{3.7.18}$$

Воспользуемся формулой Фробениуса для обращения клеточных матриц [23, с. 56]:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\theta\theta} & \Phi_{\theta w} M^\top \\ M\Phi_{w\theta} & M\Phi_{ww} M^\top \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w} M^\top \left[M\Phi_{ww} M^\top\right]^{-1} M\Phi_{w\theta}\right)^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Матрица в левой части равенства может быть представлена в виде произведения:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\theta\theta} & \Phi_{\theta w} M^\top \\ M\Phi_{w\theta} & M\Phi_{ww} M^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \left(F^\top F\right)^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M^\top \end{pmatrix}.$$

В силу линейной независимости строк M и линейной независимости столбцов F эта матрица строго положительно определена, вместе со всеми своими квадратными диагональными подматрицами. Отсюда следует строгая положительная определенность диагональной клетки

$$D_\theta = \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{\theta w} M^\top \left(M\Phi_{ww} M^\top\right)^{-1} M\Phi_{w\theta} > 0.$$

Теорема доказана. □

Теорема 3.7.2. *В условиях теоремы 3.7.1, пусть* $\theta_1 \doteq (I,0)\,\chi_1$,

$$\chi_1 \doteq (\theta_1; w_1) = \arg\min j(\chi) = \left(F^\top F\right)^{-1} F^\top \check{y}.$$

Тогда дисперсия D_1 *оценки* θ_1 *не меньше* D_θ *, и равенство* $D_1 = D_\theta$ *достигается только и только тогда, когда* $\operatorname{im} K \cap \operatorname{im} L = 0$ *, т. е.* $K^\top L = 0$.

Доказательство. В силу соотношения $\theta_1 = (I,0)\,\chi_1$, учитывая, что дисперсия χ_1 равна $\left(F^\top F\right)^{-1}$, получаем $D_1 = (I,0)\left(F^\top F\right)^{-1}(I;0) = \Phi_{\theta\theta}$. Сравнение с выражением (3.7.18) приводит к неравенству $D_1 \geqslant D_\theta$. Необходимым и достаточным условием равенства $D_1 = D_\theta$ является $F_{\theta w} = 0$ или $K^\top L = 0$, что следует из определения F (3.7.17). Теорема доказана. □

3.7.3 Минимизация вариационных целевых функций

Опишем эвристический алгоритм Егоршина—Осборна [40, 42, 218] минимизации функционала ВМ (3.3.12). Осборн применял этот алгоритм для поиска решения в случае однородных уравнений ($m = 0$, $r = 1$) [219, 220].

Чтобы показать идею алгоритма, рассмотрим задачу ортогональной регрессии (0.0.9), (0.0.10) при $N = 1$. Введем модельное уравнение:

$$\gamma^\top v = 0, \qquad v \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \qquad \gamma \doteq \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\theta \end{smallmatrix} \right). \tag{3.7.19}$$

При каждом фиксированном значении параметра θ все решения v модельного уравнения образуют гиперплоскость $\mathcal{M}_\theta \subset \mathbb{R}^p$ с вектором нормали $\gamma = \gamma(\theta)$.

Пусть даны наблюдения $\check{v}_{(1)}, \ldots, \check{v}_{(L)}$ как L точек в $\mathbb{R}^p$. Величины $\check{v}_{(i)}^\top$ являются строками в матрице $\check{V} \doteq \begin{pmatrix} \check{v}_1 & \ldots & \check{v}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L\times p}$ из (0.0.10). Заметим, что место N теперь занимает L . Формально можно было бы положить $L = N$, но переменные L и

N имеют разный смысл: N есть длина отдельной траектории (процесса) как решения уравнения динамической системы, а L есть число несвязанных между собой траекторий с различными начальными условиями. Если порядок системы нулевой, число N играет роль числа несвязанных траекторий, поэтому естественно использовать вместо N число L, положив $N = 1$.

Согласно (0.0.9) требуется найти значение параметра $\hat{\theta}$, минимизирующее сумму квадратов расстояний $\rho^2_{(i)} \doteq \rho^2(\theta, \check{v}_{(i)})$ от гиперплоскости $\mathcal{M}_\theta$ до точек наблюдений:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{p-1}} \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} \rho^2_{(i)}, \qquad \rho^2_{(i)} = \min_{\gamma^\top v_{(i)} = 0} \|\check{v}_{(i)} - v_{(i)}\|^2. \tag{3.7.20}$$

Имея в виду определение матрицы $\check{V}$, можем написать

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{p-1}} \min_{\substack{V\gamma = 0 \\ \gamma = d + D\theta}} \|\check{V} - V\|^2.$$

При $d = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right)$ это задача (0.0.9).

Напомним решение. Имеем задачу двухэтапной минимизации. На первом этапе находим решения $\hat{v}_{(i)}$ модельного уравнения (3.7.19), наиболее близкие к наблюдениям:

$$\hat{v}_{(i)} = \arg \min_{\gamma^\top v = 0} \|\check{v}_{(i)} - v\|^2.$$

Векторы $\hat{v}_{(i)}$ можно назвать аппроксимациями векторов наблюдений $\check{v}_{(i)}$ с точки зрения модели $\gamma^\top v = 0$. Решение этой задачи условной минимизации ищется стандартным способом с помощью множителей Лагранжа, в результате получим:

$$\hat{v}_{(i)} = \left(I - \frac{\gamma\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma} \right) \check{v}_{(i)}.$$

Как видим, $\hat{v}_{(i)}$ есть проекция $\check{v}_{(i)}$ на гиперплоскость с нормалью γ. Матрицы $(I - \Pi_\gamma)$ и $\Pi_\gamma \doteq \frac{\gamma\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma}$ суть матрицы проекторов со свойством $\Pi^2 = \Pi$. Искомые квадраты расстояний соответственно равны

$$\rho^2_{(i)} = \|\check{v}_{(i)} - \hat{v}_{(i)}\|^2 = \check{v}^\top_{(i)} \frac{\gamma\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma} \check{v}_{(i)}.$$

На втором этапе находим оценку $\hat{\theta}$ как аргумент минимального значения суммы квадратов расстояний

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} J(\theta), \tag{3.7.21}$$

$$J(\theta) = \tfrac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \check{v}^\top_{(i)} \frac{\gamma\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma} \check{v}_{(i)} = \tfrac{1}{L} \frac{\gamma^\top \check{V}^\top \check{V} \gamma}{\gamma^\top\gamma}, \qquad \check{V} \doteq \begin{pmatrix} \check{v}^\top_{(1)} \\ \vdots \\ \check{v}^\top_{(L)} \end{pmatrix}. \tag{3.7.22}$$

Целевая функция $J(\theta)$ однородна по γ (т. е. не зависит от нормы γ). При $\gamma \doteq \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\theta \end{smallmatrix}\right)$

задача равносильна минимизации по вектору нормали γ с условием $(10\ldots0)\gamma = 1$:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{(10\ldots0)\gamma=1} \tfrac{1}{L}\frac{\gamma^\top \check{V}^\top \check{V}\gamma}{\gamma^\top\gamma}. \tag{3.7.23}$$

Имеет место следующее утверждение, идея которого почти очевидна. Оно устанавливает условие, при котором задачи с линейными ограничениями типа равенств с целевыми функциями, не зависящими от нормы γ, равносильны задачам на собственные направления. Для случая скалярных ($r = 1$) однородных ($m = 0$) моделей это утверждение приводилось в статье [220]. Приведем доказательство для удобства читателя.

Утверждение 3.7.1. *Пусть ненулевой вектор $e \in \mathbb{R}^{p+1}$ не перпендикулярен собственным векторам матрицы $V^\top V$, другими словами, равенство $V^\top V\gamma = \mu\gamma$ влечет $e^\top\gamma \neq 0$; и пусть $J(\gamma) \doteq \frac{\gamma^\top V^\top V\gamma}{\gamma^\top\gamma}$. Тогда*:
1) *Следующие две задачи условной минимизации эквивалентны*:

$$\min_{e^\top\gamma=1} J(\gamma) = \min_{\gamma^\top\gamma=1} J(\gamma).$$

2) *Экстремальные направления $J(\gamma)$ совпадают с собственными векторами матрицы $V^\top V$. Значения $J(\gamma)$ на экстремальных направлениях совпадают со значениями собственных чисел $V^\top V$.*

Доказательство. Второе утверждение широко известно [58, 105, с. 65]. Для доказательства первого достаточно убедиться, что обе задачи приводят к одному и тому же условию на экстремальные точки. Имеем функции Лагранжа

$$J_1^* = J(\gamma) + \lambda_1(e^\top\gamma - 1), \qquad J_2^* = J(\gamma) + \lambda_2(\gamma^\top\gamma - 1).$$

Условия на экстремальные точки имеют вид:

$$\begin{cases} (J_1^*)'_\gamma = J'_\gamma + \lambda_1 e^\top = 0, & e^\top\gamma = 1, \\ (J_2^*)'_\gamma = J'_\gamma + 2\lambda_2\gamma^\top = 0, & \gamma^\top\gamma = 1. \end{cases} \tag{3.7.24}$$

Заметим, что $J(\gamma)$ зависит только от направления γ и не зависит от нормы γ, тогда производная J'_γ как вектор должна быть перпендикулярна направлению γ: $J'_\gamma\gamma = 0$. Действительно,

$$J'_\gamma\gamma = \left[\frac{2\gamma^\top V^\top V}{\gamma^\top\gamma} - \frac{2\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma}\,J(\gamma)\right]\gamma = 0.$$

Умножим оба уравнения (3.7.24) справа на γ, получим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и одно и то же уравнение на экстремальные направления γ

$$J'_\gamma = \frac{2\gamma^\top V^\top V}{\gamma^\top\gamma} - \frac{2\gamma^\top}{\gamma^\top\gamma}\,J(\gamma) = 0,$$

из которого следует условие $\big(J(\gamma)I - V^\top V\big)\gamma = 0$. Значит, γ является собственным вектором матрицы $V^\top V$, что в силу условия на вектор e гарантирует разрешимость уравнения $e^\top\gamma = 1$. Подстановкой $V^\top V\gamma = \mu\gamma$ убеждаемся, что значения $J(\gamma)$ на экстремальных направлениях совпадают со значениями собственных чисел матрицы $V^\top V$. Утверждение доказано. □

Следствие. *Целевая функция (3.7.23) метода ОР при $r = 1$ имеет ровно $v+1$ экстремумов, где v — размерность вектора параметров θ.*

Из утверждения 3.7.1 следует, что при условии неособенности матрицы $\check{V}^\top\check{V}$ поиск минимума в (3.7.23) может быть осуществлен стандартным алгоритмом поиска минимального (соответствующего минимальному собственному числу) собственного вектора [34] матрицы $\check{V}^\top\check{V}$ с приведением последнего элемента к единице:

$$\gamma_{(k)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{(k)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \tau \doteq \left(\check{V}^\top\check{V}\right)^{-1}\gamma_{(k)}, \\ \gamma_{(k+1)} = \frac{1}{(10...0)\tau}\tau. \end{cases} \tag{3.7.25}$$

Теперь, после изложения идеи, усложним задачу минимизации. Наложим ограничение $\gamma = D\theta + d$, где матрица D и вектор d заданы, составная матрица $(d, D) \doteq \widetilde{D}$ имеет линейно независимые столбцы. Обозначим $\begin{pmatrix} 1 & \theta^\top \end{pmatrix} \doteq \vartheta^\top$, тогда $\gamma = \widetilde{D}\vartheta$. Задача (3.7.23) принимает вид

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}^p} \frac{1}{L}\frac{\vartheta^\top\widetilde{D}^\top\check{V}^\top\check{V}\widetilde{D}\vartheta}{\vartheta^\top\widetilde{D}^\top\widetilde{D}\vartheta} \doteq \arg\min_{(10...0)\vartheta=1} J(\vartheta), \qquad J(\vartheta) \doteq \frac{\vartheta^\top A\vartheta}{\vartheta^\top B\vartheta}.$$

Как и в доказательстве утверждения 3.7.1, несложно показать (см. также [220]), что задача равносильна минимизации $J(\vartheta)$ на сфере $\vartheta^\top\vartheta = 1$ и условием экстремума является уравнение

$$J'_\vartheta = \frac{2\vartheta^\top}{\vartheta^\top B\vartheta}\left(A - J(\vartheta)B\right) = 0.$$

Разложим неособенные симметричные матрицы A, B в произведения квадратных матриц $A = A^{\top/2}A^{1/2}$, $B = B^{\top/2}B^{1/2}$. Введем вектор $\omega \doteq B^{1/2}\vartheta$. Тогда условие экстремума равносильно уравнению

$$\left(J(\omega)I - Q\right)\omega = 0, \qquad Q \doteq B^{-\top/2}AB^{-1/2}.$$

Экстремальными направлениями ω являются собственные векторы матрицы Q, и экстремальными значениями $J(\omega)$ являются собственные числа Q. Алгоритм минимизации с учетом определения Q имеет вид

$$\begin{cases} \tau \doteq Q^{-1}\omega_{(k)}, \\ \omega_{(k+1)} = \tau/\|\tau\|, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \tau \doteq A^{-1}B\vartheta_{(k)}, \\ \vartheta_{(k+1)} = \tau/\|\tau\|. \end{cases} \tag{3.7.26}$$

Ввиду того, что целевая функция $J(\vartheta)$ не зависит от нормы ϑ, в последнем равенстве можно проводить нормирование, приводя последний элемент ϑ к единице: $\vartheta_{(k+1)} = \frac{1}{(10...0)\tau}\tau$. Тогда вектор γ вычисляется из уравнения $\gamma = \widetilde{D}\vartheta$.

Перейдем к итерациям Егоршина—Осборна. Целевая функция (3.3.12) в принятых обозначениях имеет вид:

$$J(\theta) \doteq J_{\mathsf{V}}(\vartheta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C(\vartheta) \check{V} \widetilde{D} \vartheta.$$

Учитывая определение $C(\vartheta) = \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1}$ несложно увидеть, что $J_{\mathsf{V}}(\vartheta)$ не зависит от нормы $\|\vartheta\|$. Тогда можно предложить алгоритм минимизации $J_{\mathsf{V}}(\vartheta)$, по идее близкий к алгоритму 3.7.26:

$$\vartheta_{(k)} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{(k)} \end{pmatrix}, \qquad Q_{(k)} \doteq \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C_{(k)} \check{V} \widetilde{D},$$

$$\begin{cases} \tau \doteq Q_{(k)}^{-1} \widetilde{D}^\top \widetilde{D} \vartheta_{(k)}, \\ \vartheta_{(k+1)} = \frac{1}{(10...0)\tau} \tau. \end{cases} \tag{3.7.27}$$

Основное отличие от итераций поиска минимального собственного вектора состоит в пересчете на каждом шаге обращаемой матрицы $Q_{(k)}$. Для итераций 3.7.27 А. О. Егоршиным [40, 42] было предложено название ИП СВ ("итерационная процедура собственного вектора").

Численные расчеты [30, 70, 83] показывают высокую скорость сходимости ИП СВ и малую зависимость от начального приближения. Локальные свойства сходимости алгоритма Егоршина—Осборна исследовались в [30]. Проблема теоретического обоснования глобальных свойств сходимости ИП СВ до сих пор остается открытой.

3.7.4 Численный пример

Кратко опишем особенности программной реализации вариационного метода (3.3.12). Комплекс программ занимает на внешнем носителе до 1 Мб. Объем оперативной памяти зависит от сложности модели. Его оценку можно сделать по формуле:

$$100 * PSr + 16 * NSr + 24 * NS + 16 * PSrv +$$

$$+8 * PSr * PSr + 16 * PS * PS * r + 100.000 \quad \text{байт},$$

где $P \doteq p + 1$ — порядок уравнений $+1$, $S \doteq m + r$ — число сигналов, r — число уравнений, N — длина траектории, v — число оцениваемых параметров.

Объем памяти для некоторых значений p, m, r, N, v приведен в табл. 1.

Таблица 1

p	m	r	N	v	память
6	3	5	500	10	1500 K
6	3	5	*	10	1100 K
4	3	1	500	10	200 K
4	3	1	*	10	150 K

Значком $*$ отмечен более медленный режим работы без полного занесения обрабатываемой траектории с внешнего носителя в оперативную память. В этом случае длина траектории N не ограничена.

Время получения оценок для нижеследующего примера на вычислителе PC-AT-386 по участку траектории длиной 1.5 с составляет 7–9 с. При отключении совместного с идентификацией оценивания сигналов время уменьшается до 2–3 с. Дальнейшее сокращение в 3–5 раз может быть достигнуто написанием программ на языке низкого уровня и распараллеливанием алгоритмов. Это говорит о возможности вычислений в реальном времени, при мощности вычислителя около 2 млн. операций в секунду и оперативной памяти 0.5–2 Мб (в зависимости от сложности модели). В отсутствие измерительных возмущений алгоритм сходится к истинным значениям параметров за один шаг, независимо от начального приближения.

Приведем результаты идентификации вариационным методом системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dot{\alpha} & = & c_\alpha \alpha & + & \omega & + & c_\varphi \varphi \\ \dot{\omega} & = & m_\alpha \alpha & + & m_\omega \omega & + & m_\varphi \varphi \end{array} \right. \qquad (3.7.28)$$

В качестве наблюдения $(L = 1)$ принимался отрезок траектории, построенный методом Эйлера по системе (3.7.28) с эталонными значениями коэффициентов c_α, c_φ, m_α, m_ω, m_φ (см. табл. 2). Начальные условия нулевые. Входные сигналы двух типов: а) N-образная перекладка на протяжении половины интервала наблюдения (метка "п" в табл. 2) и б) сигнал из замкнутого контура стабилизирующего управления (метка "к" в табл. 2). Длина обрабатываемого участка равна 1.5 с — десятой доле характерного времени переходного процесса. Дискретность — 50 точек на интервале наблюдения.

Нормальные возмущения моделировались датчиком псевдослучайных чисел. Относительное среднеквадратическое отклонение шума, добавленного к сигналам α, ω, φ, составляло $\sigma =$5, 20 и 100%.

В случае $\sigma =$100% начальные значения параметров выбирались из интервала $[-20.; 20.]$. Скорость сходимости алгоритма — 6–12 итераций. С уменьшением амплитуды шума в пять раз ($\sigma =$20%) итерационный процесс идет устойчиво для начальных значений из интервала $[-200.; 200.]$. Скорость сходимости — 5–8 итераций.

Принудительное сокращение числа итераций до 3-х ухудшает свойства оценок незначительно — менее, чем на 1%.

При 50 различных реализациях шума были вычислены статистика Стьюдента t [52] и с. к. о. Σ оценок параметров:

$$t = (\bar{X} - E) * n^{1/2} / \Sigma ,$$

$$\Sigma = [D/(n-1)]^{1/2}, \quad n = 50 ,$$

где $\bar{X}$ — среднее значение оценки параметра, D — сумма квадратов отклонений оценки от среднего значения, E — истинное значение параметра. Для сравнения были вычислены характеристики оценок линейного метода наименьших квадратов (МНК). Полученные результаты сведены в табл. 2. Рядом с каждым значением модуля статистики t через знак дроби (/) указан уровень значимости p в предположении нормальности распределения оценок (по табл. 5 из [52]).

Таблица 2

	Параметр					Метод оценивания	Тип входного сигнала	σ, %
	c_α	c_φ	m_α	m_ω	m_φ			
Эталон, E	−0.086	−0.0072	−0.860	−0.049	−0.830			
$\lvert t\rvert/p$	1.0/0.3	0.2/0.8	1.2/0.2	0.6/0.5	0.6/0.6	ВМ	п	100
	0.03/0.9	0.5/0.6	1.8/ ∗	1.6/0.1	7.0/ ∗	МНК		
	0.09/0.9	0.1/0.9	0.3/0.8	0.9/0.4	0.6/0.5	ВМ	к	
	0.08/0.9	1.1/0.3	0.15/0.9	0.7/0.5	3.1/ ∗	МНК		
	0.04/0.9	0.7/0.5	0.8/0.4	0.7/0.5	0.2/0.9	ВМ	п	20
	0.06/0.9	0.03/0.9	2.0/ ∗	1.0/0.3	4.8/ ∗	МНК		
	0.2/0.9	0.5/0.6	1.2/0.2	1.4/0.2	0.03/0.9	ВМ	к	
	0.7/0.5	1.7/ ∗	0.1/0.9	0.4/0.7	2.5/ ∗	МНК		
	0.1/0.9	1.1/0.3	0.8/0.4	0.6/0.5	0.1/0.9	ВМ	п	5
	0.3/0.8	0.5/0.6	0.6/0.5	0.6/0.5	1.6/0.1	МНК		
	0.2/0.9	0.5/0.6	1.2/0.2	1.4/0.2	0.2/0.8	ВМ	к	
	0.8/0.4	1.8/ ∗	0.9/0.4	0.8/0.4	0.7/0.5	МНК		
Σ	0.5	0.10	1.8	0.90	0.24	ВМ	п	100
	1.0	0.25	6.2	0.93	0.49	МНК		
	0.44	0.14	1.5	1.1	0.38	ВМ	к	
	0.87	0.81	4.7	2.3	1.30	МНК		
	0.09	0.019	0.32	0.18	0.046	ВМ	п	20
	0.12	0.026	0.64	0.18	0.058	МНК		
	0.08	0.029	0.26	0.19	0.073	ВМ	к	
	0.21	0.070	0.70	0.43	0.120	МНК		
	0.022	0.0046	0.079	0.045	0.012	ВМ	п	5
	0.026	0.0051	0.099	0.047	0.014	МНК		
	0.020	0.0074	0.067	0.047	0.018	ВМ	к	
	0.051	0.0120	0.130	0.078	0.024	МНК		

В таблице приведены экспериментальные статистические свойства оценок вариационного метода (ВМ) и линейного метода наименьших квадратов (МНК). Обозначения даны по тексту. Значок «*» соответствует уровню значимости $p < 0.1$.

Как видно из таблицы, для оценок ВМ модуль t не превосходит величины 1.4, что соответствует уровню значимости $p \geqslant 0.2$. Это говорит в пользу несмещенности оценок вариационного метода. Для оценок МНК такого вывода сделать нельзя.

За одним исключением, с. к. о. оценок ВМ в 1.1–10 раз меньше с. к. о. оценок МНК.

Увеличение длины записи в 2 раза — до 1/5 времени переходного процесса — уменьшает смещения и с. к. о. оценок ВМ c_α, m_α, m_φ в 1.5–2 раза, свойства оценок c_φ, m_ω при этом не улучшаются (при входном сигнале типа "к" и σ =20%).

3.7.5 Пример итераций ОР в задаче с нулевыми компонентами вектора наблюдений

Приведем текст программы на языке вычислительной среды Scilab [5] для демонстрации вариационного метода (3.3.12) в задаче с возмущением в невязке. Эта задача сводится к вариационной задаче (3.3.12) с нулевыми компонентами вектора наблюдений $\check{z}$.

Параметры уравнения (3.1.1): $p = 2$, $r = 1$, $m = 0$, $N = 100$. Число траекторий $L = 1$. Уравнение идентифицируемого объекта:

$$z^*[k+2] + \gamma_1^* z^*[k+1] + \gamma_0^* z^*[k] = c^* e^*[k], \qquad e[k] \in \mathbf{N}(0, \sigma^2),$$

$\sigma = 0.1$, $c^* = 0.1$. Вектор оцениваемых параметров: $\theta = (\gamma_0; \gamma_1)$. Значения γ_i^* истинных параметров выбраны исходя из желаемого вида решения при $e^*[k] = 0$:

$$z[k] = A \exp(-k/50) \cdot \sin(4\pi * k/50 + \varphi_0), \qquad k \in \overline{1, 100}.$$

Матричная запись уравнения объекта:

$$G^* z^* + c^* I e^* = 0,$$

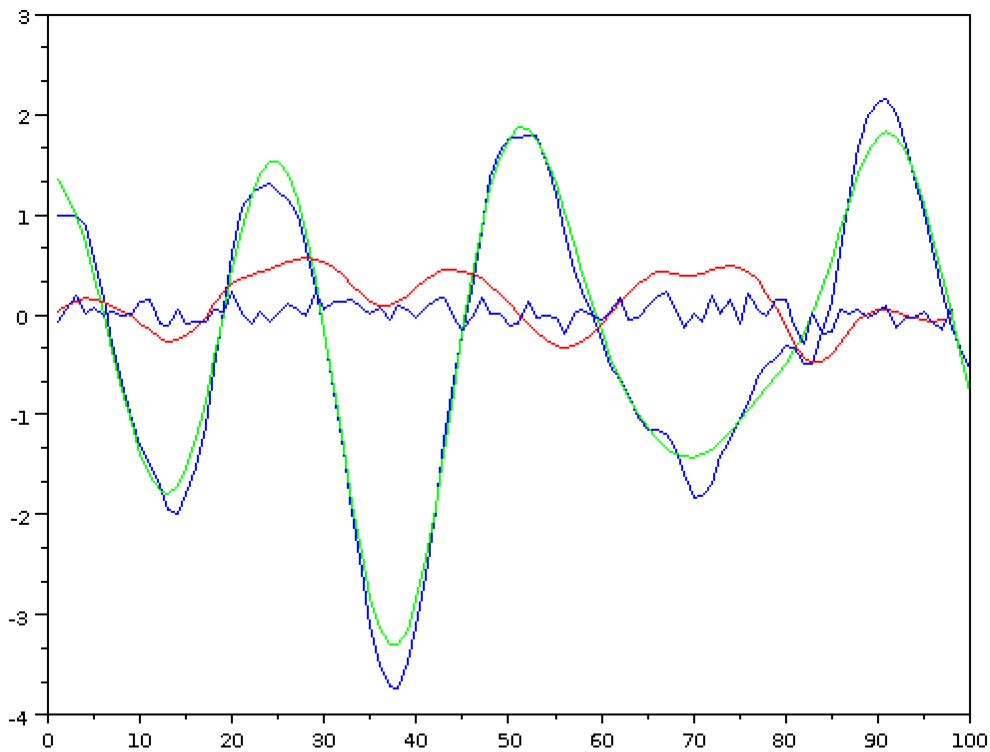
матрица $G^* = G_{\theta^*}$ представлена в (0.0.15). Матрица модели: $A = (G_\theta, c^* I)$. Вектор процесса модели: $y = \left(\begin{smallmatrix} z \\ e \end{smallmatrix}\right)$. Целевая функция:

$$J(\theta) = \min_{A_\theta y = 0} \|\check{y} - y\|^2.$$

Наблюдения: $\check{y} = \left(\begin{smallmatrix} \check{z} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\check{z} = z^* + \eta$. В тексте программы $\eta = 0$. Оптимальное значение (оценка) процесса: $\hat{y} = \left(I - A^\top \left(AA^\top\right)^{-1} A\right) \check{y} \doteq \left(\begin{smallmatrix} \hat{z} \\ \hat{e} \end{smallmatrix}\right)$.

```
// Scilab
N=100;
// К-ты диф. уравнения
p=2; c=0.1; // к-т при невязке в уравнении
sigma_e=0.1; // амплитуда (с.к.о.) невязки при моделировании (до 2.0)
a=-1/50; b=2*%pi*2/50; g1=-2*a; g0=a^2+b^2; g=[g0;g1;1];
// Интервал дискретизации
```

```
tau=1;
// К-ты разностного уравнения
T=[1 -tau tau^2/2 ; 1 0 0; 1 tau tau^2/2 ]; gamma=inv(T')*g;
gamma=gamma/gamma(length(gamma));
// Моделирование наблюдений
z=zeros(N)'; z(1)=1; z(2)=1; em=zeros(N-p)';
for k=1:N-p
em(k)= grand(1,1,'nor', 0, sigma_e);
z(k+p)=-gamma(1:length(gamma)-1)'*z(k:k+p-1) - em(k);
end
// Дополнение наблюдений нулями
xm = [z;zeros(N-p,1)];
// Матрица разностной системы
row=[gamma' zeros(1,N-p-1) ] ; col=[gamma(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row);
A=[G c*eye(N-p,N-p)];
// Проектор на подпространство решений системы
C = inv(A*A'); Pi = eye(A'*A) - A'*C*A;
// Оценка траектории
xp = Pi * xm; zp = xp (1:N); ep = xp (N+1:N+N-p);
//// Итерации по параметрам:
// Матрица наблюдений:
V=zeros(N-p,p+1); for k=1:p+1 V(:,k)=z(k:N-p-1+k); end
// Начальное значение параметров:
theta=[g0;g1] //[1;1]; // [g0;g1];
v=2; // (размерность theta)
phi=[theta;1];
// Связь коэффициентов с параметрами:
Dg=[ 1 0; 0 1; 0 0]; dg=[0;0;1]; D=inv(T')*Dg; d=inv(T')*dg; Dv=[D,d];
D0=[D;zeros(1,v)]; d0=[d;c];
Dv0=[D0,d0];
// Матрицы для итераций ОР:
P=Dv'*V'*V*Dv; Pinv=inv(P); B=Dv0'*Dv0;
// итерации:
for k=1:10 tt = Pinv*B*phi; phi = tt/tt(length(tt)); phi' end
// эталон:
etalon=[g0 g1 1]
// оценка траектории по оценкам параметров:
gamma=Dv*phi; row=[gamma' zeros(1,N-p-1) ] ; col=[gamma(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); A=[G c*eye(N-p,N-p)]; C = inv(A*A'); Pi = eye(A'*A) - A'*C*A;
xp = Pi * xm; zp = xp (1:N); ep = xp (N+1:N+N-p);
plot(z); plot(zp,'g'); plot(ep,'r'); plot(em,'b')
// конец программы
```



На рисунке зеленым и красным отображены оценки процесса $\hat{z}$ и невязки $\hat{e}$, синим — наблюдения $\check{z}$ и процесс невязки e.

Начальное приближение вектора параметров $\left(\theta^{\top},1\right)$:

1 1 1

Итерации ИП СВ (раздел 3.7.3):

0.0502308 0.0123312 1.

0.0497862 - 0.0003573 1.

0.0497858 - 0.0004678 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

0.0497858 - 0.0004688 1.

Эталон $\left(\theta^{*\top},1\right) = (\gamma_0^*,\gamma_1^*,1)$:

0.0635655 0.04 1.

3.7.6 Проверка состоятельности (к теореме 3.4.1)

Приведем текст программы на Scilab для численной проверки состоятельности оценок ВМ в пределе $L \to \infty$. Система та же, что и в предыдущем разделе 3.7.5, но без шума в невязке: $e^* = 0$, $c^* = 0$. Усреднение производится по $M = 50$ реализациям шума (при $M = 500$ результаты примерно те же). Эталонные значения параметров: $\theta_1^* = 0.0636$, $\theta_2^* = 0.004$. Остальные детали расчетов видны из текста программы.

```
// Исследуется зависимость дисперсии и смещения оценок от L
// L меняется от 1 до Lmax.
// Для каждого L проводится стандартный эксперимент по числу реализаций шума
// от 1 до M с накоплением среднего и с.к.о. оценок параметров
//Длина траектории (40)
N=40;
// амплитуда (с.к.о.) ошибок наблюдений
sigma=1;
// Число реализаций шума для вычисления с.к.о. и среднего оценок (50)
M=50;
// К-ты диф. уравнения (эталон)
p=2; //(порядок уравнения)
a=-1/50; b=2*%pi*2/50; g1=-2*a; g0=a^2+b^2; g=[g0;g1;1];
// Интервал дискретизации
tau=1;
// К-ты разностного уравнения (эталон)
T=[1 -tau tau^2/2 ; 1 0 0; 1 tau tau^2/2 ]; // (тейлоровская матрица)
gamma0=inv(T')*g;
gamma0=gamma0/gamma0(length(gamma0));
v=2; // (размерность theta)
theta_etalon=[g0;g1]; // (эталон параметров)
// Начальное значение параметров:
theta0=[1;1]; //[1;1]; // [g0;g1];
// Связь коэффициентов разн. уравнения с параметрами:
Dg=[1 0; 0 1; 0 0]; dg=[0;0;1]; // матрицы перехода от theta к диф.уравн.g
D=inv(T')*Dg; d=inv(T')*dg; // матрицы перехода от theta к разн.уравн. gamma0,1
Dv=[D,d];
// Число отрезков траекторий
L=480;
//// Стат. эксперимент для данного значения L
z_all=zeros(N,1);// (накопитель отрезков траекторий)
//накопится матрица размера (N,L+1) (первый столбец нулевой)
for l=1:L // насчитывание L отрезков траекторий без шума
z=zeros(N,1);
// Случайные нач. условия
z(1)=grand(1,1,'nor', 0, 2);
z(2)=grand(1,1,'nor', 0, 2);
for k=1:N-p z(k+p)=-gamma0(1:length(gamma0)-1)'*z(k:k+p-1);
end//k
z_all=[z_all, z];
end//l (конец цикла насчитывания отрезков траекторий)
```

```
// Цикл по разным реализациям шума
// Накопитель значений вектора параметров
theta_all=theta_etalon; // (первый столбец -- эталон)
// накопится до размера (p,M+1)
for m=1:M
V_all=zeros(N-p,p+1);// (накопитель L матриц V)
//накопится матрица размера ((N-p)*(L+1),p+1)
//(первая клетка размера (N-p,p+1) нулевая)
for l=1:L // добавляем шум к каждому отрезку от 1 до L
zm=zeros(N,1);
for k=1:N zm(k)=z_all(k,l+1) + grand(1,1,'nor', 0, sigma);
end//k
// Формируем матрицу наблюдений:
V=zeros(N-p,p+1);
for k=1:p+1 V(:,k)=zm(k:N-p-1+k); end
V_all=[V_all;V]; // (накопление матриц наблюдений для L отрезков)
end //l (конец добавления шума ко всем отрезкам наблюдений)
//// Итерации по параметрам:
// Начальное значение матриц:
phi=[theta0;1]; gamma1=Dv*phi;
row=[gamma1' zeros(1,N-p-1) ]; col=[gamma1(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); C = inv(G*G');
// итерации ИП СВ:
phi_print=phi'; //(накопитель значений phi' на итерациях)
for k=1:8 // (число итераций)
// Матрицы для итераций ВМ:
VTCV=zeros(p+1,p+1);
for l=1:L V=V_all( (l)*(N-p)+1:(l+1)*(N-p) , 1:p+1 ); VTCV=VTCV+V'*C*V;
end//l
VTCV=(1/L)*VTCV;
P=Dv'*VTCV*Dv;
Pinv=inv(P);
B=Dv'*Dv; tt = Pinv*B*phi; phi = tt/tt(length(tt));
phi_print=[phi_print;phi'];
gamma1=Dv*phi;
row=[gamma1' zeros(1,N-p-1) ];
col=[gamma1(1) ; zeros(N-p-1,1) ];
G=toeplitz(col,row); C = inv(G*G');
end//k (конец итераций)
//Запись значения параметров в конце итераций:
theta=phi(1:p); theta_all=[theta_all, theta]; //phi_print
// (печать значений phi' на разных итерациях)
end//m (конец цикла разных реализаций шума)
// Расчет среднего и с.к.о. параметров:
theta_mean=zeros(p,1);
for m=1:M theta_mean = theta_mean + theta_all(:,m+1);
end
theta_mean = (1/M)*theta_mean; theta_sko=zeros(p,1);
for m=1:M theta_sko = theta_sko + (theta_all(:,m+1) - theta_mean).^2 ;
```

```
end
theta_sko = sqrt( (1/M)*theta_sko ); theta_err = theta_mean - theta_etalon;
// Печать:
N
sigma
M
L
theta_etalon'
theta_err'
theta_sko'
//// Оценка траектории по оценкам параметров:
//Pi = eye(G'*G) - G'*C*G; zp = Pi * zm; plot(z); plot(zm,'g'); plot(zp,'r');
// конец программы
```

Результаты расчетов:

L	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	с. к. о. θ_1	с. к. о. θ_2
10	0.0000417	0.0004888	0.0004824	0.0021715
40	- 0.0000391	0.0000042	0.0001597	0.0008917
160	0.0000170	- 0.0000908	0.0000846	0.0004014
480	- 0.0000075	- 0.0001547	0.0000458	0.0002573

Из таблицы хорошо видна зависимость с. к. о. $\sim L^{-1/2}$.

Глава 4

Асимптотические свойства

Вероятность ... "есть только средство для условного сравнения
достоинства различных наблюдений"
(А. А. Марков (1916) [91, с.525-535])

В этой главе исследуются асимптотические свойства вариационных оценок (теоремы 4.1.2, 4.1.3) и устанавливается вид распределений наблюдений, при которых вариационные оценки являются асимптотически наилучшими (теорема 4.4.2).

Существенно, что все выкладки используют свойство клеточной теплицевости матрицы G_θ при $p > 0$. Системы порядка $p = 0$ наиболее полно были исследованы У. Фуллером (1987) [154]. Будет показано, что одна из основных теорем У. Фуллера (теорема 4.1.5 [154] об асимптотических свойствах) получается как следствие теоремы 4.1.2 (см. ниже). Кроме того, мы проводим исследование свойств оптимальности вариационных (орторегрессионных) оценок путем сравнения с нижней границей в информационном неравенстве Крамера—Рао, впервые вычисляя эту границу. Эти важные вопросы не освещались в монографии [154]. Поэтому полученные в этой главе теоремы являются по существу новыми.

Впервые будет показано, что оценки ВМ являются асимптотически эффективными (т. е. их дисперсия сопадает с нижней границей в информационном неравенстве Крамера—Рао) в предельном случае $({}^{\varrho}/_{\sigma})^2 \to \infty$, где $({}^{\varrho}/_{\sigma})^2$ есть отношение дисперсии распределения незашумленных процессов (траекторий) системы к дисперсии шумов наблюдений (теорема 4.4.2). Отсюда следует, что орторегрессионный метод с целевой функцией ВМ (типа А. О. Егоршина, GTLS или STLS) статистически оптимален в условиях наибольшей априорной неопределенности "истинных" процессов (траекторий) идентифицируемой системы. Этот оригинальный результат позволяет по-новому, с точки зрения математической статистики, осмыслить идеи, лежащие в основе орторегрессионных методов оценивания.

Из современных исследований по асимптотическим свойствам оценок ОР можно упомянуть статью [211], где оценки параметров регрессии различными вариантами метода моментов рассматриваются в скалярном случае $p = 0$, $r = 1$. Судя по обзорным статьям [157, 245], случай $p > 0$ исследуется только с точки зрения разных вариантов рекуррентного МНК (т. е. прямых методов, см. введение).

4.1 Информационная матрица и асимптотические распределения

Сначала используя информационное неравенство [63, с. 121, 359], вычислим нижнюю границу для асимптотической дисперсии в случае нормального распределения возмущений $\eta_{*(i)}$. В частном случае однородных систем ($m = 0$) с экспоненциальными решениями близкий результат был получен в работах М. Осборна и Г. Смита (1991, 1995) [220, раздел 7], [221, теорема 4.1].

Теорема 4.1.1. *В задаче* (3.2.1) *с* $L = 1$, $z_{*(1)} = z_*$ *и* $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$ *при условии полноты* (3.2.4) *нижняя граница Крамера—Рао для асимптотической дисперсии оценок параметра* θ_* *имеет вид*

$$\lim_{L\to\infty} \operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) \geqslant \sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D \right)^{-1}. \qquad (4.1.1)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $H = H(\theta)$ (3.3.21). Пусть $H_{x,0}$ — базис линейной оболочки строк подматрицы $H_x \doteq (C; CA; \ldots)$. Без ограничения общности будем считать, что строки $H_{x,0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ расположены на первых местах в H_x (в противном случае надо переупорядочить элементы вектора z). Пусть $z_{y,0}$ — вектор из первых n компонент z; обозначим $z \doteq (z_{y,0}; \overline{z}_y; z_u)$, $z_u \doteq (u_1; \ldots; u_N)$. Также обозначим соответствующие группы столбцов в матрице G системы уравнений (3.3.1):

$$G \doteq \begin{pmatrix} G_{y,0} & \overline{G}_y & G_u \end{pmatrix}. \qquad (4.1.2)$$

Введем обозначение $F \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\overline{G}_y\right)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Утверждение 4.1.1. *Пусть* $\check{z} = z + \eta$, $z = H(\theta) w$, $\eta \in \mathbf{N}(0, K)$, $\det K \neq 0$. *Тогда информация о параметре* $\chi = (w; \theta)$ *в распределении величины* $\check{z}$ *описывается матрицей*

$$\mathrm{I}(\theta, w) = \left(\begin{array}{c|c} D^\top V^\top F^\top K^{-1} F V D & D^\top V^\top F^\top K^{-1} H \\ \hline H^\top K^{-1} F V D & H^\top K^{-1} H \end{array} \right).$$

Доказательство. Многообразие решений системы (3.1.1) есть $\mathcal{R}(H)$, где матрица $H \doteq H(\theta)$ дана в (3.3.21). Опишем специальный базис в $\mathcal{R}(H)$, наиболее просто связанный с элементами матрицы G (3.3.1), (4.1.2).

Согласно (4.1.2) выделим группы строк в матрицах H_x и H_u:

$$H_x \doteq \begin{pmatrix} H_{x,0} \\ \overline{H}_x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_u \doteq \begin{pmatrix} H_{u,0} \\ \overline{H}_u \\ I \end{pmatrix}, \qquad H \doteq \begin{pmatrix} H_{x,0} & H_{u,0} \\ \overline{H}_x & \overline{H}_u \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Из представления $z = Hw$ следует $z_{y,0} = H_{x,0}x_0 + H_{u,0}z_u$, $\quad \overline{z}_y = \overline{H}_x x_0 + \overline{H}_u z_u$. Введем вектор переменных

$$w^\sharp \doteq (z_{y,0}\,; z_u) = Tw, \qquad T \doteq \begin{pmatrix} H_{x,0} & H_{u,0} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$z = Hw = H^\sharp w^\sharp, \qquad H^\sharp \doteq HT^{-1}, \qquad H^\sharp \doteq \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{H}^\sharp_x & \overline{H}^\sharp_u \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Выразим $H^\sharp$ через элементы G. В силу равенства $Gz = 0$ имеем

$$GH^\sharp = \left(G_{y,0}\,, \overline{G}_y\,, G_u\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{H}^\sharp_x & \overline{H}^\sharp_u \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует $\overline{H}^\sharp_x = -\left(\overline{G}_y\right)^{-1} G_{y,0}$, $\quad \overline{H}^\sharp_u = -\left(\overline{G}_y\right)^{-1} G_u$. Обозначив $\overline{F} \doteq -\left(\overline{G}_y\right)^{-1}$, запишем

$$H^\sharp \doteq \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F}G_{y,0} & \overline{F}G_u \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.1.3}$$

Перейдем к построению информационной матрицы. Плотность распределения вектора $\check{z}$ при фиксированном $\chi \doteq \left(\theta; w^\sharp\right)$ имеет вид:

$$p(\check{z}|\chi) = C_0 \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\|\eta\|^2_{K^{-1}}\right\} = C_0 \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\|\check{z} - H^\sharp(\theta)w^\sharp\|^2_{K^{-1}}\right\}.$$

Информационная матрица $\mathrm{I}\,(\chi)$ определяется выражениями [63, с. 119]:

$$\mathrm{I}\,(\chi) \doteq \|\mathrm{I}_{ij}(\chi)\|, \qquad \mathrm{I}_{ij}(\chi) = \mathbf{M}\,\frac{\partial}{\partial \chi_i}\log p(\check{z}|\chi)\frac{\partial}{\partial \chi_j}\log p(\check{z}|\chi).$$

Обозначим

$$l \doteq \log p(\check{z}|\chi) - \log C_0 = -\tfrac{1}{2}\|\check{z} - H^\sharp(\theta)w^\sharp\|^2_{K^{-1}}. \tag{4.1.4}$$

Тогда

$$\mathrm{I}\,(\chi) = \int \left(\frac{\partial l}{\partial \chi}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial \chi}\right)^\top p(\check{z}|\chi)\,d\check{z} = \int \left(\frac{\partial l}{\partial \chi}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial \chi}\right)^\top p(z + \xi\,|\chi)\,d\xi.$$

Из (4.1.4) следует

$$\frac{\partial l}{\partial \chi} = \left(\frac{\partial l}{\partial \theta}, \frac{\partial l}{\partial w^\sharp}\right), \qquad \frac{\partial l}{\partial \theta} = w^{\sharp\top} \frac{\partial H^{\sharp\top}}{\partial \theta} K^{-1}\eta, \qquad \frac{\partial l}{\partial w^\sharp} = H^{\sharp\top} K^{-1}\eta. \tag{4.1.5}$$

Вычислим $\frac{\partial H^\sharp}{\partial \theta} w^\sharp$, исходя из формулы для приращений:

$$dH^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\overline{H}^\sharp_x & d\overline{H}^\sharp_u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial H^\sharp}{\partial \theta}\, d\theta.$$

Учитывая (4.1.3), получаем

$$d\overline{H}^\sharp_x = \overline{F}\left(d\overline{G}_y\right)\overline{F} G_{y,0} + \overline{F} dG_{y,0}, \qquad d\overline{H}^\sharp_u = \overline{F}\left(d\overline{G}_y\right)\overline{F} G_u + \overline{F} dG_u.$$

Следовательно,

$$\left(dH^\sharp\right) w^\sharp = \overline{F} \begin{pmatrix} 0 \\ \left(d\overline{G}_y\right)\overline{F} G_{y,0} z_{y,0} + \left(dG_{y,0}\right) z_{y,0} + \left(d\overline{G}_y\right)\overline{F} G_u z_u + \left(dG_u\right) z_u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Привлекая равенство $G_{y,0} z_{y,0} + \overline{G}_y \overline{z}_y + G_u z_u = 0$, получим

$$\left(dH^\sharp\right) w^\sharp = \overline{F} \begin{pmatrix} 0 \\ \left(d\overline{G}_y\right)\overline{z}_y + \left(dG_{y,0}\right) z_{y,0} + \left(dG_u\right) z_u \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{F}\left(d\overline{G}\right) z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{F} V D d\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H^\sharp}{\partial \theta} w^\sharp = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{F} V(z) D \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad z = H^\sharp w^\sharp. \tag{4.1.6}$$

Из (4.1.5), (4.1.6) следует

$$\mathrm{I}\left(\chi\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\, \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial l^\top}{\partial \theta} & \mathbf{M}\, \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial l^\top}{\partial w^\sharp} \\ & \\ \mathbf{M}\, \frac{\partial l}{\partial w^\sharp} \frac{\partial l^\top}{\partial \theta} & \mathbf{M}\, \frac{\partial l}{\partial w^\sharp} \frac{\partial l^\top}{\partial w^\sharp} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} D^\top V^\top F^\top K^{-1} F V D & D^\top V^\top F^\top K^{-1} H^\sharp \\ \hline H^{\sharp\top} K^{-1} F V D & H^{\sharp\top} K^{-1} H^\sharp \end{array}\right),$$

$$V = V(z), \qquad z = H^\sharp w^\sharp, \qquad F \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{F} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\overline{G}_y\right)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После обратной замены переменных $w = T^{-1} w^\sharp$ получим

$$\mathrm{I}\,(\theta, w) = \left(\begin{array}{c|c} D^\top V^\top F^\top K^{-1} F V D & D^\top V^\top F^\top K^{-1} H \\ \hline H^\top K^{-1} F V D & H^\top K^{-1} H \end{array}\right).$$

Утверждение доказано. □

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4.1.1. Пусть θ_L — оценка параметра $\theta_* = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_* \\ w_* \end{pmatrix}$. Тогда нижняя граница для асимптотической дисперсии θ_L определяется информационным неравенством [63, с. 359]

$$\operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) \geqslant \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \mathrm{I}\,(\theta_*, w_*)^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Правая часть в этом выражении есть нижняя правая клетка в обратной информационной матрице $\mathrm{I}\,(\theta_*, w_*)^{-1}$. При $K = \sigma^2 I$ по формуле Фробениуса [23, с. 57] получаем

$$\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \mathrm{I}\,(\theta_*, w_*)^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma^2 \left(D^\top V_*^\top F^\top \left[I - H \left(H^\top H \right)^{-1} H^\top \right] F V_* D \right)^{-1}.$$

Учтем, что выражение в квадратных скобках есть матрица ортогонального проецирования на линейную оболочку столбцов $G^\top$:

$$I - H \left(H^\top H \right)^{-1} H^\top = G^\top \left(G G^\top \right)^{-1} G = G^\top C G.$$

Отсюда получается значение правой части в информационном неравенстве:

$$\operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) \geqslant \sigma^2 \left(D^\top V_*^\top F^\top G^\top C G F V_* D \right)^{-1}.$$

Согласно (4.1.2) $GF = -I$, поэтому

$$\operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) \geqslant \sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D \right)^{-1}.$$

Теорема доказана. □

Теперь вычислим асимптотическую дисперсию θ_L. Пусть γ^{ij} — ij-й элемент матрицы γ_θ из (3.1.4), тогда строка γ^i имеет вид

$$\gamma^i = \left(\gamma_0^i, \gamma_1^i, \ldots, \gamma_p^i \right) \doteq \left(\gamma^{i1}, \gamma^{i2}, \ldots, \gamma^{it} \right), \qquad t \doteq (p+1)(r+m).$$

Пронумеруем элементы γ^{ij} индексом

$$q = i + (j-1)r, \qquad q \in \overline{1, r(p+1)(r+m)}. \tag{4.1.7}$$

Обозначим

$$\Pi \doteq I - G^\top C G, \qquad E_q \doteq E_{ij} \doteq \frac{\partial G}{\partial \gamma^{ij}}, \qquad \widehat{z} \doteq \Pi \check{z}. \tag{4.1.8}$$

Матрица $E_q \doteq E_{ij}$ состоит из нулей и единиц, в каждой строке и каждом столбце не более одной единицы.

Расположим строки в G согласно (3.1.9). Матрицу V из (3.1.9) разобьем на клеточные столбцы:

$$V = \begin{pmatrix} \mathfrak{V} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{V} \end{pmatrix} = I_r \otimes \mathfrak{V} \doteq \Big(V_1 \ldots V_r \Big),$$

$$V_1 \doteq \begin{pmatrix} \mathfrak{V} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad V_r \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}.$$

Обозначим V_{ij} j-й столбец матрицы V_i. Отметим, что $V_{ij} \doteq V_q$ есть столбец матрицы V, порядковый номер q которого вычисляется по двойному индексу ij согласно правилу (4.1.7).

Символом $*$ обозначаем покомпонентное произведение матриц: $\operatorname{Sp} A * B = \sum A_{ii} B_{ii}$.

Теорема 4.1.2. *В условиях теоремы 3.4.1 дополнительно предположим, что компоненты каждого из векторов возмущений $\eta_{*(i)}$ есть независимые одинаково распределенные на $\mathbb{R}$ случайные величины с распределением из класса $\mathbf{M}_4(0, \sigma^2, 0, \omega^4)$, т. е. имеют нулевые 1-й и 3-й моменты, 2-й момент σ^2 и 4-й момент ω^4. Тогда орторегрессионная оценка θ_L вида* (3.3.13) *или* (3.3.12) *асимптотически по $L \to \infty$ нормальна с дисперсией, определяемой выражениями*

(1) $$\operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) \underset{L \to \infty}{\longrightarrow} \left(\mathbf{M}\, J_1'' \right)^{-1} \left(\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top \right) \left(\mathbf{M}\, J_1'' \right)^{-1},$$

(2) $$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top = \sigma^2\, \mathbf{M}\, J_1'' + \sigma^4 D^\top X^\top X D + (\omega^4 - 3\sigma^4) D^\top Y^\top Y D,$$

(3) $$\mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D,$$

$$D^\top X^\top X D \doteq \tfrac{1}{\sigma^2}\, \mathbf{M}\, D^\top \left(\widehat{V} - V_* \right)^\top C \left(\widehat{V} - V_* \right) D =$$

(4) $$= D^\top \left\| \operatorname{Sp} \Pi E_q^\top C E_l \Pi \right\|_l^q D \doteq D^\top \left\| x_{kl} \right\|_l^q D,$$

$$Y^\top Y \doteq \|y_{kl}\|_l^q = \left\|\mathrm{Sp}\,\left(W_q^\top * W_l\right)\right\|_l^q, \qquad W_l \doteq G^\top C E_l \Pi,$$

(5) $$y_{ql}^2 \leqslant x_{qq} x_{ll},$$

$$\widehat{V} \doteq V(\widehat{z}), \qquad V_* \doteq V(z_*).$$

Доказательство. См. приложение, раздел 4.6.1. □

Замечание 4.1.1. В случае нормального распределения $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(o, \sigma^2)$ получаем $\omega^4 = 3\sigma^4$, вследствие чего третье слагаемое в формуле (2) теоремы обращается в ноль.

Для оценок ОР соответствующая теорема получается заменой G на $G_{\mathtt{OR}}$ и V на $V_{\mathtt{OR}}$.

Рассмотрим модифицированные оценки (3.3.16). Они отличаются тем, что выражение $G^\top\left(G_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}^\top\right)^{-1} G$ в целевой функции (3.3.16)

$$J_{\mathtt{M}}(\theta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \check{V}^\top C_{\mathtt{OR}} \check{V} \widetilde{D} \vartheta = \check{z}^\top G^\top \left(G_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}^\top\right)^{-1} G \check{z}$$

уже не является проективной матрицей со свойством $\Pi^2 = \Pi$, как это имеет место для оценок ОР и ВМ. Этот факт существенно усложняет отдельные моменты доказательства, в силу чего для оценок ОРМ некоторые из точных выражений заменяем оценками сверху.

Теорема 4.1.3. *В условиях теоремы 4.1.2 модифицированная ортогрессионная оценка* θ_L *из* (3.3.16) *асимптотически по* $L \to \infty$ *нормальна с дисперсией, определяемой выражениями*

(1) $$\mathrm{cov}\, L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathbf{M}\, J_1''\right)^{-1} \left(\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top\right) \left(\mathbf{M}\, J_1''\right)^{-1},$$

(2) $$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top = \sigma^2\, \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* D + \sigma^4 D^\top W D,$$

$$0 < W < c_1 I,$$

$$c_1 \doteq r\left(\sigma^{-4}\omega^4 + N(r+m) - 1\right) N^2 (p+1)^3 (r+m)^2 \mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

(3) $$\mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* D + \sigma^2 \mathrm{Sp}\,\left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''_{\theta\theta},$$

(4) $$\mathrm{Sp}\,\left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''_{\theta\theta} \leqslant 4\,(p+1)^{3/2} N^2 (r+m)^2 \|DD^\top\| \mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

$$V_* \doteq V(z_*).$$

Доказательство. См. приложение, раздел 4.6.2. □

Следствие 4.1.1. *Пусть выполнены условия теорем* 4.1.2, 4.1.3. *Тогда в пределе* $\sigma \to 0$ *значения асимптотических дисперсий оценок* ВМ, ОР *и* ОРМ *равны первым слагаемым в формулах* (2) *утверждений теорем*:

$$\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \left(\mathbf{M}\, J_1''\right)^{-1}, \qquad \sigma \to 0,$$

где для оценок ВМ

$$\mathbf{M}\, J_1'' \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D, \tag{4.1.9}$$

для оценок ОРМ

$$\mathbf{M}\, J_1'' \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* D, \tag{4.1.10}$$

и для оценок ОР

$$\mathbf{M}\, J_1'' \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{M}\, D^\top V_{\mathtt{OR}*}^\top C_{\mathtt{OR}} V_{\mathtt{OR}*} D. \tag{4.1.11}$$

Напомним, оценка θ_L называется асимптотически эффективной, если ее асимптотическая дисперсия совпадает с нижней границей в информационном неравенстве (4.1.1) [63, с. 359].

Следствие 4.1.2. *Пусть возмущения распределены нормально*: $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}\left(0, \sigma^2 I\right)$. *Тогда при фиксированном значении переменных* $z_* = H w_*$ *при условии полноты* $\mathcal{M}_* \doteq \{z_*\}$ (*определение 3.2.1 и утверждение 3.2.1*) *в пределе* $\sigma \to 0$ *оценка* ВМ *является асимптотически эффективной.*

Доказательство. Если переменные z_*, w_* фиксированы, то в (4.1.9) опускается знак математического ожидания, и далее теорема 4.1.1. □

4.2 Случай наблюдений одной траектории (оценка МП)

Пусть даны наблюдения

$$\check{z}_{(i)} = z_* + \eta_{(i)}, \qquad i = \overline{1, L}, \tag{4.2.1}$$

траектории z_*, $G z_* = 0$, $G = G_\theta$. Гипотетической ошибкой наблюдений назовем величину

$$J = \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\check{z}_{(i)} - \hat{z}\|^2 = \min_{G_\theta z = 0} \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\check{z}_{(i)} - z\|^2. \tag{4.2.2}$$

Поставим задачу найти значение параметра $\theta = \hat{\theta}$, минимизирующее гипотетическую ошибку наблюдений:

$$\hat{\theta} = \arg\min_\theta J. \tag{4.2.3}$$

Это есть оценка по вариационному методу (3.3.11), (3.3.12), или орторегрессионная оценка (3.3.13), в зависимости от выбранной структуры матрицы G_θ (см. раздел 3.3), но *с добавленным условием*

$$\forall\, i \in \overline{1, L} \qquad \hat{z}_{(i)} = \hat{z}, \qquad z_{(i)} = z.$$

В нижеследующей теореме будет показано, что оценки (4.2.2), (4.2.3) являются оценками максимального правдоподобия (МП) и, как следствие, асимптотически эффективными (наилучшими) [13, гл.2, п.16]. Подобного рода оценки МП для частного случая однородных скалярных динамических систем ($p > 0$, $r = 1$, $m = 0$) исследовались в [220, 221]. Метод идентификации параметров, представленный выражениями (4.2.2), (4.2.3), в применении к однородным системам в литературе называется еще *модифицированным* методом де Прони [219] и используется для аппроксимации измерений действительнозначными экспонентами [220, 221], синусоидами [167, 205], синусоидами с экспоненциальными амплитудами [182].

Теорема 4.2.1. *При условии* (4.2.1) *и н. о. р.* $\eta_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$ *оценка* (4.2.2), (4.2.3) *есть оценка максимального правдоподобия* (МП) *и, как следствие этого факта, ее дисперсия совпадает с нижней границей неравенства Крамера—Рао, установленной в теореме 4.1.1, т. е. эта оценка является асимптотически эффективной.*

Доказательство теоремы. Введем обозначение для среднего значения всех наблюдений $s \doteq \frac{1}{L}\sum_1^L \check{z}_i$. Для вычисления оценки $\hat{\theta}$ по наблюдениям $\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}$ достаточно заменить наблюдения единственным средним значением s и L слагаемых в целевой функции J заменить одним слагаемым с $L = 1$, $\check{z}_{(1)} = s$. Иначе говоря:

Утверждение 4.2.1. $\arg\min_\theta J = \arg\min_\theta \widetilde{J}$ *, где* $\widetilde{J} \doteq s^\top G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} Gs$.

Доказательство. На первом шаге вычислим оценку траектории

$$\hat{z} = \arg\min_{Gz=0} \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\check{z}_i - z\|^2.$$

Определим вспомогательные величины $\hat{z}_{(i)} \doteq \Pi \check{z}_{(i)}$, где

$$\Pi \doteq I - G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} G \doteq I - \bar{\Pi}.$$

Запишем оценку траектории в виде

$$\hat{z} = \arg\min_{Gz=0} \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\check{z}_{(i)} - \hat{z}_{(i)} + \hat{z}_{(i)} - z\|^2.$$

Учитывая, что вектора $\check{z}_{(i)} - \hat{z}_{(i)}$ и $\hat{z}_{(i)} - z$ взаимно перпендикулярны, имеем

$$\hat{z} = \arg\min_{Gz=0} \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\check{z}_{(i)} - \hat{z}_{(i)}\|^2 + \|\hat{z}_{(i)} - z\|^2 =$$

$$= \arg\min_{Gz=0} \tfrac{1}{L} \sum_1^L \|\hat{z}_{(i)} - z\|^2.$$

Поиск минимума последнего выражения элементарен (нужно учесть, что все точки $\hat{z}_{(i)}$, z лежат в плоскости $\mathcal{N}(G)$) и приводит к результату $\hat{z} = \frac{1}{L}\sum_1^L \hat{z}_{(i)}$. Тогда можем написать:

$$\hat{z} = \frac{1}{L}\sum_1^L \hat{z}_{(i)} = \frac{1}{L}\sum_1^L \Pi\check{z}_{(i)} = \Pi\frac{1}{L}\sum_1^L \check{z}_{(i)} = \Pi s.$$

Перейдем к оценке параметра $\hat{\theta} = \arg\min_\theta J$. С учетом вышеизложенного функция потерь имеет вид

$$J = \frac{1}{L}\sum_1^L \|\check{z}_{(i)} - \Pi s\|^2.$$

Введем обозначение для средних уклонений $\check{z}_{(i)}$ от среднего: $e_{(i)} \doteq \check{z}_{(i)} - s$. Тогда можем записать

$$\|\check{z}_{(i)} - \Pi s\| = \|e_{(i)} + (I - \Pi)s\| \doteq \|e_{(i)} + \bar{\Pi}s\|.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{L}\sum_1^L \|e_{(i)} + \bar{\Pi}s\|^2.$$

Оценка $\hat{\theta}$ определяется из уравнения $J'_\theta = 0$. Распишем производную, пользуясь тождеством $\left(a^\top a\right)'_\theta = 2a^\top a'_\theta$:

$$J'_\theta = \frac{1}{L}\sum_1^L \left(\|e_{(i)} + \bar{\Pi}s\|^2\right)'_\theta = \frac{1}{L}\sum_1^L 2\left(e_{(i)} + \bar{\Pi}s\right)\left(\bar{\Pi}s\right)'_\theta.$$

После раскрытия скобок и выполнения суммирования первое слагаемое ввиду равенства $\frac{1}{L}\sum_1^L e_{(i)} = 0$ обратится в ноль, и получим

$$J'_\theta = \frac{2}{L}\sum_1^L \left(\bar{\Pi}s\right)\left(\bar{\Pi}s\right)'_\theta.$$

Обратим внимание, что точно такую же производную $\widetilde{J}'_\theta = J'_\theta$ имеет функция потерь

$$\widetilde{J} = \frac{1}{L}\sum_1^L \left(\bar{\Pi}s\right)^\top\left(\bar{\Pi}s\right) = \left(\bar{\Pi}s\right)^\top\left(\bar{\Pi}s\right) = s^\top\bar{\Pi}s = s^\top G^\top\left(GG^\top\right)^{-1}Gs.$$

Мы получили, что исходная задача равносильна задаче получения оценки $\hat{\theta}$ по единственному наблюдению, роль которого играет среднее значение $s = \frac{1}{L}\sum_1^L \check{z}_{(i)}$. Утверждение доказано. $\square$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что целевая функция (4.2.2) с точностью до константы и постоянного сомножителя совпадает с функцией правдоподобия, построенной по плотности распределения наблюдений (4.2.1). Действительно, плотность совместного распределения случайных величин $\check{z}_{(i)}$ (4.2.1) имеет вид

$$p(\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}) = \mathrm{const}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\check{z}_{(1)}-z\|^2}\ldots e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\check{z}_{(L)}-z\|^2}.$$

Тогда логарифм правдоподобия с точностью до постоянного слагаемого и умножения на константу равен

$$-\ln p = \mathrm{const} + \tfrac{1}{L}\sum_{1}^{L} \|\check{z}_{(i)} - z\|^2 \doteq l(\theta, z).$$

Оценка максимального правдоподобия получается максимизацией $l(\theta, z)$ по θ и z при условии $G_\theta z = 0$. Это есть оценка (4.2.2), (4.2.3). Теорема доказана. $\square$

4.3 Предельный случай малой амплитуды шумов

При $L = 1$ исследование свойств вариационных оценок чрезвычайно затруднено ввиду существенной нелинейности целевой функции (3.3.11) и сложной картины ее изоповерхностей (см. статьи В. И. Костина (1984) [57], В. Г. Демиденко (2010) [32]). Эта особенность вариационных оценок проявляется, в частности, в малости радиуса сходимости универсальных итерационных процедур минимизации (градиентных, Ньютона и др.) [30, 32, 57, 242]. Общим подходом в такой ситуации является рассмотрение предела малых шумов $\sigma \to 0$ с ограничением диаметра области носителя распределения. В этом предельном случае мы можем получить выражение для дисперсии $\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*)$, применяя теорему о неявной функции, и вывести для разных оценок выражения, в определенном смысле близкие к (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11).

Пусть, как и ранее, $\check{z}$ — наблюдение траектории, $L = 1$. Оценка параметров $\theta \doteq \theta_1$ из (3.3.13) определяется из уравнения

$$J'_\theta(\check{z}, \theta) = 0, \tag{4.3.1}$$

где J'_θ обозначает частную производную J по θ. Учитывая существование всех необходимых производных целевой функции $J(\check{z}, \theta)$ (см. раздел 4.6.1.2), из уравнения (4.3.1) получаем неявную функцию

$$\theta(\check{z}) = \theta_0 + \Delta\theta(\Delta z) + \Delta^2\theta(\Delta z) + \dots$$

$$\Delta z \doteq \check{z} - z_0, \qquad J'_\theta(z_0, \theta_0) = 0. \tag{4.3.2}$$

При малых уклонениях наблюдений $\check{z}$ от опорной точки z_0 оценка θ будет мало уклоняться от значения $\theta_0 \doteq \theta(z_0)$. Будем считать уклонения Δz случайной величиной с распределением из класса $\mathbf{M}_{2,c\sigma}(0, \sigma^2 I)$. Это значит, что носитель распределения Δz имеет диаметр не больше $c\sigma$, где c — некоторая константа. Тогда можно описать распределение оценки θ, отталкиваясь от известного распределения наблюдений $\check{z}$.

Разложим левую часть уравнения (4.3.1) в ряд Тейлора относительно точки (z_0, θ_0):

$$J'_\theta(\check{z}, \theta) = J'_\theta(z_0, \theta_0) + J''_{\theta z}(z_0, \theta_0)\Delta z + J''_{\theta\theta}(z_0, \theta_0)\Delta\theta + O_{z,\theta,2},$$

где обозначено $O_{z,\theta,2} \doteq O(\|\Delta z\|^2) + O(\|\Delta\theta\|^2)$. Учитывая (4.3.1), (4.3.2), получаем

$$J''_{\theta z}(z_0, \theta_0)\Delta z + J''_{\theta\theta}(z_0, \theta_0)\Delta\theta + O_{z,\theta,2} = 0,$$

откуда

$$\Delta\theta = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta z}\Delta z + O_{z,\theta,2}. \tag{4.3.3}$$

Проведем сравнение $\Delta\theta$ с нормированным уклонением из условия теоремы 4.1.2:

$$\Delta\theta_L \doteq L^{1/2}\left(\theta_L - \theta_*\right). \tag{4.3.4}$$

Теорема 4.3.1. *Пусть* $\Delta z \doteq \eta_*$ *является случайной величиной с распределением из класса* $\mathbf{M}_{2,c\sigma}(0, \sigma^2 I)$*. Тогда для оценок* ВМ, ОР *и* ОРМ *уклонение* $\Delta\theta$ *из* (4.3.3) *в пределе* $\sigma \to 0$ *и уклонение* $\Delta\theta_L$ *из* (4.3.4) *в пределе* $L \to \infty$ *имеют одинаковую дисперсию*

$$D_{\Delta\theta} \doteq \sigma^2 Q_*^{-1}, \qquad \text{где} \qquad \begin{cases} Q_* = D^\top V_*^\top C V_* D & \text{для оценок ВМ,} \\ Q_* = D^\top V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* D & \text{для оценок ОРМ,} \\ Q_* = D^\top V_{\mathtt{OR}*}^\top C_{\mathtt{OR}} V_{\mathtt{OR}*} D & \text{для оценок ОР.} \end{cases}$$

Доказательство. 1) Для оценок ВМ используем выражения для производных J'_θ, $J''_{\theta\theta}$ из леммы 4.6.2 (приложение, раздел 4.6.1.2):

$$J = \check{z}^\top G^\top C G \check{z},$$

$$J'_\theta = \left(\theta^\top D^\top + d^\top\right)\check{V}^\top C \widehat{V} D = z^\top G^\top C \widehat{V} D$$

$$\Rightarrow \quad J''_{\theta z} = \frac{\partial J'^\top_\theta}{\partial z} = D^\top \widehat{V}^\top C G, \tag{4.3.5}$$

$$J''_{\theta\theta} = D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D + O_{z,1}, \qquad O_{z,k} \doteq O(\|\Delta z\|^k). \tag{4.3.6}$$

Производные берутся в точках z_0, θ_0, и сглаженное значение траектории $\widehat{z}$ понимается как проекция $\check{z}$ на пространство траекторий модели с параметрами θ_0.

Подставляя (4.3.5), (4.3.6) в (4.3.3), выразим зависимость $\Delta\theta(\Delta z)$:

$$\Delta\theta = -\left(D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D + O_{z,1}\right)^{-1} D^\top \widehat{V}^\top C G \Delta z + O_{z,2} =$$

$$= -\left(D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D\right)^{-1} D^\top \widehat{V}^\top C G \Delta z + O_{z,2}.$$

Вычислим дисперсию $\Delta\theta$:

$$D_{\Delta\theta} = \mathbf{M}\,\Delta\theta\Delta\theta^{\top} =$$

$$= \mathbf{M}\left\{\left(D^{\top}\widehat{V}^{\top}C\widehat{V}D\right)^{-1} D^{\top}\widehat{V}^{\top}CG\left(\Delta z\Delta z^{\top}\right) \times\right.$$

$$\left.\times G^{\top}C\widehat{V}D\left(D^{\top}\widehat{V}^{\top}C\widehat{V}D\right)^{-1}\right\} + O_{z,3} =$$

$$= \sigma^2\widehat{Q}^{-1} + O_{z,3}, \tag{4.3.7}$$

$$\widehat{Q} \doteq D^{\top}\widehat{V}^{\top}C\widehat{V}D.$$

2) Выражение для дисперсии уклонения оценки ВМ $\Delta\theta_L$ (4.3.4) согласно теореме 4.1.2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&D_{\Delta\theta_L} \doteq \operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) \ \to \\
&\to\ (Q_*)^{-1}\left(\sigma^2 Q_* + \sigma^4 D^{\top}X^{\top}XD + (\omega^4 - 3\sigma^4)D^{\top}Y^{\top}YD\right)(Q_*)^{-1} = \\
&= \sigma^2 Q_*^{-1} + O_{z,4}, \\
&Q_* \doteq D^{\top}V_*^{\top}CV_*D.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Сравним формулы (4.3.7) и (4.3.8) в предельном случае $\sigma \to 0$ ($\|\Delta z\| \to 0$) при условии $z_0 = z_*$, $\theta_0 = \theta_*$. При $\|\Delta z\| \to 0$ оценка траектории $\hat{z}$ сходится к значению z_*, и соответственно, $\widehat{Q} \to Q_*$. Здесь важно убедиться, что разность между $\sigma^2\widehat{Q}^{-1}$ и $\sigma^2 Q_*^{-1}$ имеет порядок величины не больше остатка $O_{z,3}$ в формуле (4.3.7). Действительно, из разложения $\|\check{z} - z_*\|^2 = \|\hat{z} - z_*\|^2 + \|\check{z} - \hat{z}\|^2$ следует $\|\hat{z} - z_*\| < \|\check{z} - z_*\| = \|\Delta z\|$. Значит, $\|\widehat{V} - V_*\| = O_{z,1}$, и в силу равенства

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} - Q_* = (\widehat{V} - V_*)^{\top}C(\widehat{V} - V_*) + \\
+ V_*^{\top}C(\widehat{V} - V_*) + (\widehat{V} - V_*)^{\top}CV_*
\end{aligned}$$

получаем $\widehat{Q} - Q_* = O_{z,1}$. Далее,

$$\widehat{Q}^{-1} - Q_*^{-1} = -Q_*^{-1}\left(\widehat{Q} - Q_*\right)Q_*^{-1} + O\left(\|\widehat{Q} - Q_*\|^2\right) = O\left(\|\widehat{Q} - Q_*\|\right) = O_{z,1}.$$

Следовательно, $\sigma^2\widehat{Q}^{-1} - \sigma^2 Q_*^{-1} = O_{z,3}$. Значит, уклонение $\Delta\theta$ (4.3.3) в пределе $\sigma \to 0$ и уклонение $\Delta\theta_L$ (4.3.4) в пределе $L \to \infty$ имеют одну и ту же дисперсию

$$D_{\Delta\theta} \doteq \sigma^2 Q_*^{-1}, \qquad Q_* = D^{\top}V_*^{\top}CV_*D.$$

3) Для оценок ОР все выражения остаются в силе с заменой G на $G_{\mathtt{OR}}$, C на $C_{\mathtt{OR}}$ и V на $V_{\mathtt{OR}}$:

$$Q_* = D^{\top}V_{\mathtt{OR}*}^{\top}C_{\mathtt{OR}}V_{\mathtt{OR}*}D.$$

4) Для модифицированных оценок вместо леммы 4.6.2 следует использовать лемму 4.6.5 (приложение, раздел 4.6.1).

Теорема доказана. $\square$

4.4 Распределение наблюдений, при котором вариационные оценки асимптотически эффективны

Пусть даны точные значения траекторий $z_* = Hw$, и случайные вектор w распределен нормально: $w \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$. Наблюдается случайная величина $z = z_* + \eta$, где $\eta \in \mathbf{N}(0, I)$ — возмущения. Случай другого значения матрицы дисперсии (невырожденной) рассматривается аналогично.

Построим распределение наблюдаемой переменной z и покажем, что в пределе $\varrho \to \infty$ плотность $p(z)$ этого распределения стремится к функции, минус-логарифм которой с точностью до сомножителя и константы совпадает с целевой функцией вариационного метода. Отсюда будет следовать, что вариационные оценки (3.3.11) являются асимптотически наилучшими для распределений, которые как можно более сильно рассредоточены на модельной плоскости $\operatorname{im} H$.

Выше была установлена теорема 3.4.1 о состоятельности вариационных оценок при слабых ограничениях на вид распределения переменных w. В этой теореме условием состоятельности является только полнота наблюдений. Рассуждения в этом разделе подводят к мысли, что состоятельность вариационных оценок на широком классе распределений достигается именно за счет "нацеленности" вариационных методов на наиболее рассредоточенные распределения w. Если учитывать априорную информацию о распределении координат w и строить на этой основе оценки максимального правдоподобия (МП), то они будут в силу известных теорем асимптотически наилучшими и поэтому лучше вариационных оценок. Но оценки МП по построению не являются робастными к ошибкам в указании распределения w, в отличие от вариационных оценок. При неизбежных ошибках в задании распределения w более точные оценки (МП) могут оказаться не только не наилучшими в асимптотике, но даже и не состоятельными.

Итак, покажем, что вариационные оценки (ОР, ВМ) являются наилучшими в условиях наибольшей рассредоточенности распределения переменных w.

Теорема 4.4.1. *Пусть случайный вектор* $z_* \in \mathbb{R}^n$ *связан уравнением* $G_\theta z_* = 0$, *или (равносильно)* $z_* = Hw$, *где столбцы матрицы* $H \in \mathbb{R}^{n \times n_\|}$ *являются базисом нуль-пространства* $\mathcal{N}(G_\theta)$. *Пусть при этом величина* $w \in \mathbb{R}^{n_\|}$ *является случайным вектором с распределением одного из двух видов*: (а) *нормальное* $w \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$ *или* (б) *равномерное на шаре* B_ϱ *радиуса* ϱ *с центром в нуле,* $w \in \mathbf{U}(0, B_\varrho)$. *Пусть наблюдается случайный вектор* $z = z_* + \eta$, *где* $\eta \in \mathbf{N}(0, I_n)$. *Тогда в пределе* $\varrho \to \infty$ *плотность* $p(z)$ *распределения наблюдений* z *стремится к функции, минус-логарифм которой с точностью до сомножителя и константы совпадает с целевой функцией вариационного метода* $J(\theta) = z^\top G_\theta^\top \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1} G_\theta z$.

Соответствующее утверждение для метода ортогональной регрессии получается заменой клеточно-теплицевой матрицы G_θ (3.3.12) на клеточно-диагональную (3.3.13).

Ввиду того, что минимизация минус-логарифма плотности по определению приводит к оценкам максимального правдоподобия, в силу известных свойств оптимальности этих оценок [89] получаем

Следствие. *В условиях теоремы оценки* ОР (ВМ) *являются асимптотически эффективными.*

Доказательство теоремы. а) Рассмотрим случай $w \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$. Величина $z = z_* + \eta$ распределена нормально ввиду нормальности распределений слагаемых z_* и η. Плотность распределения суммы независимых случайных величин является сверткой

$$p(z) = \int p(z|w)p(w)dw, \tag{4.4.1}$$

где $p(z|w) = \frac{p(z,w)}{p(w)} = \frac{p(z,w)}{\int p(z,w)dz}$ — плотность распределения z при фиксированном значении w (условная плотность):

$$p(z|w) = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{1}{2}\|z-Hw\|^2}, \qquad p(w) = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{1}{2\varrho^2}\|w\|^2},$$

$$p(z) = \mathrm{const} \cdot \int e^{-\frac{1}{2}\|z-Hw\|^2 - \frac{1}{2\varrho^2}\|w\|^2} dw. \tag{4.4.2}$$

Запишем показатель экспоненты в виде

$$-\tfrac{1}{2}\|z - Hw\|^2 - \tfrac{1}{2\varrho^2}\|w\|^2 \doteq$$

$$\doteq -\tfrac{1}{2}\left(z^\top B_{11} z + z^\top B_{12} w + w^\top B_{21} z + w^\top B_{22} w\right)$$

и выделим из выражения в скобках полный квадрат (сумму без слагаемых с перекрестными членами):

$$z^\top B_{11} z + z^\top B_{12} w + w^\top B_{21} z + w^\top B_{22} w =$$

$$= y^\top y + z^\top \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right) z,$$

$$y \doteq B_{22}^{-\top/2} B_{21} z + B_{22}^{1/2} w.$$

Здесь $B_{22}^{1/2}$ — произвольный квадратный корень из положительно определенной матрицы B_{22} (этот корень определен с точностью до умножения на произвольную ортогональную матрицу): $B_{22} = B_{22}^{\top/2} B_{22}^{1/2}$.

После выделения полного квадрата в выражении (4.4.2) легко выполняется интегрирование по переменной w:

$$\int e^{-\frac{1}{2}\|z-Hw\|^2 - \frac{1}{2\varrho^2}\|w\|^2} dw =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right) z} \cdot \int e^{-\frac{1}{2} y^\top y} dw =$$

$$= \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right) z}.$$

В последнем равенстве сделана замена переменных:

$$\int e^{-\frac{1}{2} y^\top y} dw = \left| B_{22}^{1/2} \right|^{-1} \cdot \int e^{-\frac{1}{2} y^\top y} dy = \mathrm{const}.$$

После взятия интеграла (4.4.2) несложно восстановить значение константы в выражении для плотности, а именно:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{\left| 2\pi \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right)^{-1} \right|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right) z} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \left| B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} \right|^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right) z}.$$

Подставим значения матриц:

$$B_{11} = I, \qquad B_{12} = B_{21}^\top = -H,$$

$$B_{22} = H^\top H + \varrho^{-2} I.$$

Тогда

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \left| I - H \left(H^\top H + \varrho^{-2} I\right)^{-1} H^\top \right|^{1/2} \times \tag{4.4.3}$$

$$\times e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(I - H \left(H^\top H + \varrho^{-2} I\right)^{-1} H^\top\right) z} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} |R|^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top R z} \doteq \frac{1}{\sqrt{|2\pi Q|}} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top Q^{-1} z}.$$

Интерес представляют 2 предельных случая.

Первый предельный случай: $\varrho \to 0$. Выражение в круглых скобках в формуле (4.4.3) стремится к $\varrho^{-2} I$, и после обращения получаем значение $\varrho^2 I \to 0$, откуда следует сходимость

$$H \left(H^\top H + \varrho^{-2} I\right)^{-1} H^\top \to \varrho^2 H H^\top \to 0,$$

$$p(z) \to (2\pi)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top z}.$$

Второй предельный случай: $\varrho \to \infty$. Выражение в тех же круглых скобках стремится к $H^\top H$, и после обращения получаем сходимость к проектору

$$\Pi = G^\top \left(G G^\top\right)^{-1} G = I - H \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top,$$

который входит в выражение для функции потерь ВМ $J = z^\top \Pi z$:

$$p(z) \to (2\pi)^{-n/2} \left| I - H \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top \right|^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top \left(I - H \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top\right) z} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \left| G^\top \left(GG^\top \right)^{-1} G \right|^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^\top G^\top \left(GG^\top \right)^{-1} Gz}.$$

Заметим, что это предельное значение плотности равно нулю, ввиду равенства нулю определителя проектора $|\Pi| = 0$. Сходимость нормирующего сомножителя к нулю необходима ввиду неограниченного роста меры носителя распределения при $\varrho \to \infty$.

Чтобы изучить поведение плотности в окрестности предельного значения, разложим плотность в произведение плотностей специального вида следующим образом. С помощью леммы об обращении представим матрицу R, определенную в формуле (4.4.3), как сумму ортогональных слагаемых:

$$R = I - H \left(H^\top H + \varrho^{-2} I \right)^{-1} H^\top =$$

$$= I - HUH^\top + HU \left(U + \varrho^2 I \right)^{-1} UH^\top \doteq R_\perp + R_\parallel, \tag{4.4.4}$$

$$R_\perp \doteq I - HUH^\top, \qquad U \doteq \left(H^\top H \right)^{-1}.$$

Найдем переменные, дисперсии которых совпадают с матрицами $R_\perp$ и $R_\parallel$. Плотности распределения этих переменных и будут сомножителями в искомом разложении плотности $p(z)$.

Матрица U положительно определена, поэтому имеет место разложение

$$U = M \Lambda M^\top, \qquad M^\top M = I, \qquad \Lambda = \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}} \{\lambda_i\}.$$

Подстановкой в (4.4.4) получаем

$$R_\parallel = HU \left(U + \varrho^2 I \right)^{-1} UH^\top =$$

$$= H \left(M\Lambda M^\top \right) \left(M\Lambda M^\top + \varrho^2 I \right)^{-1} \left(M\Lambda M^\top \right) H^\top =$$

$$= HM\Lambda \left(\Lambda + \varrho^2 I \right)^{-1} \Lambda M^\top H^\top =$$

$$= HM \left(\operatorname{diag} \left\{ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + \varrho^2} \right\} \right) M^\top H^\top.$$

Заметим, что матрица H может быть представлена в виде произведения $H = P_\parallel \Lambda^{-1/2} M^\top$, где $P_\parallel$ — произвольно выбранный ортогональный базис[*)] линейной оболочки столбцов H: $\operatorname{im} P_\parallel = \operatorname{im} H$, $P_\parallel^\top P_\parallel = I$. Действительно,

$$H^\top H = M\Lambda^{-1/2} P_\parallel^\top P_\parallel \Lambda^{-1/2} M^\top = M\Lambda^{-1} M^\top = U^{-1}.$$

Тогда можно записать $R_\parallel$ в следующем виде:

$$R_\parallel = \left(P_\parallel \Lambda^{-1/2} M^\top \right) M \left(\operatorname{diag} \left\{ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + \varrho^2} \right\} \right) M^\top \left(M\Lambda^{-1/2} P_\parallel^\top \right) =$$

[*)] Можно взять $P_\parallel = HU^{1/2}$.

$$= P_{\|}\Lambda^{-1/2}\left(\operatorname{diag}\left\{\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+\varrho^2}\right\}\right)\Lambda^{-1/2}P_{\|}^{\top} =$$

$$= P_{\|}\cdot\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1+\varrho^2\lambda_i^{-1}}\right\}\cdot P_{\|}^{\top} \doteq P_{\|}\Lambda_{\|}P_{\|}^{\top}.$$

Определим матрицу $P_{\perp}$, составив ее столбцы из произвольно взятого ортогонального базиса подпространства $\mathbb{R}^n/\operatorname{im} H$, $P_{\perp}^{\top}P_{\perp} = I$. Тогда матрица $P \doteq \left[P_{\perp}P_{\|}\right]$ будет неособенной и ортогональной, ее столбцы образуют базис всего пространства $\mathbb{R}^n$. Несложно увидеть, что матрица

$$P_{\perp}P_{\perp}^{\top} = I - HUH^{\top}$$

есть матрица проектора на подпространство $\mathbb{R}^n/\operatorname{im} H$, а $P_{\|}P_{\|}^{\top}$ есть матрица проектора на подпространство $\operatorname{im} H$. С учетом этих обозначений можем записать разложение R в следующем виде:

$$R = R_{\perp} + R_{\|} = P_{\perp}P_{\perp}^{\top} + P_{\|}\Lambda_{\|}P_{\|}^{\top} =$$

$$= \left(P_{\perp}P_{\|}\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \Lambda_{\|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{\perp}^{\top} \\ P_{\|}^{\top}\end{pmatrix}.$$

Перейдем к новым переменным $x = P^{-1}z = P^{\top}z$. Ввиду ортогональности $|P| = 1$, поэтому плотность $p(z)$ (4.4.3) записывается через переменные x следующим образом:

$$p(z) = p(z(x))\cdot|P|^{-1} = p(z(x)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\,|R|^{1/2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^{\top}P^{\top}RPx} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_{\perp}}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_{\|}}}}\left|\Lambda_{\|}\right|^{1/2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^{\top}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \Lambda_{\|}\end{pmatrix}x}.$$

Предствим вектор x как объединение подвекторов:

$$x = P^{\top}z = \begin{pmatrix} P_{\perp}^{\top} \\ P_{\|}^{\top}\end{pmatrix} z \doteq \begin{pmatrix} x_{\perp} \\ x_{\|}\end{pmatrix}.$$

Тогда плотность $p(z)$ представляется как произведение плотностей распределений $x_{\perp}$ и $x_{\|}$:

$$p(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_{\perp}}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x_{\perp}^{\top}x_{\perp}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_{\|}}}}\left|\Lambda_{\|}\right|^{1/2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x_{\|}^{\top}\Lambda_{\|}x_{\|}}\right),$$

$$x_{\perp}^{\top}x_{\perp} = z^{\top}\Pi z, \qquad x_{\|}^{\top}\Lambda_{\|}x_{\|} = z^{\top}P_{\|}\Lambda_{\|}P_{\|}^{\top}z,$$

$$\Pi = I - HUH^{\top} = G^{\top}CG,$$

$$\Lambda_{\|} = \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n_{\|}}}\left\{\frac{1}{1+\varrho^2\lambda_i^{-1}}\right\}, \tag{4.4.5}$$

$$\lambda_i = \lambda_i(U) = \lambda_i^{-1}(H^{\top}H).$$

Переменные $x_\perp$ и $x_\parallel$ статистически независимы, поскольку плотность их совместного распределения совпадает с плотностью $p(z)$ ввиду ортогональности P.

Рассмотрим минус-логарифм плотности $p(z)$.

$$J(\theta) \doteq -\ln p(z) = \tfrac{1}{2} z^\top \Pi z + \tfrac{1}{2} z^\top P_\parallel \Lambda_\parallel P_\parallel^\top z - \ln \left|\Lambda_\parallel\right|^{1/2} + \text{const}. \tag{4.4.6}$$

Первое слагаемое есть целевая функция ВМ (ОР). Зависимость от ϱ^2 вся сосредоточена во втором и третьем слагаемых. Рассмотрим предельные случаи.

Первый предельный случай: $\varrho \to 0$. Из формулы (4.4.5) следует сходимость $\Lambda_\parallel \to I_{n_\parallel}$ и $\ln \left|\Lambda_\parallel\right|^{1/2} \to 0$. Учитывая, что $z^\top P_\parallel P_\parallel^\top z = z^\top (I - \Pi) z$, получаем предельное значение функции правдоподобия (опуская константу)

$$J(\theta) \underset{\varrho \to 0}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2} z^\top \Pi z + \tfrac{1}{2} z^\top (I - \Pi) z = \tfrac{1}{2} z^\top z.$$

Это предельное значение не зависит от θ, ввиду предположения о нулевом мат. ожидании величины w. Для получения более содержательного результата в этом предельном случае необходимо ввести ненулевое мат. ожидание w.

Второй предельный случай: $\varrho \to \infty$. Из формулы (4.4.5) следует сходимость $\Lambda_\parallel \to \operatorname{diag} \frac{\lambda_i}{\varrho^2} \to 0$, откуда следует, что второе слагаемое в формуле (4.4.6) ($\frac{1}{2} z^\top P_\parallel \Lambda_\parallel P_\parallel^\top z$) не дает вклада в результат минимизации, становясь пренебежимо малым по сравнению с первым слагаемым $\frac{1}{2} z^\top \Pi z$. Обратим внимание на третье слагаемое $-\ln \left|\Lambda_\parallel\right|^{1/2}$. Его предельное значение бесконечно:

$$-\ln \left|\Lambda_\parallel\right|^{1/2} \to -\ln \left|\operatorname{diag} \frac{\lambda_i}{\varrho^2}\right|^{1/2} = -\tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\varrho^2} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_{n_\parallel}}{\varrho^2} \right) =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\varrho^2} \right) - \ldots - \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda_{n_\parallel}}{\varrho^2} \right) \to \infty.$$

Тем не менее, большое значение этого слагаемого при $\varrho \to \infty$ не мешает получить функцию потерь вариационного метода. Действительно, зависимость от параметра θ вся сосредоточена в собственных числах λ_i. Раскрывая скобки в последнем выражении, получаем

$$-\ln \left|\Lambda_\parallel\right|^{1/2} \to -\tfrac{1}{2} \ln \lambda_1 - \ldots - \tfrac{1}{2} \ln \lambda_{n_\parallel} + \tfrac{1}{2} n_\parallel \ln \sigma^2.$$

Отсюда следует, что при сколь угодно больших, но конечных σ последнее слагаемое является константой и потому не влияет на результат минимизации. Результат определяется функцией потерь

$$J_1 = \tfrac{1}{2} z^\top \Pi z - \tfrac{1}{2} \ln \lambda_1 - \ldots - \tfrac{1}{2} \ln \lambda_{n_\parallel}. \tag{4.4.7}$$

Заметим, что J_1 не совпадает с функцией потерь вариационного метода. Следовательно, распределение с плотностью $p(z)$ (4.4.2), на первый взгляд, не является искомым оптимальным распределением.

б) Получим тот же результат о предельном значении функции правдоподобия, предположив распределение переменных w равномерным на шаре $B_\varrho \subset \mathbb{R}^{n_\parallel}$ большого радиуса ϱ, $w \in \mathbf{U}(0, B_\varrho)$. В этом случае плотность w дается выражением $p(w) = \frac{1}{|B_\varrho|}\mathrm{I}_{B_\varrho}(w)$, где $|B_\varrho|$ — мера (объем) шара B_ϱ, $\mathrm{I}_{B_\varrho}(w)$ — индикаторная функция: $\mathrm{I}_{B_\varrho}(w) = 1$, если $w \in B_\varrho$, и $\mathrm{I}_{B_\varrho}(w) = 0$, если $w \notin B_\varrho$. Интеграл (4.4.1) примет вид

$$p(z) = \int_{w\in B_\varrho} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\, e^{-\frac{1}{2}\|z-Hw\|^2} \frac{1}{|B_\varrho|}\, dw. \tag{4.4.8}$$

Как и ранее, введем переменные

$$x_\perp = P_{H_\perp}^\top (z - Hw) = P_{H_\perp}^\top z,$$

$$x_\parallel = P_{H_\parallel}^\top (z - Hw) = P_H^\top z - Hw, \qquad H_\parallel \doteq H.$$

Эти переменные, как было отмечено, статистически независимы. Ввиду свойств матриц $P_{H_\perp}$ и P_H показатель экспоненты под интегралом запишется в виде

$$-\tfrac{1}{2}\|z - Hw\|^2 = -\tfrac{1}{2}\|\,(z - Hw)_\perp\,\|^2 - \tfrac{1}{2}\|\,(z - Hw)_\parallel\,\|^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\|P_{H_\perp} P_{H_\perp}^\top\,(z - Hw)\,\|^2 - \tfrac{1}{2}\|P_H P_H^\top\,(z - Hw)\,\|^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\|P_{H_\perp} P_{H_\perp}^\top z\|^2 - \tfrac{1}{2}\|P_H P_H^\top z - Hw\|^2.$$

Интеграл (4.4.8) приобретает вид

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\perp}}}\, e^{-\frac{1}{2}\|P_{H_\perp} P_{H_\perp}^\top z\|^2} \cdot \frac{1}{|B_\varrho|}\, \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\parallel}}} \int_{w\in B_\varrho} e^{-\frac{1}{2}\|P_H P_H^\top z - Hw\|^2} dw \doteq$$

$$\doteq p(z_\perp) \cdot p(z_\parallel).$$

Показатель экспоненты в первом сомножителе указывает на функцию потерь вариационного метода. Чтобы увидеть это, достаточно проверить равенство

$$\|P_{H_\perp} P_{H_\perp}^\top z\|^2 = z^\top G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} Gz.$$

Выполним интегрирование во втором сомножителе, устремив радиус шара B_ϱ к бесконечности. Предложим следующую замену переменных:

$$w = \left(H^\top H\right)^{-\,1/2} y, \qquad dw = \left|H^\top H\right|^{-\,1/2} dy.$$

Предельное по $\varrho \to \infty$ значение интеграла дается выражением

$$p(z_\parallel) \to \frac{1}{|B_\varrho|}\, \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\parallel}}} \int e^{-\frac{1}{2}\|P_H P_H^\top z - Hw\|^2} dw =$$

$$= \frac{1}{|B_\varrho|} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\|}}} \int e^{-\frac{1}{2}\|P_H P_H^\top z - P_H y\|^2} \left|H^\top H\right|^{-1/2} dy.$$

Ввиду свойства $P_H^\top P_H = I$, последнее выражение преобразуется к виду

$$p(z_\|) \to \frac{\left|H^\top H\right|^{-1/2}}{|B_\varrho|} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\|}}} \int e^{-\frac{1}{2}\|P_H^\top z - y\|^2} dy =$$

$$= \frac{\left|H^\top H\right|^{-1/2}}{|B_\varrho|}.$$

Мы получили, что предельное по $\varrho \to \infty$ значение плотности $p(z)$ имеет вид

$$p(z) \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_\|}}} e^{-\frac{1}{2}\|P_{H_\perp} P_{H_\perp}^\top z\|^2} \cdot \frac{\left|H^\top H\right|^{-1/2}}{|B_\varrho|}.$$

Взятие логарифма этого выражения и отбрасывание констант приводит к функции потерь J_1, описанной выше формулой (4.4.7). Она не является функцией потерь вариационного метода, если собственные числа $\lambda_i(H^\top H)$ зависят от параметра θ.

К этому выводу мы приходим независимо от распределения w, нормальное оно или равномерное на шаре.

Решение "проблемы" зависимости $\lambda_i(H^\top H)$ от θ состоит в следующем. Учтем, что зависимость распределения z от параметра θ вся сосредоточена в матрице G_θ. Ввиду этого в выражении $\eta = z - Hw$ зависимость от параметра θ присутствует неявным образом, а именно, *матрицу H следует понимать как составленную из столбцов, которые образуют собой некоторый произвольным образом выбранный базис подпространства $\mathcal{N}(G_\theta)$*. Если считать H матрицей марковских параметров A, B, C, D (1.2.8), то в выражении (4.4.7) числа $\lambda_i = \lambda_i^{-1}(H^\top H)$ будут зависеть от θ. Этот случай интересен только тем, что при таком выборе H переменные w имеют ясный смысл — они являются совокупностью начальных условий и переменных правой части уравнения модели. Но ничто не мешает взять за основу некоторый *ортогональный* базис $\mathcal{N}(G_\theta)$, и вместо H использовать матрицу $P = H(H^\top H)^{-1/2}$, соответствующую этому базису. Переменные w в этом случае уже не будут составлены из начальных условий и правой части уравнения модели, но, как мы видели выше, распределение этих переменных не влияет на интересующее нас предельное распределение, лишь бы оно в предельном случае "размазывалось" по подпространству $\mathbb{R}^{\dim\{w\}}$. Несложно увидеть, что при выборе $H = P$ собственные числа λ_i не будут зависеть от θ, ввиду очевидного равенства $\lambda_i^{-1}(H^\top H) = \lambda_i^{-1}(P^\top P) = 1$. Тогда предельное значение минус-логарифма плотности $p(z)$ будет совпадать по экстремальным точкам с целевой функцией вариационного метода. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы и следствия 2 теорем 4.1.2, 4.1.3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.4.2. *Пусть дано множество наблюдений* $\left\{\check{z}_{(i)} = H(\theta_*)w_{(i)} + \eta_{*(i)},\ i \geqslant 1\right\}$ *и возмущения* $\eta_{*(i)}$ *распределены нормально*: $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}\left(0, \sigma^2 I\right)$. *Пусть при этом величины* $w_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_\parallel}$ *являются н. о. р. случайными векторами с распределением одного из двух видов*: (а) *нормальное* $w_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$ *или* (б) *равномерное на шаре* B_ϱ *радиуса* ϱ *с центром в нуле,* $w_{(i)} \in \mathbf{U}(0, B_\varrho)$. *Тогда в пределе* $\varrho/\sigma \to \infty$ *оценка* ВМ $\theta_{\mathtt{V},L}$ (3.3.11), (3.3.12) *параметра* θ_* *является асимптотически эффективной по* $L \to \infty$ *и имеет дисперсию*

$$\operatorname{cov} L^{1/2}(\theta_L - \theta_*) \underset{L\to\infty,\ \varrho/\sigma\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \left(\mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}.$$

Заметим, что при $\varrho/\sigma \to \infty$ выражение в правой части стремится к нулю ввиду соотношения $V_*^\top C V_* \sim O(\varrho^2)$.

Утверждение, полностью подобное теореме 4.4.2, имеет место для оценок ОР (3.3.11), (3.3.13) — нужно заменить матрицы $H(\theta_*)$, $D^\top V_*^\top C V_* D$ на матрицы $H_{\mathtt{OR}}(\theta_*)$, $D^\top V_{*\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} V_{*\mathtt{OR}} D$.

4.5 Сравнение с результатами У. Фуллера

До настоящего времени наиболее полным исследованием по оценкам ортогональной регрессии является монография У. Фуллера (1987) [154]. В монографии [154] проведено исчерпывающее рассмотрение случая нединамических моделей ($p = 0$) с матрицами общего вида $G_\theta = (I, B_\theta)$ (1.1.1), (3.1.6) без ограничений на структуру B_θ. Вектор θ оцениваемых параметров совпадает с вектором всех элементов B_θ: $\theta = \operatorname{vect} B$. При таком выборе параметризации заведомо гарантирована различимость (i") (с. 128). Поскольку при неизвестной дисперсии возмущений параметры θ в общем случае неидентифицируемы*), предполагается существование алгоритма (теорема 4.2.1 в [154]), обеспечивающего состоятельные оценки дисперсии возмущений при известных первых моментах распределений (см. [154], теорема 4.1.2, 4.1.4 и др.). Заметим, что в диссертации мы всюду предполагаем матрицы дисперсий известными. У. Фуллером получен ряд очень красивых теорем о состоятельности и асимптотических свойствах оценок параметра θ при разного вида целевых функциях (теоремы 4.1.2, 4.1.5, 4.В.2 в [154]). С формальной точки зрения можно было бы попытаться отттолкнуться от результатов Фуллера и исследовать свойства вариационных оценок параметров динамических моделей ($p > 0$) как частных случаев моделей общего вида G_θ со специальной параметризацией $\theta \to G_\theta$. Но оказывается, что условие клеточной теплицевости G_θ и возникающие отсюда ограничения на параметризацию $\theta \to G_\theta$ приводят к выкладкам и выражениям не менее простым, чем независимое доказательство теорем 3-й и 4-й главы диссертации. Например, в теореме 4.В.2 [154] в качестве аппроксимирующей модели для описания

*) Например, в случае $r = 1$, $m = 1$, $p = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ (0.0.8) изменение отношения σ_x/σ_y приводит к изменению направления проецирования на модельную плоскость $(y\ x)\left(\begin{smallmatrix}1\\-\theta\end{smallmatrix}\right) = 0$ (см. рис. на с. 19) и к другому оптимальному значению нормали $\left(\begin{smallmatrix}1\\-\theta\end{smallmatrix}\right)$.

наблюдений используется ковариационная матрица

$$\Sigma_{ZZ} \doteq \mathbf{M}\,\check{z}\check{z}^\top = \mathbf{M}\left(H(\theta)w+\eta\right)\left(H(\theta)w+\eta\right)^\top .$$

Целевая функция по Фуллеру имеет вид

$$J(\theta) = -\log\left|\Sigma_{ZZ}(\theta)\right| - \mathrm{Sp}\,\left\{\check{\Sigma}_{ZZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}(\theta)\right\}, \tag{4.5.1}$$

где $\check{\Sigma}_{ZZ}$ — эмпирическая ковариация наблюдений. Для динамических систем ($p>0$) структура матрицы $H(\theta)$ (1.2.8) такова, что задача минимизации целевой функции (4.5.1) становится весьма непростой. См. известный пример А. Галланта (1986) [155] (частный случай скалярных однородных систем с $r=1$, $m=0$), в котором $H(\theta) \doteq H(\alpha_i,\omega_i) = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i e^{\omega_i t_i}$. Этот пример обсуждается Л. Глэзером (1990) [159].

В наших обозначениях, в монографии У. Фуллера (1987) [154] исследовались статистические свойства оценок ОР $\theta_{\mathtt{OR}}$ (3.3.13). Проведем сравнение теоремы 4.1.2 с теоремой 4.1.5 из [154]. Для упрощения выкладок ограничимся случаем возмущений $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0,\sigma^2 I)$ (3.2.1) с известной дисперсией σ^2 . В этом частном случае теорема 4.1.5 Фуллера [154] принимает следующий вид.

Теорема 4.5.1. *Пусть*

$$\begin{array}{rcl}
y_{*(i)}[k] &=& \beta_*^\top x_{*(i)}[k], \qquad k\in\overline{1,N}, \qquad i\in\overline{1,L},\\
z_{*(i)}[k] &\doteq& \left(\begin{smallmatrix} y_{*(i)}[k] \\ x_{*(i)}[k]\end{smallmatrix}\right), \qquad M_{xx} \doteq \lim\limits_{L\to\infty}\mathop{\mathbf{M}}\limits_{i=1}^{L} x_{*(i)}[k]x_{*(i)}^\top[k] > 0,\\
\check{z}_{(i)}[k] &=& z_{*(i)}[k] + \eta_{*(i)}[k], \qquad \eta_{*(i)}[k] \doteq \left(\begin{smallmatrix} e_{*(i)}[k] \\ u_{*(i)}[k]\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{N}(0,\sigma^2 I),\\
\check{y}_{(i)}[k] &=& \beta_*^\top \check{x}_{(i)}[k] + v_{*(i)}[k], \qquad \Sigma_{vv} \doteq \mathbf{M}\,v_{*(i)}[k]v_{*(i)}^\top[k],\\
\rho_{*(i)}[k] &\doteq& u_{*(i)}[k] - \Sigma_{uv}\Sigma_{vv}^{-1}v_{*(i)}[k], \qquad \Sigma_{\rho\rho} \doteq \mathbf{M}\,\rho_{*(i)}[k]\rho_{*(i)}^\top[k],\\
\theta_* &\doteq& \mathrm{vect}\,\beta_*.
\end{array}$$

И пусть $\theta_{\mathtt{OR},L}$ *есть оценка ортогональной регрессии из формулы* (3.3.13), *распространенной на случай* $L>1$, *т. е.*

$$\theta_{\mathtt{OR},L} \doteq \arg\min_\theta \min_{G_{\mathtt{OR}} z_{(i)}=0,\; i\in\overline{1,L}} \mathop{\mathbf{M}}\limits_{i=1}^{L} \left\|\check{z}_{(i)} - z_{(i)}\right\|^2, \qquad z_{(i)} = \left(z_{(i)}[1];\ldots;z_{(i)}[N]\right).$$

Тогда оценка $\theta_{\mathtt{OR},L}$ *асимптотически по* $L\to\infty$ *нормальна с дисперсией, определяемой выражением*

$$\lim_{L\to\infty}\mathrm{cov}\,L^{1/2}\left(\theta_{\mathtt{OR},L}-\theta_*\right) = \Sigma_{vv}\otimes\left[M_{xx}^{-1} + M_{xx}^{-1}\Sigma_{\rho\rho}M_{xx}^{-1}\right].$$

Покажем, что эта теорема является следствием теоремы 4.1.2.

При $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$ утверждение теоремы 4.1.2 принимает вид

$$\lim_{L\to\infty} \operatorname{cov} L^{1/2} (\theta_L - \theta_*) = Q_*^{-1} \left(\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top\right) Q_*^{-1}, \tag{4.5.2}$$

$$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^\top = \sigma^2 Q_* + \sigma^2\, \mathbf{M}\, D^\top \left(\widehat{V} - V_*\right)^\top C \left(\widehat{V} - V_*\right) D,$$

$$Q_* \doteq \mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D.$$

Согласно условию теоремы 4.5.1, $p = 0$, $\gamma_* \doteq \gamma_0(\theta_*) = \left(I \;\; -\beta_*^\top \right)$ (3.1.4). Тогда $\theta_L = \theta_{\mathtt{OR},L}$,

$$\begin{aligned} v_{*(i)}[k] &= \gamma_* \eta_{*(i)}[k], \\ \Sigma_{vv} &= \sigma^2 \gamma_* \gamma_*^\top, \\ \Sigma_{uv} &\doteq \mathbf{M}\, u_{*(i)}[k] v_{*(i)}^\top[k] = \sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \gamma_*^\top = -\sigma^2 \beta, \\ \Sigma_{\rho\rho} &= \sigma^2 \left(I - \beta \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \beta^\top \right) = \sigma^2 \left(I + \beta \beta^\top \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Далее, опуская индекс (i),

$$\begin{aligned} D^\top V_*^\top C V_* D &= \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} x_*[k] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_*[k] \end{pmatrix} \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_*^\top[k] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_*^\top[k] \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \otimes \left(x_*[k] x_*^\top[k] \right) = \\ &= \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \otimes \left(\sum_{k=1}^{N} x_*[k] x_*^\top[k] \right) \doteq \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \otimes \left(V_{*x}^\top V_{*x} \right) = \\ &= \sigma^2 \Sigma_{vv}^{-1} \otimes \left(V_{*x}^\top V_{*x} \right). \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Здесь $V_* D \doteq \begin{pmatrix} V_{*y} & V_{*x} \end{pmatrix} \binom{0}{I} = V_{*x}$. Тогда

$$Q_* = \mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D = \mathbf{M}\, D^\top V_{*(i)}^\top C V_{*(i)} D = \sigma^2 \Sigma_{vv}^{-1} \otimes M_{xx},$$

$$Q_*^{-1} = \sigma^{-2} \Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}.$$

Аналогично (4.5.3) получаем равенство (также опуская индекс (i))

$$D^\top \left(\widehat{V} - V_*\right)^\top C \left(\widehat{V} - V_*\right) D = \sigma^2 \Sigma_{vv}^{-1} \otimes \left[D^\top \left(\widehat{V} - V_*\right)^\top \left(\widehat{V} - V_*\right) D \right].$$

Заметим, что $\widehat{V} - V_* = (V_* + E)\,\Pi - V_* = E\Pi$, где $\Pi \doteq \left(I - \gamma_*^\top \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \gamma_* \right)$ и $\mathbf{M}\, E^\top E = \sigma^2 I$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\, D^\top \left(\widehat{V} - V_*\right)^\top \left(\widehat{V} - V_*\right) D &= \sigma^2 \left(0 \;\; I \right) \Pi \binom{0}{I} = \\ &= \sigma^2 \left(I - \beta \left(\gamma_* \gamma_*^\top\right)^{-1} \beta^\top \right) = \Sigma_{\rho\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда следует
$$\mathbf{M}\, D^\top \left(\widehat{V} - V_*\right)^\top C \left(\widehat{V} - V_*\right) D = \sigma^2 \Sigma_{vv}^{-1} \otimes \Sigma_{\rho\rho}.$$
После подстановки полученных выражений в (4.5.2) приходим к утверждению теоремы 4.5.1:

$$\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty} \operatorname{cov} L^{1/2} \left(\theta_{\mathtt{OR},L} - \theta_*\right) = \\
&\quad = \left(\sigma^{-2}\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right) \left[\sigma^2 \left(\sigma^{-2}\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right)^{-1} + \sigma^4 \Sigma_{vv}^{-1} \otimes \Sigma_{\rho\rho}\right] \left(\sigma^{-2}\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right) = \\
&\quad = \left(\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right) + \left(\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right) \left(\Sigma_{vv}^{-1} \otimes \Sigma_{\rho\rho}\right) \left(\Sigma_{vv} \otimes M_{xx}^{-1}\right) = \\
&\quad = \Sigma_{vv} \otimes \left[M_{xx}^{-1} + M_{xx}^{-1} \Sigma_{\rho\rho} M_{xx}^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Таким образом, при известном распределении возмущений $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$ теорема 4.1.2 обобщает теорему 4.1.5 Фуллера [154] на случай $p > 0$.

4.6 Приложение

4.6.1 Доказательство теоремы 4.1.2

4.6.1.1 Асимптотическая нормальность

Пусть θ^* — точка локального минимума функционала $J \doteq \mathbf{M}\, J_1$, и θ_L — состоятельный корень уравнения $J'_L = 0$: $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \theta^*$ (п.н.).

Лемма 4.6.1. *Если в некоторой окрестности $B(\theta^*)$ точки θ^* существуют непрерывные и ограниченные производные*

$$J'_L, \qquad \partial J'_L/\partial\theta_i, \qquad \partial^2 J'_L/\partial\theta_i\partial\theta_j, \qquad i,j \in \overline{1,v},$$

то случайная величина $L^{1/2}(\theta_L - \theta^*)$ асимптотически нормальна с нулевым мат. ожиданием и дисперсией

$$\left(\mathbf{M}\, J''_1\right)^{-1} \left(\mathbf{M}\, J'_1 J'^\top_1\right) \left(\mathbf{M}\, J''_1\right)^{-1},$$

где производные J'_1 и J''_1 берутся в точке θ^*.

Доказательство. Будем следовать схеме [105, 5f.2], сделав необходимые обобщения на многомерный случай $v > 1$. Зададим число L_B: $\forall L > L_B \quad \theta_L \in B(\theta^*)$ (п.н.). Везде далее считаем $L > L_B$. По условию, в окрестности $B(\theta^*)$ существуют непрерывные ограниченные производные

$$J'_L, \qquad \partial J'_L/\partial\theta_i, \qquad \partial^2 J'_L/\partial\theta_i\partial\theta_j, \qquad i,j \in \overline{1,v}.$$

Примем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&J'_L = (\partial J_L/\partial\theta_1; \dots; \partial J_L/\partial\theta_v) \doteq \left\| J'_{L,i} \right\|^i \in \mathbb{R}^{v\times 1},\\
&J''_L \doteq \left\| \partial J'_{L,i}/\partial\theta_j \right\|^i_j \in \mathbb{R}^{v\times v},\\
&J'''_{L,k} \doteq \left\| \partial^2 J''_{L,k}/\partial\theta_i\partial\theta_j \right\|^i_j \in \mathbb{R}^{v\times v}, \qquad k \in \overline{1,v}.
\end{aligned}
$$

Разложим градиент $J'_L(\theta_L)$ в ряд Тейлора относительно точки θ^* с остаточным членом:

$$
\begin{gathered}
J'_L(\theta_L) = 0 = J'_L(\theta^*) + J''_L(\theta^*)\cdot(\theta_L - \theta^*) + R,\\
R \doteq \begin{pmatrix} R_1\\ \vdots\\ R_v\end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} A_1\\ \vdots\\ A_v\end{pmatrix}(\theta_L - \theta^*) \doteq A\cdot(\theta_L - \theta^*),\\
R_k \doteq \frac{1}{2}(\theta_L - \theta^*)^\top \cdot J'''_{L,k}(\theta^{(k)})\cdot(\theta_L - \theta^*),\\
\theta^{(k)} \doteq \theta^* + h_k(\theta_L - \theta^*), \qquad h_k \in (0,1).
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем

$$
0 = L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + \left[J''_L(\theta^*) + A\right]^{-1}\cdot L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*).
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + \left[J''(\theta^*)\right]^{-1}\cdot L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*) =\\
&\qquad = -\left\{\left[J''_L(\theta^*) + A\right]^{-1} - \left[J''(\theta^*)\right]^{-1}\right\}\cdot L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*) \doteq\\
&\qquad\qquad \doteq -E_L\cdot L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*).
\end{aligned}
$$

По центральной предельной теореме, случайная величина

$$
L^{1/2}\cdot J'_L(\theta^*) \doteq L^{1/2}\cdot\sum_{i=1}^{L} J'_{(i)}(\theta^*)
$$

имеет предельное нормальное распределение $\mathbf{N}(\mu, \Sigma^2)$:

$$
\mu \doteq \mathbf{M}\, J'_{(i)}(\theta^*) = 0, \qquad \Sigma^2 \doteq \mathbf{M}\, J'_{(i)}(\theta^*)\cdot J'^{\top}_{(i)}(\theta^*),
$$

$$
J'_{(i)} \doteq \partial J_{(i)}(\theta)/\partial\theta, \qquad J_{(i)}(\theta) \doteq \min_w \|\tilde{z}_{(i)} - H(\theta)w\|^2.
$$

Напомним, $\mathbf{M}\, J_{(i)}(\theta) = \mathbf{M}\, J_1(\theta)$, $J_1(\theta) = J_{(1)}(\theta)$ (см. (3.3.11)).

Далее, $E_L \to 0$ (п.н.), поскольку

1) по усиленному закону больших чисел $J''_L(\theta^*) \to J''(\theta^*) \doteq \mathbf{M}\, J''_1(\theta^*)$ (п.н.);

2) $\theta_L \to \theta^*$ (п.н.) (теорема 3.4.1);

3) $A_k = \frac{1}{2}(\theta_L - \theta^*)^\top \cdot J'''_{L,k}(\theta^{(k)})$, производные $J'''_{L,k}(\theta)$ ограничены в $B(\theta^*)$.

Из сходимости распределения $L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*)$ к нормальному $\mathbf{N}(\mu, \Sigma^2)$, $\Sigma^2 < \infty$, и сходимости п.н. $E_L \to 0$ следует сходимость по вероятности

$$L^{1/2}(\theta_L - \theta^*) + \left[J''(\theta^*)\right]^{-1} \cdot L^{1/2} \cdot J'_L(\theta^*) \to 0.$$

Следовательно, распределение $L^{1/2}(\theta_L - \theta^*)$ сходится к нормальному $\mathbf{N}(0, \Sigma_1^2)$, где

$$\Sigma_1^2 \doteq (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1} \left(\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\top}\right) (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1}.$$

Лемма доказана. □

4.6.1.2 Оценки для производных

Первая и вторая производные функционала $J_1(\theta)$ были вычислены А. О. Егоршиным (1988, 2004) [42, 45], который привел формулы для 2-й производной с использованием специальной матрицы из множителей Лагранжа. В этом разделе получено явное выражение для 2-й производной через элементы матриц G, C, Π без использования множителей Лагранжа, что позволило дать простые оценки сверху для слагаемых в выражении для 2-й производной.

Лемма 4.6.2. *Пусть* $\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta) = \check{z}^{\top} G^{\top} C G \check{z}$, $\omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma$, $\omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2$. *Тогда*

$$\omega' = \gamma^{\top} V^{\top} C \widehat{V}, \qquad V \doteq V(\check{z}), \qquad \widehat{V} \doteq V(\widehat{z}), \qquad \widehat{z} \doteq \Pi \check{z}, \tag{4.6.1}$$

$$\omega'' = \widehat{V}^{\top} C \widehat{V} - S_1 - S_2, \tag{4.6.2}$$

где слагаемые S_1 *и* S_2 *ограничены сверху по евклидовой норме неравенствами:*

$$\|S_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|\check{z}\| \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|, \qquad \|S_2\| \leqslant c_0 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^2,$$

$$c_0 \doteq r(p+1)(m+r)\mathrm{Sp}\, C.$$

Доказательство. Утверждение леммы прямо следует из леммы 5.1.2 главы 5. □

Лемма 4.6.3. *Существует окрестность* $B(\theta^*)$ *точки* θ^*, *в которой функционал* $J_L(\theta)$ (3.3.13), (3.3.12) *имеет непрерывную и ограниченную третью производную* $J_L'''(\theta)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 5.1.5 главы 5, где вычислены производные и даны оценки для их нормы. Тем не менее, приведем здесь рассуждения, которые доказывают лемму без вычисления производных. Отметим, что матрица G_θ системы (3.3.1) при ограничениях (i)–(ii) на с. 91 непрерывно дифференцируема по θ.

Функционал $J_L(\theta)$ имеет непрерывную третью производную по θ, если (и только если) непрерывную третью производную по θ имеет определенная в условии леммы 4.6.2 функция $\omega(\theta) \doteq \omega(\gamma_\theta)$. Согласно лемме 4.6.2,

$$\omega''_{\theta\theta} = D^{\top} \omega''_{\gamma\gamma} D =$$

$$= D^\top(\widehat{V}^\top C\widehat{V} - S_1 - S_2)D \doteq D^\top(S_0 - S_1 - S_2)D,$$

где S_0, S_1, S_2 — матрицы, столбцы и строки которых пронумерованы индексами q и l, так что

$$S_0^{ql} \doteq \check{z}^\top \Pi E_q^\top C E_l \Pi \check{z} \doteq \widehat{V}_q^\top C \widehat{V}_l,$$

$$S_1^{ql} \doteq \check{z}^\top G^\top C(E_q G^\top C E_l + E_q G^\top C E_l)\Pi \check{z},$$

$$S_2^{ql} \doteq \check{z}^\top G^\top C E_q \Pi E_l^\top C G \check{z}.$$

Далее не будем вычислять производную $\omega''' \doteq \partial\omega''/\partial\theta$, а поступим следующим образом. Учитывая определение $\Pi \doteq I - G^\top C G$, заметим, что функция $\omega''(\theta)$ имеет вид $\omega''(\theta) \equiv \varphi(C_\theta, G_\theta)$, где $\varphi(C, G)$ — биквадратичная форма от матричных аргументов C, G размеров соответственно $n \times n$ и $n \times l$. Матриц-функция G_θ непрерывно дифференцируема и имеет для всех $\theta \in \Theta$ линейно независимые строки. Следовательно, матриц-функция $C_\theta \doteq [G_\theta G_\theta^\top]^{-1}$ в замкнутом подмножестве $B_1(\theta^*) \subset \Theta$ непрерывно дифференцируема и ограничена, поскольку матриц-функция $[G_\theta G_\theta^\top]^{-1}$ непрерывна и ограничена в $B_1(\theta^*)$ и имеет место равенство

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}[G_\theta G_\theta^\top]^{-1} = [G_\theta G_\theta^\top]^{-1} \cdot \tfrac{\partial}{\partial\theta}[G_\theta G_\theta^\top] \cdot [G_\theta G_\theta^\top]^{-1}.$$

Отсюда следует, что суперпозиция $\varphi(C_\theta, G_\theta) = \omega''(\theta)$ во внутренних точках множества $B_1(\theta^*)$ имеет непрерывную производную

$$\tfrac{\partial}{\partial\theta}\varphi(C_\theta, G_\theta) = \omega'''(\theta),$$

и в замкнутом подмножестве $B_2(\theta^*) \subset B_1(\theta^*)$ эта производная ограничена. Следовательно, она ограничена в любой окрестности $B(\theta^*) \subset B_2(\theta^*)$ точки θ^*. Лемма доказана. $\square$

4.6.1.3 Математические ожидания квадрата градиента и второй производной

Обозначим, как и в условии теоремы 4.1.2,

$$\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta), \qquad \omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma \doteq \|\partial\omega/\partial\gamma^q\| \doteq \|\omega'_q\|,$$

$$\omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2 \doteq \|\partial^2\omega/\partial\gamma^q\partial\gamma^l\| \doteq \|\omega''_{ql}\|.$$

Лемма 4.6.4. *В точке* $\theta = \theta_*$:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \mathbf{M}\,\omega'\omega'^{\top} & = & \sigma^2\,\mathbf{M}\,\omega'' + \sigma^4 X^{\top}X + (\omega^4 - 3\sigma^4)Y^{\top}Y, \\
 & X^{\top}X & \doteq & \|x_{ql}\|, \qquad x_{ql} \doteq \operatorname{Sp}\Pi E_q^{\top} C E_l \Pi, \\
 & Y^{\top}Y & \doteq & \|y_{ql}\|, \qquad y_{ql} = \operatorname{Sp}\left(W_q^{\top} * W_l\right), \qquad W_l \doteq G^{\top} C E_l \Pi, \\
(2) & & & y_{ql}^2 \leqslant x_{qq}x_{ll}, \\
(3) & \sigma^2 x_{ql} & = & \mathbf{M}\left(\widehat{V} - V_*\right)_q^{\top} C \left(\widehat{V} - V_*\right)_l, \\
(4) & \mathbf{M}\,\omega'' & = & \mathbf{M}\,V_*^{\top} C V_*.
\end{array}
$$

Доказательство. 1) Установим одно несложное равенство. Пусть A, B — матрицы размеров $n \times n$, такие, что для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $Ax = 0$ и $x^{\top}B = 0$. И пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — случайная величина с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов: $\mathbf{M}\,ee^{\top} = \sigma^2 I$. Тогда

$$
\mathbf{M}(x+e)^{\top}A(x+e)(x+e)^{\top}B(x+e) = \tag{4.6.3}
$$

$$
= \sigma^2\,\mathbf{M}\,x^{\top}ABx + \mathbf{M}\,e^{\top}Aee^{\top}Be
$$

(для доказательства следует заметить, что после раскрытия скобок в левой части равенства мат. ожидание слагаемых, в которые вектор e входит нечетное число раз, равно нулю).

Далее положим в (4.6.3) $A \doteq \Pi E_q^{\top} C G$, $B \doteq G^{\top} C E_l \Pi$, $x \doteq z_*$, $e \doteq \eta$. В результате, используя (5.1.24), получим

$$
\mathbf{M}\,\omega_q'\omega_l' = \sigma^2\,\mathbf{M}\,V_{*q}^{\top} C V_{*l} + \mathbf{M}\,\eta^{\top}\Pi E_q^{\top} C G \eta\eta^{\top} G^{\top} C E_l \Pi \eta.
$$

Для второго слагаемого применим предложение 4.6.1:

$$
\mathbf{M}\,\eta^{\top}A\eta\eta^{\top}B\eta = (\omega^4 - 3\sigma^4)\operatorname{Sp}\,(A * B) + \sigma^4\left(\operatorname{Sp}AB + \operatorname{Sp}AB^{\top} + \operatorname{Sp}A\operatorname{Sp}B\right).
$$

Подстановки $A = \Pi E_q^{\top} C G$ и $B = G^{\top} C E_l \Pi$ приводят к соотношениям (учитывая тождество $\operatorname{Sp}XY = \operatorname{Sp}YX$):

$$
AB^{\top} = 0, \qquad \operatorname{Sp}A = \operatorname{Sp}\Pi E_q^{\top} C G = \operatorname{Sp} G \Pi E_q^{\top} C = 0,
$$

$$
AB = \Pi E_q^{\top} C E_l \Pi.
$$

Обозначим $A \doteq W_q^{\top}$, $B \doteq W_l$. Ввиду тождества $\operatorname{Sp}A * B = \operatorname{Sp}A^{\top} * B$ имеем

$$
\mathbf{M}\,\omega_q'\omega_l' = \sigma^2\,\mathbf{M}\,V_{*q}^{\top} C V_{*l} + \sigma^4 \operatorname{Sp}\Pi E_q^{\top} C E_l \Pi + (\omega^4 - 3\sigma^4)\operatorname{Sp}W_q^{\top} * W_l.
$$

Мы получили 1-е утверждение леммы.

2) Согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\mathrm{Sp}\, W_q^\top * W_l \leqslant \sqrt{\left(\mathrm{Sp}\, W_q^\top * W_q\right)\left(\mathrm{Sp}\, W_l^\top * W_l\right)} \leqslant \sqrt{\left(\mathrm{Sp}\, W_q^\top W_q\right)\left(\mathrm{Sp}\, W_l^\top W_l\right)}.$$

Обозначим $x_{ql} \doteq \mathrm{Sp}\, \Pi E_q^\top C E_l \Pi$, $y_{ql} \doteq \mathrm{Sp}\, \left(W_q^\top * W_l\right)$. Учтем равенства

$$W_q^\top W_q = \Pi E_q^\top C E_q \Pi, \qquad \mathrm{Sp}\, W_q^\top W_q = x_{qq}.$$

Отсюда следует 2-е утверждение леммы.

3) Заметим, что имеет место равенство

$$\sigma^4 \mathrm{Sp}\, \Pi E_q^\top C E_l \Pi = \sigma^2\, \mathbf{M}\, \eta^\top \Pi E_q^\top C E_l \Pi \eta.$$

Кроме того, $\eta = \check{z} - z_*$ и $\eta_\| = \Pi\eta = \Pi(\check{z} - z_*) = \widehat{z} - z_*$. Поэтому

$$\sigma^4 \mathrm{Sp}\, \Pi E_q^\top C E_l \Pi = \sigma^2\, \mathbf{M} (\widehat{V} - V_*)_q^\top C (\widehat{V} - V_*)_l.$$

Отсюда следует 3-е утверждение леммы.

4) Согласно определениям

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M} (\check{z}^\top G^\top C G \check{z})'' = \mathbf{M}\, \check{z}^\top (G^\top C G)'' \check{z}.$$

Подставив $\check{z} = z_* + \eta$, получим

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, z_*^\top (G^\top C G)'' z_* + \mathbf{M}\, \eta^\top (G^\top C G)'' \eta =$$

$$= \mathbf{M}\, z_*^\top (G^\top C G)'' z_* + \sigma^2 \mathrm{Sp}\, (G^\top C G)'' =$$

$$= \mathbf{M}\, z_*^\top (G^\top C G)'' z_* + \sigma^2 (\mathrm{Sp}\, G^\top C G)''.$$

Учтем, что

$$\mathrm{Sp}\, G^\top C G = \mathrm{Sp}\, C G G^\top = \mathrm{Sp}\, I_{\mathrm{rank}\, G} = \mathrm{rank}\, G.$$

Согласно условию (ii) на с. 91, $\mathrm{rank}\, G$ не зависит от параметра θ, поэтому

$$(\mathrm{Sp}\, G^\top C G)'' = 0,$$

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, z_*^\top (G^\top C G)'' z_* = \mathop{\mathbf{M}}_{\check{z} = z_*} \omega''.$$

Применив лемму 4.6.2, получаем $\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, V_*^\top C V_*$. Лемма доказана. □

Учитывая, что $J_1' \doteq J_{1\theta}' = \omega_\gamma' D$ и $J_1'' \doteq J_{1\theta\theta}'' = D^\top \omega_{\gamma\gamma}'' D$, приходим к утверждению теоремы 4.1.2.

4.6.2 Доказательство теоремы 4.1.3

Как было указано в разделе 3.5, оценки ОРМ могут быть охарактеризованы, с одной стороны, как оценки ОР с заменой $\overline{z}$ на $\varPhi\overline{z}$, и с другой стороны, как оценки ВМ с заменой C на $C_{\mathtt{OR}}$. Исходя из этого, построим доказательство теоремы 4.1.3, следуя доказательству теоремы 4.1.2.

1) Лемма 4.6.1 остается без изменения.

2) Лемма 4.6.2 заменяется следующим утверждением.

Лемма 4.6.5. *Пусть*

$$\omega(\gamma_\theta) \doteq J_1(\theta) = \check{z}^\top G^\top C_{\mathtt{OR}} G \check{z} = \check{z}^\top \varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi \check{z},$$

$$\omega' \doteq \partial\omega/\partial\gamma, \qquad \omega'' \doteq \partial^2\omega/\partial\gamma^2.$$

Тогда

$$\omega' = \gamma^\top V^\top C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}}, \qquad V \doteq V(\check{z}), \tag{4.6.4}$$

$$\widehat{V}_{\mathtt{M}} \doteq V_{\mathtt{OR}}(\widehat{z}), \qquad \widehat{z} \doteq \Pi_{\mathtt{OR}} \varPhi \check{z},$$

$$\omega'' = \widehat{V}_{\mathtt{M}}^\top C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}} - S_1 - S_2,$$

где слагаемые S_1 *и* S_2 *ограничены сверху по евклидовой норме неравенствами:*

$$\|S_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|\check{z}\| \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|, \qquad \|S_2\| \leqslant c_0 \cdot \|\check{z} - \widehat{z}\|^2,$$

$$c_0 \doteq r(p+1)(m+r)\|\varPhi\|^2 \mathrm{Sp}\, C_{\mathtt{OR}} \leqslant r(p+1)^2(m+r)^2 N(N-p)\mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.6.2. Следует произвести замену C, G, $\overline{z}$ на $C_{\mathtt{OR}}$, $G_{\mathtt{OR}}$, $\varPhi\overline{z}$ и учесть равенство

$$\|\varPhi\|^2 = (N-p)(p+1)(r+m),$$

которое следует из определений (3.3.17) и того факта, что матрица $\varPhi$ имеет в каждой строке ровно одну единицу и все остальные нули, т. е. квадрат нормы $\varPhi$ равен числу строк. □

3) Лемма 4.6.3 сохраняет силу (в доказательстве следует произвести замену C, G, $\overline{z}$ на $C_{\mathtt{OR}}$, $G_{\mathtt{OR}}$, $\varPhi\overline{z}$).

4) Лемма 4.6.4 заменяется следующим утверждением.

Лемма 4.6.6. *В точке* $\theta = \theta_*$:

1)
$$\mathbf{M}\,\omega'\omega'^\top = \sigma^2\,\mathbf{M}\,V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^4 W,$$

$$0 < W < c_1 I,$$

$$c_1 \doteq r\left(\sigma^{-4}\omega^4 + N(r+m) - 1\right) N^2(p+1)^3(r+m)^2 \mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1},$$

2) $$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\,V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^2 \mathrm{Sp}\,\left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'',$$

$$\mathrm{Sp}\,\left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' \leqslant 4\,(p+1)^{\,3/2}\,N^2\,(r+m)^2\,\mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Доказательство. 1) Из леммы 4.6.5,

$$\omega' \omega'^\top = \widehat{V}_{\mathtt{M}}^\top C_{\mathtt{OR}} V \gamma\gamma^\top V^\top C_{\mathtt{OR}} \widehat{V}_{\mathtt{M}},$$

$$\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \check{z}^\top \varPhi^\top \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi \check{z}\check{z}^\top \varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij} \Pi_{\mathtt{OR}} \varPhi \check{z}.$$

В равенстве (4.6.3) положим

$$A \doteq \varPhi^\top \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi,$$

$$B \doteq \varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}kl} \Pi_{\mathtt{OR}} \varPhi,$$

$$x \doteq z_*, \qquad e \doteq \eta.$$

В результате получим

$$\mathbf{M}\,\omega'_{ij}\omega'_{kl} = \sigma^2\,\mathbf{M}\,V_{*\,ij}^\top C_{\mathtt{OR}} V_{*\,kl} + \\ + \mathbf{M}\,\eta^\top \varPhi^\top \Pi_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}ij}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi \eta\eta^\top \varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} E_{\mathtt{OR}kl} \Pi_{\mathtt{OR}} \varPhi \eta. \quad (4.6.5)$$

Вместо вычисления мат. ожидания второго слагаемого, как это было сделано в доказательстве теоремы 4.1.2, ограничимся получением оценки сверху.

Установим ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 4.6.1. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ *— квадратные матрицы размеров* $n \times n$, *и пусть* η *— случайный вектор с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов:*

$$\mathbf{M}\,\eta = 0, \qquad \mathbf{M}\,\eta\eta^\top = \sigma^2 I_{n\times n}, \qquad \mathbf{M}\,\eta_i^4 \doteq \omega^4.$$

Тогда

$$\mathbf{M}\,\eta^\top A \eta\eta^\top B \eta =$$
$$= (\omega^4 - 3\sigma^4)\left(\sum_i a_{ii}b_{ii}\right) + \sigma^4\left(\sum_{ij} a_{ij}b_{ji} + \sum_{ij} a_{ij}b_{ij} + \sum_{ij} a_{ii}b_{jj}\right) =$$
$$= (\omega^4 - 3\sigma^4)\,\mathrm{Sp}\,(A * B) + \sigma^4\left(\mathrm{Sp}\,AB + \mathrm{Sp}\,AB^\top + \mathrm{Sp}\,A\mathrm{Sp}\,B\right),$$

где знак $*$ *обозначает бинарную операцию покомпонентного произведения матриц одинакового размера:* ij*-й элемент* $A * B$ *есть произведение* ij*-х элементов* A *и* B*:*

$$(A * B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Доказательство. Распишем покомпонентно:

$$\eta^\top A^\top \eta\eta^\top B\eta = \sum_{ijkl} a_{ij}b_{kl}\eta_i\eta_j\eta_k\eta_l =$$

$$= \sum_i \sum_{j=i} (...) + \sum_i \sum_{j\neq i} (...).$$

Первое слагаемое:

$$\sum_i \sum_{j=i} (...) = \sum_i \sum_{j=i} \sum_{k=l} (...) + \sum_i \sum_{j=i} \sum_{k\neq l} (...).$$

$$\sum_i \sum_{j=i} \sum_{k=l} (...) = \sum_i \sum_{j=i} \sum_{\substack{k=l\\k=i}} (...) + \sum_i \sum_{j=i} \sum_{\substack{k=l\\k\neq i}} (...) \doteq C_{iiii} + C_{\substack{iikk\\k\neq i}}.$$

$$\sum_i \sum_{j=i} \sum_{k\neq l} (...) = \sum_i \sum_{j=i} \sum_{\substack{k\neq l\\k=i}} (...) + \sum_i \sum_{j=i} \sum_{\substack{k\neq l\\k\neq i}} (...) \doteq C_{\substack{iiil\\l\neq i}} + C_{\substack{iikl\\k\neq i}}.$$

После взятия мат. ожидания получаем

$$\mathbf{M}\, C_{iiii} = \omega^4 \sum a_{ii}b_{ii} = \omega^4 \mathrm{Sp}\,(A * B)\,,$$

$$\mathbf{M}\, C_{\substack{iikk\\k\neq i}} = \sigma^4 \sum_i a_{ii} \left(\sum_k b_{kk} - b_{ii} \right) = \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, A \mathrm{Sp}\, B - \mathrm{Sp}\,(A * B) \right).$$

Второе слагаемое:

$$\sum_i \sum_{j\neq i} (...) = \sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{k=i} (...) + \sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i} (...).$$

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{k=i} (...) \doteq C_{\substack{ijil\\l\neq i\\j\neq i}} + C_{\substack{ijii\\j\neq i}}.$$

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \sum_{k\neq i} (...) \doteq C_{\substack{ijkl\\j\neq i\\k\neq j}} + C_{\substack{ijjl\\j\neq i}}.$$

После взятия мат. ожидания получаем

$$\mathbf{M}\, C_{\substack{ijil\\ l\neq i\\ j\neq i}} = \mathbf{M}\, C_{\substack{ijij\\ j\neq i}} = \sigma^4 \left(\sum_{ij} a_{ij} b_{ij} - \sum_i a_{ii} b_{ii} \right) = \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB^\top - \mathrm{Sp}\, (A * B) \right).$$

$$\mathbf{M}\, C_{\substack{ijii\\ j\neq i}} = 0, \qquad \mathbf{M}\, C_{\substack{ijkl\\ j\neq i\\ k\neq j}} = 0,$$

$$\mathbf{M}\, C_{\substack{ijjl\\ j\neq i}} = \mathbf{M}\, C_{\substack{ijji\\ j\neq i}} = \sigma^4 \left(\sum_{ij} a_{ij} b_{ji} - \sum_i a_{ii} b_{ii} \right) = \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB - \mathrm{Sp}\, (A * B) \right).$$

Окончательно

$$\mathbf{M}\, \eta^\top A^\top \eta \eta^\top B \eta =$$

$$= \omega^4 \mathrm{Sp}\, (A * B) + \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, A \mathrm{Sp}\, B - \mathrm{Sp}\, (A * B) \right) +$$

$$+ \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB^\top - \mathrm{Sp}\, (A * B) \right) + \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB - \mathrm{Sp}\, (A * B) \right) =$$

$$= \left(\omega^4 - 3\sigma^4 \right) \mathrm{Sp}\, (A * B) + \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB + \mathrm{Sp}\, AB^\top + \mathrm{Sp}\, A \mathrm{Sp}\, B \right).$$

Предложение доказано. □

Следствие 4.6.1. *Если распределение случайной величины η нормальное, то*

$$\mathbf{M}\, \eta^\top A \eta \eta^\top B \eta = \sigma^4 \left(\mathrm{Sp}\, AB + \mathrm{Sp}\, AB^\top + \mathrm{Sp}\, A \mathrm{Sp}\, B \right).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для нормального распределения на $\mathbb{R}$ с нулевым мат. ожиданием верно равенство $\omega^4 = 3\sigma^4$. □

Предложение 4.6.2. *В условиях предложения 4.6.1*

$$\sigma^{-4} \mathbf{M}\, \eta^\top A^\top \eta \eta^\top A \eta =$$

$$= \left(\sigma^{-4} \omega^4 - 3 \right) \mathrm{Sp}\, (A * A) + (\mathrm{Sp}\, A)^2 + \mathrm{Sp}\, A^2 + \mathrm{Sp}\, A^\top A.$$

Доказательство. Применить предложение 4.6.1. □

Следствие 4.6.2. *Если распределение случайной величины η нормальное, то*

$$\sigma^{-4} \mathbf{M}\, \eta^\top A^\top \eta \eta^\top A \eta = (\mathrm{Sp}\, A)^2 + \mathrm{Sp}\, A^2 + \mathrm{Sp}\, A^\top A.$$

Предложение 4.6.3. *Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица размера $n \times n$, и $a \doteq (a_{11}; \ldots; a_{nn})$ — вектор из диагональных элементов A. Тогда*

(1) $$(\mathrm{Sp}\, A)^2 \leqslant n a^\top a \leqslant n \mathrm{Sp}\, A^\top A = n \|A\|^2;$$

(2) $$\mathrm{Sp}\, A * A \leqslant \mathrm{Sp}\, A^\top A;$$

Доказательство. 1) Представим $\mathrm{Sp}\, A$ в виде скалярного произведения $\mathrm{Sp}\, A = a^\top \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \doteq a^\top b$. Тогда

$$(\mathrm{Sp}\, A)^2 = \left(a^\top b\right)^2 \leqslant \left(a^\top a\right)\left(b^\top b\right) = n a^\top a$$

(неравенство Коши—Буняковского). Заключительная часть (1) следует из определений следа Sp и евклидовой нормы $\|\cdot\|$ матрицы.

2) Второе неравенство также следует из определений:

$$\mathrm{Sp}\, A * A \doteq a^\top a \leqslant \mathrm{Sp}\, A^\top A.$$

Предложение доказано. □

Предложение 4.6.4. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ *— квадратные матрицы размера* $n \times n$. *Тогда*

(1) $$(\mathrm{Sp}\, AB)^2 \leqslant \left(\mathrm{Sp}\, A^\top A\right)\left(\mathrm{Sp}\, B^\top B\right);$$

(2) $$\mathrm{Sp}\, A^2 \leqslant \mathrm{Sp}\, A^\top A.$$

Доказательство. В пространстве матриц определим скалярное произведение

$$(A, B) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \mathrm{Sp}\, A^\top B,$$

тогда (1) оказывается неравенством Коши—Буняковского $(A, B)^2 \leqslant (A, A)\,(B, B)$. Неравенство (2) следует из (1) при $B = A$. Предложение доказано. □

Прямым следствием предложений 4.6.2, 4.6.3, 4.6.4 является следующее

Утверждение 4.6.1. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|$ *— квадратная матрица размера* $n \times n$, *и пусть* η *— случайный вектор, компоненты* η_i *которого независимы и имеют одинаковые распределения на* $\mathbb{R}$ *класса* $\mathbf{M}_4(0, \sigma^2, 0, \omega^4)$, *т. е. имеют нулевые 1-й и 3-й моменты, 2-й момент* σ^2 *и 4-й момент* ω^4. *Тогда*

$$\sigma^{-4}\, \mathbf{M}\, \eta^\top A^\top \eta \eta^\top A \eta \leqslant (\sigma^{-4}\omega^4 + n - 1)\mathrm{Sp}\, A^\top A.$$

В частном случае нормального распределения $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$ *ввиду равенства* $\omega^4 = 3\sigma^4$ *в правой части получаем оценку* $(n+2)\mathrm{Sp}\, A^\top A$.

Следствие. *В формуле* (4.6.5) *второе слагаемое ограничено сверху*:

$$\mathbf{M}\,\eta^\top\varPhi^\top\Pi_{\mathtt{OR}}E^\top_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\varPhi\eta\eta^\top\varPhi^\top G^\top_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\varPhi\eta <$$
$$< \sigma^4 c_{N(r+m)}N^2(p+1)^2(r+m)\mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top\gamma_\theta\right)^{-1},$$
$$c_n \doteq \sigma^{-4}\omega^4 + n - 1.$$

Доказательство. Имеет место последовательность неравенств:

$$\mathbf{M}\,\eta^\top\varPhi^\top\Pi_{\mathtt{OR}}E^\top_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\varPhi\eta\eta^\top\varPhi^\top G^\top_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\varPhi\eta \leqslant$$

(утверждение 4.6.1)

$$\leqslant \sigma^4 c_{N(r+m)}\mathrm{Sp}\,\varPhi^\top\Pi_{\mathtt{OR}}E^\top_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}GG^\top C_{\mathtt{OR}}E_{\mathtt{OR}kl}\Pi_{\mathtt{OR}}\varPhi =$$

$$= \sigma^4 c_{N(r+m)}\|\varPhi^\top\Pi_{\mathtt{OR}}E^\top_{\mathtt{OR}ij}C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\varPhi\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sigma^4 c_{N(r+m)}\|\varPhi^\top\varPhi E^\top_{\mathtt{OR}ij}\|^2\|C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\|^2 =$$

(учитывая, что $\|C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}\|^2 = \mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}}G_{\mathtt{OR}}G^\top_{\mathtt{OR}}C_{\mathtt{OR}} = \mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}}$)

$$= \sigma^4 c_{N(r+m)}\|\varPhi^\top\varPhi E^\top_{\mathtt{OR}ij}\|^2\mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}} <$$

(учитывая оценку $\varPhi^\top\varPhi < (p+1)I_{N(r+m)\times N(r+m)}$ и ее следствие $\|\varPhi^\top\varPhi\|^2 < (p+1)^2N(r+m)$, а также неравенство $\|\varPhi^\top\varPhi E^\top_{\mathtt{OR}ij}\|^2 \leqslant \|\varPhi^\top\varPhi\|^2$)

$$< \sigma^4 c_{N(r+m)}(p+1)^2N(r+m)\mathrm{Sp}\,C_{\mathtt{OR}} <$$

$$\leqslant \sigma^4 c_{N(r+m)}N^2(p+1)^2(r+m)\mathrm{Sp}\,\left(\gamma_\theta^\top\gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Следствие доказано. □

Предложение 4.6.5. *Пусть* $W > 0$ *— симметричная п.о. матрица порядка* n, *каждый элемент которой ограничен сверху неравенством* $w_{ij} < c$. *Тогда имеет место оценка* $W < ncI_{n\times n}$.

Доказательство. Отношение $W < U$ по определению означает

$$\forall x \quad x^\top Wx < x^\top Ux.$$

Согласно условию,

$$x^\top Wx = \sum_{ij} x_i w_{ij} x_j < c\sum_{ij} x_i x_j.$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$c\sum_{ij} x_i x_j = cx^\top \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} (1\cdots 1)\, x \leqslant cx^\top x\, (1\cdots 1) \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = ncx^\top x.$$

Следовательно, $W < ncI_{n\times n}$. Предложение доказано. $\square$

Продолжим доказательство леммы 4.6.6. Согласно (4.6.5)

$$\mathbf{M}\, \omega' \omega'^\top = \sigma^2\, \mathbf{M}\, V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^4 W,$$

$$W \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad n \doteq r(r+m)(p+1),$$

и (ij, kl)-й элемент матрицы W по следствию утверждения 4.6.1 ограничен сверху константой

$$c = \left(\sigma^{-4}\omega^4 + N(r+m) - 1\right) N^2 (p+1)^2 (r+m) \mathrm{Sp}\, \left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

По предложению 4.6.5,

$$0 < W < ncI_{n\times n} = r(r+m)(p+1)cI_{n\times n} =$$

$$= r\left(\sigma^{-4}\omega^4 + N(r+m) - 1\right) N^2 (p+1)^3 (r+m)^2 \mathrm{Sp}\, \left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1} I_{n\times n}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\, \omega' \omega'^\top = \sigma^2\, \mathbf{M}\, V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^4 W,$$

$$0 < W < c_1 I_{n\times n},$$

$$c_1 \doteq r\left(\sigma^{-4}\omega^4 + N(r+m) - 1\right) N^2 (p+1)^3 (r+m)^2 \mathrm{Sp}\, \left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}.$$

Первое утверждение леммы доказано.

2) Согласно определениям,

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\left(\check{z}^\top \varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi \check{z}\right)'' = \mathbf{M}\, \check{z}^\top \varPhi^\top \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi \check{z}.$$

Подставив $\check{z} = z_* + \eta$, получим

$$\mathbf{M}\, \omega'' = \mathbf{M}\, z_*^\top \varPhi^\top \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi z_* + \mathbf{M}\, \eta^\top \varPhi^\top \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi \eta =$$

$$= \mathbf{M}\, z_*^\top \varPhi^\top \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi z_* + \sigma^2 \mathrm{Sp}\, \left(\varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi\right)''.$$

Рассмотрим последний сомножитель.

$$\mathrm{Sp}\, \left(\varPhi^\top G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}} \varPhi\right)'' = \mathrm{Sp}\, \left(G^\top C_{\mathtt{OR}} G\right)'' = \left(\mathrm{Sp}\, G^\top C_{\mathtt{OR}} G\right)'' = \tag{4.6.6}$$

$$= \left(\mathrm{Sp}\, C_{\mathtt{OR}} G G^\top\right)'' = \left(\mathrm{Sp}\, C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' = \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''.$$

Учитывая эту цепочку равенств, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\omega'' &= \mathbf{M}\, z_*^\top \varPhi^\top \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi z_* + \sigma^2 \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' = \\ &= \mathbf{M}\,\omega''(\check{z} = z_*) + \sigma^2 \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''. \end{aligned}$$

Применив лемму 4.6.5 с учетом $\theta = \theta_*$, $\check{z} = z_*$ и равенства $\widehat{V}_{\mathtt{M}}(\check{z} = z_*) = V(z_*) \doteq V_*$, получим

$$\mathbf{M}\,\omega'' = \mathbf{M}\, V_*^\top C_{\mathtt{OR}} V_* + \sigma^2 \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)''.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' = \mathrm{Sp}\, \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi \varPhi^\top = \tag{4.6.7}$$

(см. (5.1.24) с переобозначением $C \doteq C_{\mathtt{OR}}$, $G \doteq G_{\mathtt{OR}}$, $t \doteq l$)

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Sp}\, \left\{\Pi E_l^\top C E_q \Pi - \right. \\ &- G^\top C \left(E_l G^\top C E_q + E_q G^\top C E_l\right) \Pi - \\ &- \left. -G^\top C E_q \Pi E_l^\top C G\right\} \varPhi \varPhi^\top \leqslant \end{aligned}$$

(предложение 4.6.3)

$$\begin{aligned} &\leqslant \sqrt{n} \left\{\|\Pi E_l^\top C E_q \Pi\| + \right. \\ &+ \|G^\top C E_l G^\top C E_q \Pi\| + \|G^\top C E_q G^\top C E_l \Pi\| + \\ &+ \left. \|G^\top C E_q \Pi E_l^\top C G\|\right\} \|\varPhi \varPhi^\top\|. \end{aligned}$$

Учтем неравенства $\|\Pi A\| \leqslant \|A\|$, $\|A E_l\|^2 \leqslant \|A\|^2$, $\|\varPhi \varPhi^\top\| \leqslant \|\varPhi\|^2 = (N - p)(p + 1)(r + m)$. Тогда

$$\mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' \leqslant \sqrt{n}\,(N - p)(p + 1)(r + m) \left\{\|C\| + 2\|G^\top C G^\top C\| + \|G^\top C C G\|\right\}.$$

Теперь привлечем соотношения $\|C\| = \|C^{1/2}\|^2 = \mathrm{Sp}\, C$, $\|G^\top C\|^2 = \mathrm{Sp}\, C G G^\top C = \mathrm{Sp}\, C$:

$$\mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' \leqslant 4\sqrt{n}\,(N - p)(p + 1)(r + m)\, \mathrm{Sp}\, C.$$

В итоге, подставив $n = r\,(r + m)(p + 1) \leqslant (r + m)^2 (p + 1)$ и восстановив в правой части опущенный индекс `OR`, получим оценку

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\, \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' &\leqslant 4\,(p + 1)^{3/2} N\,(r + m)^2\, \mathrm{Sp}\, C_{\mathtt{OR}} \leqslant \\ &\leqslant 4\,(p + 1)^{3/2} N^2 (r + m)^2\, \mathrm{Sp}\, \left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма 4.6.6 доказана. □

Учитывая равенства $J_1' \doteq J_{1\theta}' = \omega_\gamma' D$ и $J_1'' \doteq J_{1\theta\theta}'' = D^\top \omega_{\gamma\gamma}'' D$, получаем первые три утверждения теоремы 4.1.3.

Остается получить оценку сверху для $\mathrm{Sp}\ (C_{\mathtt{OR}} C^{-1})_{\theta\theta}''$, имея оценку для $\mathrm{Sp}\ (C_{\mathtt{OR}} C^{-1})''$. Верны равенства

$$\mathrm{Sp}\ \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)_{\theta\theta}'' = \mathrm{Sp}\, D^\top \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)'' D = \mathrm{Sp}\ \left(G_{\mathtt{OR}}^\top C_{\mathtt{OR}} G_{\mathtt{OR}}\right)'' \varPhi D D^\top \varPhi^\top.$$

Следуя доказательству леммы 4.6.6 от формулы (4.6.7) с заменой $\varPhi\varPhi^\top$ на $\varPhi D D^\top \varPhi^\top$, получим оценку

$$\mathrm{Sp}\ \left(C_{\mathtt{OR}} C^{-1}\right)_{\theta\theta}'' \leqslant 4\,(p+1)^{3/2} N^2 (r+m)^2 \|DD^\top\| \mathrm{Sp}\ \left(\gamma_\theta^\top \gamma_\theta\right)^{-1},$$

и далее 4-е утверждение теоремы. Теорема 4.1.3 доказана. □

Заключение по главам 3, 4

Приведем краткий перечень основных результатов 3-й и 4-й глав диссертации.

1. В задаче вариационной идентификации с фиксированной траекторией z_* вычислена нижняя граница Крамера—Рао для асимптотической дисперсии вариационных оценок: $\sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$ (теорема 4.1.1).

2. Описаны асимптотические свойства вариационных оценок ВМ, ОР (теорема 4.1.2) и ОРМ (теорема 4.1.3); показано, что в общем случае эти оценки не являются асимптотически эффективными.

3. Показано, что в пределе малых возмущений $\sigma \to 0$ для широкого класса динамических систем оценки ВМ имеют наименьшую асимптотическую дисперсию среди других вариационных оценок (теоремы 3.5.1, 3.5.2).

4. Показано, что в случае L наблюдений $\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}$, $\check{z}_{(i)} = z_* + \eta_{(i)}$, $\eta_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$, единственной траектории z_* оценки ВМ (ОР) являются оценками максимального правдоподобия (МП); в этом случае вычисление оценок ВМ, ОР сводится к минимизации целевой функции для одного *среднего* наблюдения (утверждение 4.2.1). Такие оценки асимптотически эффективны по L при любом конечном значении σ с наименьшей возможной дисперсией $\sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$ (теорема 4.2.1).

5. Показано, что в предельном случае $\sigma \to 0$ в вариационной задаче идентификации с фиксированной траекторией z_* оценка ВМ асимптотически эффективна с дисперсией $\sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$ (теорема 4.1.1 и следствие 2 теорем 4.1.2, 4.1.3).

6. Показано, что в предельном случае $\varrho/\sigma \to \infty$ для наблюдений $\check{z} = H_* w_* + \eta$, $\eta \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$, $w_* \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$ или $w_* \in \mathbf{U}(0, B_\varrho)$, оценки ВМ сходятся по целевой

функции к оценкам МП, и дисперсия оценок ВМ приближается к наименьшему возможному значению $\sigma^2\left(\mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$, что согласуется с интегральным информационным неравенством типа Боровкова—Саханенко [13, теорема 2.20.5] (теорема 4.4.2). Аналогичный результат для оценок ОР получается заменой матриц.

Глава 5

Локальная устойчивость оценок и количественные показатели идентифицируемости

1985–... Emerging new ideas without statistical roots

(L. Ljung. Periods in the development of system identification (1996) [196])

Оптимальная аппроксимация ... является намного более логичным подходом к идентификации ..., чем классический метод, основывающийся на состоятельности статистических оценок

(Я. Виллемс [19, с. 180])

В этой главе исследуются количественные характеристики вариационных оценок. С точки зрения детерминированного подхода, оценки являются неявными функциями наблюдений, определяемыми из условия равенства градиента целевой функции нулю в точке минимума. В главе вычислены производные функций оценок ОР, ОРМ и ВМ по наблюдениям и построены матрицы чувствительности, которые описывают эллипсоиды разброса оценок при возмущениях в наблюдениях из малого шара с центром в истинной точке (теорема 5.1.1). Вычислено разложение неявной функции оценки ВМ в ряд Тейлора до квадратичного слагаемого по малым возмущениям в наблюдениях траекторий. Получена оценка сверху для остаточного члена формулы Тейлора (теорема 5.1.2). Как следствие, впервые даны гарантированные априорные оценки сверху для ошибок идентификации коэффициентов линейных обыкновенных разностных уравнений (следствие теоремы 5.1.2).

С вероятностной точки зрения показано, что матрицы дисперсий оценок ВМ, ОР, ОРМ в предельном случае малых возмущений (теорема 4.3.1) совпадают с обратными матрицами чувствительности (теорема 5.2.1). На основании матриц чувствительности асимптотически эффективных (при малых шумах) оценок ВМ предложены способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости коэффициентов матричных линейных разностных уравнений.

Применение предложенных в диссертации количественных показателей идентифицируемости демонстрируется расчетами на примере К. Ланцоша (1956) [184] задачи восстановления показателей экспонент (раздел 5.3) и на примере задачи идентификации параметров модельного уравнения, описывающего динамику реального объекта (раздел 5.2.8).

5.1 Локальная устойчивость оценок

Пусть дано линейное разностное уравнение вида (3.1.2)

$$\alpha_p y[k+p] + ... + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + ... + \beta_0 u[k], \qquad k = \overline{1, N-p}. \tag{5.1.1}$$

Коэффициенты уравнения суть матрицы

$$\alpha_i = \alpha_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times r}, \qquad \beta_i = \beta_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r\times m},$$

которые аффинно зависят от параметра

$$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad n < 2r(r+m)(p+1).$$

Параметр θ фиксирован и подлежит идентификации по наблюдению $x \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ некоторого решения уравнения

$$z = (y[1]; u[1]; \dots; y[N]; u[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}.$$

Предполагается, что наблюдение x содержит возмущения и не может быть описано уравнением (5.1.1). Подобные задачи идентификации являются типичными в теории управления подвижными объектами.

Оптимальная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ вычисляется из условия минимума целевой функции

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \rho(\theta, x).$$

Выбор функции ρ зависит от предположений о характере возмущений в наблюдениях x. Точные утверждения об оптимальности той или иной целевой функции удается получить в рамках вероятностных предположений. Наиболее известны целевой функции по невязке уравнения и по невязке оптимального решения. Обозначим $\gamma_i \doteq (\alpha_i, -\beta_i)$ и запишем уравнение (5.1.1) в матричном виде*)

$$G_\theta z = 0, \qquad G_\theta = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix}. \tag{5.1.2}$$

Оптимальным с точки зрения невязки уравнения является значение параметра, которое минимизирует норму**) $\|G_\theta x\|$:

$$\hat\theta_1 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \|G_\theta x\|.$$

При заданном значении параметра θ оптимальным назовем решение $\hat z = \hat z(\theta)$, ближайшее к наблюдениям:

$$\|x - \hat z(\theta)\| = \min_{G_\theta z = 0} \|x - z\|.$$

Оптимальной оценкой $\hat\theta_2$ с точки зрения невязки оптимального решения будет значение параметра, которое минимизирует норму $\|x - \hat z(\theta)\|$:

$$\hat\theta_2 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \|x - \hat z(\theta)\| = \arg\min_{\theta\in\Theta} \min_{G_\theta z = 0} \|x - z\|. \tag{5.1.3}$$

Локальная устойчивость оценок характеризуется неравенствами вида

$$\|\Delta\hat\theta(\Delta x)\| \leqslant f(\|\Delta x\|), \tag{5.1.4}$$

где $f(\cdot)$ — заданная функция, обычно линейная или квадратичная. Результаты по устойчивости оценок $\hat\theta_1$ приведены в монографии А. Бьорка (1996) [140, теорема 1.4.6]. Эти оценки более просты, чем оценки $\hat\theta_2$, ввиду того, что они явно выражаются через наблюдения x [140, раздел 1.1]. Что касается $\hat\theta_2$, то устойчивость этих оценок до недавнего времени была исследована только в случае $p = 0$ [140, 249, 258], см. также серию статей А. Б. Куржанского (1991 и др.) [60]. Трудности вызваны тем, что зависимость $\hat\theta_2(x)$ не имеет явного выражения и описывается как неявная функция из уравнения***) $\rho'_\theta(\hat\theta_2, x) = 0$.

Более просто получается другая характеристика локальной устойчивости — через разложение функции $\hat\theta_2(x)$ в ряд Тейлора до линейного члена:

$$\hat\theta_2(x + \Delta x) = \hat\theta_2(x) + S^\top \Delta x + O(\|\Delta x\|^2).$$

Выражения для слагаемого $S^\top \Delta x$ в пределе $\rho \to 0$ были получены в [76, 84, 128, 134]. Подобного рода характеристики устойчивости не приводят к оценке сверху для нор-

*)Иногда будем опускать индекс "θ": $G_\theta \doteq G$.

**)Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму.

***)Штрихом обозначаем частную производную по переменной, указанной в нижнем индексе.

мы отклонений $\|\Delta\theta\|$, поскольку оставляют открытым вопрос о величине остаточного члена.

С вероятностной точки зрения, при аддитивных случайных возмущениях в наблюдениях x состоятельными являются именно оценки $\hat{\theta}_2$ [154,202,258]. Они также выглядят предпочтительными с точки зрения аппроксимации наблюдений x решениями уравнения (5.1.1). Этим обусловлен интерес к оценкам $\hat{\theta}_2$ в литературе. Алгоритмы вычисления $\hat{\theta}_2$ были предложены и изучались в [30, 40, 45, 218, 235]. Условия существования и единственности исследованы в [22, 70, 73, 74, 133]. Проблема устойчивости упоминалась, в частности, в связи с задачей выделения показательных функций из наблюдений затухающих рядов [184, гл.IV, п.23]. Сложный характер экстремумов (5.1.3) отмечался в [30, 57, 242].

В этой главе для оценок $\hat{\theta}_2$ при $p \geqslant 0$ получена характеристика устойчивости вида (5.1.4). Для этого вычислены необходимые производные и дана оценка сверху для величины остаточного члена в формуле Тейлора.

Далее примем $\rho(\theta, x) = \|x - \hat{z}(\theta)\|$, $\hat{\theta} \doteq \hat{\theta}_2$. Когда будет идти речь о зависимости $\hat{\theta}(x)$, будем иногда писать просто $\theta(x)$.

5.1.1 Функция $\hat{\theta}(x)$

Как и в разделе 3.1, обозначим

$$\gamma_\theta \doteq \begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)(p+1)}, \qquad \gamma \doteq \operatorname{vect}\gamma_\theta^\top, \tag{5.1.5}$$

где vect — выстраивание по столбцам*). Полагаем $\gamma = \gamma(\theta) = d + D\theta = (d, D)\,(1;\theta) \doteq \widetilde{D}\vartheta$, матрицу $\widetilde{D}$ считаем известной. Определим многочленную матрицу

$$\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p. \tag{5.1.6}$$

Наложим условия (i), (ii.а-г) на с. 91 и (i'), (i") на с. 128.

Условие (ii.а) гарантирует линейную независимость строк G_θ (предложение 1.4.1). Условия (ii.б)–(ii.г) обеспечивают сохранение свойства продолжимости всех решений (5.1.1) при изменениях θ. Напомним, решение z называется продолжимым, если оно является частью некоторого решения z' того же уравнения (5.1.1) с большим значением $N' > N$ (определение 1.4.4). Если решение непродолжимо, оно не имеет физического смысла.

Обозначим

$$J(\theta, x) \doteq \tfrac{1}{2}\rho^2(\theta, x) = \tfrac{1}{2}\|x - \hat{z}\|^2. \tag{5.1.7}$$

*) Например, $\operatorname{vect}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\6\end{pmatrix}$.

Для функции $\hat{\theta}(x)$ можно использовать любое из двух равносильных определений:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \rho(\theta, x) = \arg\min_{\theta\in\Theta} J(\theta, x).$$

Ниже будет показано, что функция $J(\theta, x)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка по θ и x. Поэтому существует неявная функция $\hat{\theta}(x)$, определяемая уравнением $J'_\theta(\hat{\theta}, x) = 0$.

Лемма 5.1.1. *Для производных функции* $\hat{\theta} \doteq \theta(x)$ *верны выражения:*

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j} = (-J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x_j}, \tag{5.1.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j \partial x_k} = (J''_{\theta\theta})^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix} (-J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x_k} + \\ + (J''_{\theta\theta})^{-1}\, J'''_{\theta\theta x_k}\, (J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x_j} + (-J''_{\theta\theta})^{-1}\, J'''_{\theta x_j x_k}, \\ a_{s,j} \doteq J'''_{\theta\theta\theta_s}\, (J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x_j} - J'''_{\theta x_j \theta_s}, \qquad a_{s,j} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad s \in \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{5.1.9}$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Для получения характеристики устойчивости (5.1.4) нужно вывести выражение для приращения $\Delta\theta \doteq \theta(x + \Delta x) - \theta(x)$, учитывая, что формула конечных приращений применима только к функциям со значениями в $\mathbb{R}^1$ [124, т.1, гл.3, пар.5]. Представим $\Delta\theta$ в виде суммы приращений 1-го и 2-го порядка малости по величине $\epsilon \doteq \|\Delta x\|$: $\Delta\theta = \Delta_1\theta + \Delta_2\theta$, $\Delta_k\theta \sim O(\epsilon^k)$. Первое слагаемое имеет вид

$$\Delta_1\theta = S^\top \Delta x, \qquad S^\top = \left\|S^\top_{ij}\right\| = \left\|\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}(x)\right\|_j^i = -\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x},$$

где θ_i — i-й элемент θ, $i = \overline{1,n}$, и $\|A_{ij}\|_j^i$ обозначает матрицу, составленную из элементов A_{ij}, $\|B_i\|^i$ — вектор-столбец (может быть, клеточный) из элементов (клеток) B_i, $\|C_j\|_j$ — вектор-строка. Второе слагаемое $\Delta_2\theta$ есть вектор, элементы которого суть квадратичные формы, представляющие собой остаточные члены поэлементного разложения вектор-функции $\Delta\theta(\Delta x)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta_2\theta = \begin{pmatrix}\Delta_2\theta_1 \\ \vdots \\ \Delta_2\theta_n\end{pmatrix}, \qquad \Delta_2\theta_i = \tfrac{1}{2}\Delta x^\top \Psi_i(x + h_i\Delta x)\Delta x, \qquad h_i \in (0,1), \tag{5.1.10}$$

$$\Psi_i(x) \doteq \left\|\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right\|_k^j, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим линейную часть приращения. Вычислим производные $J''_{\theta\theta}$ и $J''_{\theta x}$, имея в виду соотношения $J''_{\theta\theta} = D^\top J''_{\gamma\gamma} D$, $J''_{\theta x} = D^\top J''_{\gamma x}$. Нам понадобятся два разных выражения для функции $J(\theta, x)$. Первое следует из определения (5.1.7):

$$J(\theta, x) = \min_{G_\theta z = 0} \tfrac{1}{2}\|x - z\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x - \hat{z}\|^2 = \tfrac{1}{2} x^\top G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} Gx.$$

Для получения второго выражения используем матрицу V (3.1.8). Тогда функция $J(\theta, x)$ может быть представлена в виде (3.3.14)

$$J(\theta, x) = \tfrac{1}{2} x^\top G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} Gx = \tfrac{1}{2} \tilde{\theta}^\top \widetilde{D}^\top V^\top C V \widetilde{D} \tilde{\theta},$$

$$V = V(x), \qquad C = C_\theta \doteq \left(G_\theta G_\theta^\top\right)^{-1}.$$

Это есть второе выражение для $J(\theta, x)$.

Обозначим $\Pi \doteq I - G^\top C G$ проектор в $\mathbb{R}^{N(r+m)}$ на $\operatorname{nul} G$. Пусть γ^{ij} — ij-й элемент матрицы γ_θ (5.1.5). Пронумеруем элементы индексом

$$q = i + (j-1)r.$$

Матрица

$$E_q \doteq \partial G / \partial \gamma^q \tag{5.1.11}$$

состоит из нулей и единиц, в каждой строке и каждом столбце не более одной единицы. Верны следующие утверждения.

Лемма 5.1.2. *Матрица 2-х производных* $J''_{\theta\theta} \doteq \left\|\frac{\partial^2 J}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right\|_j^i$ *может быть представлена в следующем виде*[*]:

$$J''_{\theta\theta} = R_0 + R_1 + R_2, \qquad R_k \sim O(\rho^k),$$

$$R_0 \doteq D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D, \qquad \widehat{V} \doteq V(\hat{z}), \qquad R_{1,2} = D^\top W_{1,2} D, \qquad W_{1,2} \doteq \left\|W_{1,2}^{qt}\right\|_t^q,$$

$$W_1^{qt} \doteq -x^\top G^\top C (E_q G^\top C E_t + E_t G^\top C E_q) \Pi x, \qquad W_2^{qt} \doteq -x^\top G^\top C E_q \Pi E_t^\top C G x,$$

$$\|R_1\| \leqslant \sqrt{2}\, c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho, \qquad \|R_2\| \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2,$$

$$c_0 \doteq r(p+1)(m+r) \operatorname{Sp} C \doteq c_{00} \operatorname{Sp} C.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Заметим, что выражения другого типа для производной $J''_{\theta\theta}$ через множители Лагранжа были получены ранее в [45].

Лемма 5.1.3. *Матрица производных* $J''_{\theta x} \doteq \left\|\frac{\partial^2 J}{\partial\theta_i \partial x_j}\right\|_j^i$ *может быть представлена в следующем виде:*

$$J''_{\theta x} = P_0 + P_1, \qquad P_k \sim O(\rho^k), \qquad P_0 \doteq D^\top \widehat{V}^\top C G,$$

$$P_1 \doteq D^\top F_1, \qquad F_1 \doteq \|F_1^q\|^q, \qquad F_1^q \doteq x^\top G^\top C E_q \Pi,$$

[*] В отличие от [76, лемма 3], величина константы c_0 в утверждении леммы уменьшена в N раз.

$$\|P_0\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot \|x\|, \qquad \|P_1\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot \rho.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. $\square$

Следствие. $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = S^\top = -R_0^{-1} P_0 + O(\rho) =$

$$= -\left(D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D\right)^{-1} D^\top \widehat{V}^\top C G + O(\rho).$$

Введем обозначения $S_0^\top \doteq -R_0^{-1} P_0$, $S_1^\top \doteq S^\top - S_0^\top \sim O(\rho)$. Заметим, что из равенства $C = \left(GG^\top\right)^{-1}$ следуют соотношения $P_0 P_0^\top = R_0$, $S_0^\top S_0 = R_0^{-1}$. Приращение функции $\theta(x)$ представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\Delta\theta = S_0^\top \Delta x + S_1^\top \Delta x + \Delta_2 \theta,$$
$$S_0^\top \Delta x \sim O(\epsilon), \qquad S_1^\top \Delta x \sim O(\rho\epsilon), \qquad \Delta_2 \theta \sim O(\epsilon^2). \tag{5.1.12}$$

Рассмотрим приращение 1-го порядка по ϵ, т. е. $S^\top \Delta x$. Для эллипсоидов в $\mathbb{R}^n$ с центрами в нуле примем обозначение

$$E_{S^\top S} \doteq \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \ y^\top \left(S^\top S\right)^{-1} y \leqslant 1 \right\} = \left\{ y = S^\top e : \ \|e\| \leqslant 1 \right\}. \tag{5.1.13}$$

Последнее равенство следует из соотношения $y^\top \left(S^\top S\right)^{-1} y = e^\top S \left(S^\top S\right)^{-1} S^\top e \leqslant e^\top e \leqslant 1$. Пусть отклонения Δx лежат в шаре $\|\Delta x\| \leqslant \epsilon$. Тогда приращения $S^\top \Delta x$ образуют эллипсоид $E_{\epsilon^2 S^\top S}$. Из установленных выше утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1.1. *Эллипсоид рассеяния 1-го порядка $\Delta_1 \theta \in E_{\epsilon^2 S^\top S}$ определяется матрицей*

$$S^\top S = R_0^{-1} + O(\rho) = \left(D^\top \widehat{V}^\top C \widehat{V} D\right)^{-1} + O(\rho) = (J''_{\theta\theta})^{-1} + O(\rho). \tag{5.1.14}$$

Следствие 5.1.1. *Пусть $\lambda_{\min}(R_0)$ — наименьшее собственное число матрицы R_0. Для приращения 1-го порядка верна оценка*

$$\|\Delta_1 \theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + O(\epsilon\rho).$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. $\square$

5.1.2 Оценка приращения 2-го порядка

Получим оценку для остаточного члена в утверждении следствия 5.1.1 в виде $\|S_1^\top \Delta x + \Delta_2 \theta\| \leqslant (c_{21}\rho + c_{22}\epsilon)\, \epsilon$. Будем искать константы c_{21} и c_{22}. Обозначим

$$R^* \doteq \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \cdot \|x\|^2, \qquad b_0 \doteq \frac{2\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)}.$$

Заметим, что произведение $\frac{1}{2\sqrt{n}\,c_{00}}b_0R^*$ играет роль оценки сверху для числа обусловленности матрицы R_0 в том смысле, что верно неравенство

$$\frac{\lambda_{\max}(R_0)}{\lambda_{\min}(R_0)} \leqslant \frac{b_0R^*}{2\sqrt{n}\,c_{00}}. \tag{5.1.15}$$

Также b_0 используется в качестве оценки сверху для нормы обратной матрицы вторых производных $(J''_{\theta\theta})^{-1}$, см. далее (5.1.46) и (5.1.47).

Лемма 5.1.4. *Обозначим* $M \doteq (R_1+R_2)R_0^{-1}$ *и пусть* $\|M\| < 1$. *Тогда*

$$S_1^\top = -R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0+P_1)\right], \qquad Y \doteq -(R_1+R_2)R_0^{-1}\left[I + (R_1+R_2)R_0^{-1}\right]^{-1},$$

$$\|S_1^\top\| \leqslant \tfrac{21\sqrt{n}\,b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Рассмотрим норму $\|\Delta_2\theta\|$. Производные в выражениях для компонент $\Delta_2\theta_i$ (5.1.10) берутся в разных точках $x + h_i\Delta x$, $i = \overline{1,n}$. Ввиду этого оценивать величину $\|\Delta_2\theta\|$ следует через нормы компонент

$$\Delta_2\theta_i = \tfrac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_j \partial x_k}\Delta x_j \Delta x_k.$$

Пусть $B \doteq (J''_{\theta\theta})^{-1}$, $b_i \doteq [B]^i \doteq \|B_{ij}\|_j$ — i-я строка B. Подчеркнем, что все величины (кроме Δx) в выражениях для $\Delta_2\theta_i$ берутся в точках

$$x^\Delta \doteq x^\Delta(i) \in (x, x+h_i\Delta x), \qquad \theta^\Delta \doteq \theta^\Delta(i) \doteq \theta(x^\Delta).$$

С учетом (5.1.9) имеем

$$\Delta_2\theta_i = \tfrac{1}{2}[B]^i\left(\sum_j \begin{pmatrix} a_{1,j} & \ldots & a_{n,j}\end{pmatrix}\Delta x_j\right)(-B)\left(\sum_k J''_{\theta x_k}\Delta x_k\right) + \tag{5.1.16}$$

$$+\tfrac{1}{2}[B]^i\left(\sum_k J'''_{\theta\theta x_k}\Delta x_k\right)B\left(\sum_j J''_{\theta x_j}\Delta x_j\right) -$$

$$-\tfrac{1}{2}[B]^i\left(\sum_j\sum_k J'''_{\theta x_j x_k}\Delta x_j\Delta x_k\right) \doteq \tfrac{1}{2}[B]^i B_1.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\Delta_2\theta_i\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|b_i\|\cdot\|B_1\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|B\|\cdot\|B_1\|.$$

Поэтому

$$\|\Delta_2\theta\| \leqslant \sqrt{n}\max_i\|\Delta_2\theta_i\| \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\,\|B\|\cdot\|B_1\|. \tag{5.1.17}$$

В правой части неравенства сомножитель $\sqrt{n}$ появляется из-за покомпонентной оценки и мог бы быть опущен, если бы все точки $x+h_i\Delta x$ взятия производных были одинаковы ($h_1 = \ldots = h_n$).

Оценим норму $\|B_1\|$. Из определения (5.1.16) следует неравенство

$$\|B_1\| \leqslant \underbrace{\| \sum_j \begin{pmatrix} a_{1,j} & \ldots & a_{n,j} \end{pmatrix} \Delta x_j \|}_{B_2} \cdot \|B\| \cdot \underbrace{\| \sum_k J''_{\theta x_k} \Delta x_k \|}_{B_3} +$$

$$+ \underbrace{\| \sum_k J'''_{\theta\theta x_k} \Delta x_k \|}_{B_4} \cdot \|B\| \cdot \underbrace{\| \sum_j J''_{\theta x_j} \Delta x_j \|}_{B_5} + \underbrace{\| \sum_j \sum_k J'''_{\theta x_j x_k} \Delta x_j \Delta x_k \|}_{B_6}.$$

С учетом введенных обозначений

$$\|B_1\| \leqslant \|B\| \cdot \|B_{3,5}\| \cdot (\|B_2\| + \|B_4\|) + \|B_6\|. \tag{5.1.18}$$

Лемма 5.1.5. *Верны следующие оценки:*

$$\|B_2\| \leqslant \sqrt{n}\, \left\{ \|B\| \cdot \|D\|^2 \cdot (c_{00} \mathrm{Sp}\, C) \left(6\, \|x\|^2 + 16\, \|x\|\, \rho + 6\rho^2\right) + 4 \right\} \times$$

$$\times \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \cdot (\|x\| + \rho) \cdot \epsilon, \qquad \|B_{3,5}\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot (\|x\| + \rho) \cdot \epsilon,$$

$$\|B_4\| \leqslant 4\, \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C\ (\|x\| + \rho) \cdot \epsilon, \qquad \|B_6\| \leqslant 2\, \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot \epsilon^2,$$

где ϵ является константой, а величины B_i, $\mathrm{Sp}\, C$, $\|x\|$, ρ вычисляются в точках x^Δ, θ^Δ.

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Получим оценку сверху для нормы обратной матрицы $\|B\| \doteq \| \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} \|$.

Лемма 5.1.6. *Пусть $\| \, \|_2$ — спектральная норма $\|A\|_2 \doteq \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Верно неравенство*

$$\|B\| \doteq \| \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} \| \leqslant \sqrt{n}\, \| \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} \|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0) - c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \|x\| + \rho\right) \rho}.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

В этой лемме, как и ранее, величины B, $\|x\|$ и ρ вычисляются в точках x^Δ, θ^Δ.

Наконец, нужно оценить значения величин $\mathrm{Sp}\, C$, $\|x\|$, ρ, взятые в точках x^Δ, θ^Δ, через значения в точках x, θ. Для этого используются следующие утверждения. Обозначим $\rho^\Delta \doteq \rho(\theta^\Delta, x^\Delta)$. По определению $\rho = \|x - \hat{x}\|$, тогда

$$\rho^\Delta = \|x^\Delta - \hat{x}^\Delta\| \leqslant \|x^\Delta - \hat{x}\| = \|x + \Delta x - \hat{x}\| \leqslant \rho + \epsilon. \tag{5.1.19}$$

Лемма 5.1.7. *Пусть* $\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{(\sqrt{6}-2)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right]\cdot\|C\|\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}$. *Тогда*

$$0 < \mathrm{Sp}\,(C + \Delta C) \leqslant 2\mathrm{Sp}\,C.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Сформулируем главный результат, который следует из полученных выше неравенств. Утверждения здесь даются с использованием величин в точках x , θ .

Теорема 5.1.2. *Пусть*

$$c_{22} \doteq \frac{\sqrt{2n}\,b_0\sqrt{R^*}}{\|x\|}\left\{36\,b_0R^*\left(\sqrt{n}\ [31\,b_0R^* + 1] + 1\right) + 1\right\}$$

и выполнены неравенства

$$\rho + \epsilon \leqslant \frac{\|x\|}{12\,b_0R^*}, \tag{5.1.20}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}} + \frac{21\sqrt{n}\,b_0\sqrt{R^*}}{24}\right)\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2 \leqslant \frac{(\sqrt{6}-2)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right]\cdot\mathrm{Sp}\,C\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}, \tag{5.1.21}$$

которые рассматриваются как условия на ρ *и* ϵ . *Тогда*

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon + \frac{21\sqrt{n}\,b_0^2\,(R^*)^{\,3/2}}{2\|x\|}\,\rho\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2.$$

Доказательство. См. раздел 5.1.3. □

Обратим внимание на условие (5.1.20). Оно описывает область, для которой заведомо верны проведенные рассуждения. Учитывая определение b_0 , запишем это условие в виде $\frac{\rho+\epsilon}{\|x\|} \leqslant \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\sqrt{n}\,R^*}$. Если ошибка аппроксимации ρ велика, для выполнения неравенства нужно или добиваться уменьшения случайных возмущений в измерениях, или, если возмущения нельзя считать случайными, усложнять уравнение (5.1.1), расширяя многообразие $\mathfrak{M}_\Theta \doteq \bigcup_{\theta\in\Theta}\mathcal{N}\left(G_\theta\right)$ (см. (2.1.7)).

В условии (5.1.21) правая часть определяется вектором γ . Если строки многочленной матрицы $\gamma_\theta(s)$ близки к линейной зависимости, то след $\mathrm{Sp}\,C$ велик, что уменьшает амплитуду допустимых возмущений ϵ .

Следствие. *Пусть* $\rho = 0$ *и выполнены неравенства* $\epsilon \leqslant \frac{\|x\|}{12\,b_0R^*}$,

$$\sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\epsilon + c_{22}\epsilon^2 \leqslant \frac{(\sqrt{6}-2)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right]\cdot\mathrm{Sp}\,C\cdot\|D\|\cdot\|\gamma\|}.$$

Тогда

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2.$$

Утверждение следствия дает оценку чувствительности в обратной задаче восстановления коэффициентов уравнения (5.1.1) по наблюдению $x = z + \epsilon$ решения z . Существенной здесь является зависимость величин $\lambda_{\min}(R_0)$ и b_0 от z . На этом основании можно предложить количественные критерии идентифицируемости параметров уравнения (5.1.1) (раздел 5.2).

5.1.3 Доказательства утверждений

Приведем доказательства утверждений.

Пусть A — вещественная симметричная неотрицательная матрица. Обозначим $\| \|_2$ спектральную норму $\|A\|_2 \doteq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \lambda_{\max}(A)$. Верны следующие утверждения [62, п.6.3 и теорема 7.1.1]:

Предложение 5.1.1. 1) $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A) \leqslant \|A\|$. 2) $\|A\| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|_2$. 3) $\|A\| \leqslant \operatorname{Sp} A$.

Предложение 5.1.2. *Если* $\| \|_*$ *обозначает любую матричную норму, для которой* $\|I\|_* = 1$, *и если* $\nu_* \doteq \|M\|_* < 1$, *то* $(I+M)^{-1}$ *существует, и* $\|(I+M)^{-1}\|_* \leqslant \frac{1}{1-\nu_*}$.

Следствие 5.1.2. *Если* $\nu = \|M\| < 1$, *то* $(I+M)^{-1} = I + Y$, $Y = -M\,(I+M)^{-1}$, $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n}$.

Доказательство. Поскольку $\|I\|_2 = 1$, и $\nu_2 \doteq \|M\|_2 \leqslant \|M\| < 1$, то можно применить предложение 5.1.2 с заменой нормы $\| \|_*$ на $\| \|_2$. Из равенства $(I+M)\,(I+M)^{-1} = I$ следует $(I+M)^{-1} = I - M\,(I+M)^{-1}$, тогда $Y = -M\,(I+M)^{-1}$ и $\|Y\|_2 \leqslant \|M\|_2 \cdot \|(I+M)^{-1}\|_2 \leqslant \frac{\nu_2}{1-\nu_2}$. Кроме того, $\|Y\| \leqslant \sqrt{n}\,\|Y\|_2 \leqslant \frac{\nu_2}{1-\nu_2}\sqrt{n} \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n}$. Следствие доказано. □

Предложение 5.1.3. 1) $\|x^\top G^\top C\|^2 \leqslant \rho^2 \operatorname{Sp} C$, 2) $\|G^\top C\|^2 = \operatorname{Sp} C$, 3) $\|C\| \leqslant \operatorname{Sp} C$. 4) *Пусть матрица* E_q *определена в* (5.1.11) *и* X, Y *— матрицы, для которых имеют смысл произведения* XE_q, E_qY, ΠY. *Тогда* $\|XE_q\| \leqslant \|X\|$, $\|E_qY\| \leqslant \|Y\|$, $\|\Pi Y\| \leqslant \|Y\|$.

Доказательство. 1) Верна оценка

$$\|x^\top G^\top C\|^2 \leqslant \|x^\top G^\top C^{1/2}\|^2 \cdot \|C^{1/2}\|^2 = x^\top G^\top C G x \cdot \|C^{1/2}\|^2 = \rho^2 \operatorname{Sp} C.$$

2) $\|G^\top C\|^2 = \operatorname{Sp} CGG^\top C = \operatorname{Sp} C$. 3) См. предложение 5.1.1. 4) Неравенство $\|XE_q\| \leqslant \|X\|$ и ему подобное для матрицы Y следует из определения матрицы E_q — она состоит из нулей и единиц и имеет не более одной единицы в каждой строке и каждом столбце. Предложение доказано. □

Доказательство леммы 5.1.1. Необходимо проделать стандартные выкладки. Случай $\theta \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^2$ разобран в монографии [124] (т. 1, гл. 3, пар. 8). В выражении (5.1.8) используются частные производные, взятые в точке $\theta(x)$. При вычислении производной 2-го порядка берется полная производная вдоль кривой $\theta(x)$. Ставим целью получить форму записи с обратной матрицей $(J''_{\theta\theta})^{-1}$ в качестве сомножителя, поскольку этот сомножитель является ключевым в последующих оценках.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(-J''_{\theta\theta})^{-1}\, J''_{\theta x_j}\right] \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Вычислим правую часть этого выражения.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}\right]}_{(1)}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\right]}_{(2)}\cdot J''_{\theta x_j}+\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta x_j x_k}.$$

Рассмотрим выделенные сомножители.

(1): $\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}\right]\doteq\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\begin{pmatrix}a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$a_{s,j}=J'''_{\theta\theta\theta_s}\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_j}-J'''_{\theta x_j\theta_s}\in\mathbb{R}^{n\times 1},\qquad s\in\overline{1,n}.$$

(2): $\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\right]=\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta\theta x_k}\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}$.

Из полученных равенств следует

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_k}=\underbrace{\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}\begin{pmatrix}a_{1,j} & \dots & a_{n,j}\end{pmatrix}}_{(1)}\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J''_{\theta x_k}+$$

$$+\underbrace{\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta\theta x_k}\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1}}_{(2)}J''_{\theta x_j}+\left(-J''_{\theta\theta}\right)^{-1}J'''_{\theta x_j x_k}.$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 5.1.2. Незначительно модифицируем доказательство, опубликованное в [76, раздел 8.10.2]. Первая производная:

$$J'_q\doteq\partial J/\partial\gamma^q=\tfrac{1}{2}x^\top(-\partial\Pi/\partial\gamma^q)x,$$

$$-\partial\Pi/\partial\gamma^q=E_q^\top CG-G^\top C(E_qG^\top+GE_q^\top)CG+G^\top CE_q=$$

$$=(E_q^\top-G^\top CGE_q^\top)CG+G^\top C(E_q-E_qG^\top CG)=\Pi E_q^\top CG+G^\top CE_q\Pi. \tag{5.1.22}$$

Отсюда следует

$$J'_q=x^\top G^\top CE_q\Pi x. \tag{5.1.23}$$

Учитывая, что $E_q\Pi x=\widehat{V}_q$ есть q-й столбец матрицы $\widehat{V}=V(\hat{z})$ и $x^\top G^\top=\gamma^\top V^\top$, получаем

$$J'_q=\gamma^\top V^\top C\widehat{V}_q,\qquad J'_\gamma=\gamma^\top V^\top C\widehat{V}.$$

Для второй производной из (5.1.23) следует выражение

$$J''_{qt}\doteq\partial^2J/\partial\gamma^q\partial\gamma^t=x^\top(\partial G^\top CE_q\Pi/\partial\gamma^t)x,$$

$$\partial G^\top CE_q\Pi/\partial\gamma^t=E_t^\top CE_q\Pi-G^\top C(E_tG^\top+GE_t^\top)CE_q\Pi-$$

$$-G^\top CE_q(\Pi E_t^\top CG + G^\top CE_t\Pi).$$

Два последних слагаемых здесь получены с применением формулы (5.1.22). После раскрытия скобок сложим 1-е и 3-е слагаемые:

$$E_t^\top CE_q\Pi - G^\top CGE_t^\top CE_q\Pi = \Pi E_t^\top CE_q\Pi.$$

Объединив 2-е и 5-е слагаемые, получим

$$\partial G^\top CE_q\Pi/\partial\gamma^t =$$

$$= \Pi E_t^\top CE_q\Pi - G^\top C(E_tG^\top CE_q + E_qG^\top CE_t)\Pi - G^\top CE_q\Pi E_t^\top CG. \tag{5.1.24}$$

Следовательно,

$$J''_{qt} = \widehat{V}_t^\top C\widehat{V}_q - x^\top G^\top C(E_qG^\top CE_t + E_tG^\top CE_q)\Pi x - x^\top G^\top CE_q\Pi E_t^\top CGx.$$

Тогда

$$J''_{\theta\theta} = D^\top \left\| J''_{qt} \right\|_t^q D = D^\top(\widehat{V}^\top C\widehat{V} + W_1 + W_2)D = R_0 + R_1 + R_2.$$

Оценим сверху нормы R_1 и R_2. Согласно определениям

$$W_1^{qt} = x^\top G^\top C(E_qG^\top CE_t + E_tG^\top CE_q)\Pi x, \qquad W_2^{qt} = x^\top G^\top CE_q\Pi E_t^\top CGx.$$

Тогда

$$\|W_1\|^2 = \sum_q\sum_t \|W_1^{qt}\|^2 \leqslant 2\sum_q\sum_t \|x^\top G^\top CE_qG^\top CE_t\Pi x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_q\sum_t \|x^\top G^\top C\|^2 \cdot \|E_qG^\top C\|^2 \cdot \|E_t\Pi x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[r(r+m)(p+1)\right]^2 \cdot \|x^\top G^\top C\|^2 \cdot \|G^\top C\|^2 \cdot \|x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[r(r+m)(p+1)\right]^2 \cdot \rho^2 \cdot (\operatorname{Sp} C)^2 \cdot \|x\|^2.$$

Последние два неравенства получены с учетом предложения 5.1.3 и диапазона индексов $q,t = \overline{1, r(r+m)(p+1)}$. Следовательно, $\|W_1\| \leqslant \sqrt{2}\,c_0 \cdot \|x\| \cdot \rho$ и тогда $\|R_1\| \leqslant \sqrt{2}\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho$.

Аналогично оцениваются нормы W_2, R_2:

$$\|W_2\|^2 = \sum_q\sum_t \|W_2^{qt}\|^2 = \sum_q\sum_t \|x^\top G^\top CE_q\Pi E_t^\top CGx\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_q\sum_t \|CGx\|^4 \leqslant \left[r(r+m)(p+1)\right]^2 \cdot (\operatorname{Sp} C)^2 \cdot \rho^4.$$

Следовательно, $\|W_2\| \leqslant c_0 \cdot \rho^2$ и $\|R_2\| \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы 5.1.3. Из соотношений (5.1.22) имеем

$$J''_{qx} = \partial J'_q/\partial x = \partial \left[\tfrac{1}{2} x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right) x\right] /\partial x =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} \partial x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right) x + \tfrac{1}{2} x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right) \partial x\right] /\partial x =$$

$$= \left[x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right) \partial x\right] /\partial x = x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right). \qquad (5.1.25)$$

Перейдем к матричной записи, используя равенство $x^\top \Pi E_q^\top = \widehat{V}_q^\top$:

$$J''_{\gamma x} = \left\|J''_{qx}\right\|^q = \widehat{V}^\top CG + F_1, \qquad F_1 \doteq \|F_1^q\|^q, \qquad F_1^q \doteq x^\top G^\top C E_q \Pi.$$

Учитывая соотношения $J''_{\theta x} = D^\top J''_{\gamma x}$ и $Gx = G(x - \hat{z})$, получаем

$$J''_{\theta x} = D^\top \widehat{V}^\top CG + D^\top F_1 = P_0 + P_1.$$

С учетом предложения 5.1.3 верны цепочки неравенств:

$$\|P_0\| = \|D^\top \widehat{V}^\top CG\| \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^\top \Pi E_q^\top CG\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^\top\| \cdot \|CG\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \|x\|.$$

$$\|P_1\| = \|D^\top F_1\| \leqslant \|D\| \cdot \|F_1\| \leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^\top G^\top C E_q^\top \Pi\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|D\| \cdot \|x^\top G^\top C\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \rho.$$

Лемма доказана. □

Доказательство следствия 5.1.1. Обозначим $R \doteq \left(S^\top S\right)^{-1}$. Ввиду (5.1.13) верно неравенство $y^\top R y \leqslant 1$. С другой стороны, $\lambda_{\min}(R)\, y^\top y \leqslant y^\top R y$, откуда для точек эллипсоида $y \in E_{S^\top S}$ следует соотношение $y^\top y = \|y\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(R)}$. Согласно теореме 5.1.1 $R^{-1} = R_0^{-1} + O(\rho)$. Нужно установить связь между $\lambda_{\min}(R)$ и $\lambda_{\min}(R_0)$. Воспользуемся известным результатом Л. Мирского [213], который сформулируем в виде леммы. Напомним, матричная норма $|||\cdot|||$ называется унитарно инвариантной, если $|||Ux||| = |||x|||$, где U — унитарная матрица.

Лемма 5.1.8. *Пусть A и $\tilde{A}$ — две эрмитовы матрицы размерности $n \times n$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ — собственные числа этих матриц, упорядоченные по возрастанию. Тогда $|||\operatorname{diag}(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n - \tilde{\lambda}_n)||| < |||A - \tilde{A}|||$, где $|||\cdot|||$ обозначает произвольную унитарно инвариантную норму.*

Из леммы следуют оценки

$$|\lambda_{\max}(R^{-1}) - \lambda_{\max}(R_0^{-1})| \leqslant \|R^{-1} - R_0^{-1}\| = O(\rho),$$

$$|\lambda_{\min}(R) - \lambda_{\min}(R_0)| \leqslant O(\rho),$$

и для $y \in E_{S^\top S}$ имеем неравенство $\|y\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(R_0)} + O(\rho)$. Ввиду этого для точек эллипсоида $\Delta_1\theta \in E_{\epsilon^2 S^\top S}$ выполнено неравенство

$$\|\Delta_1\theta\|^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\min}(R_0)} + O(\epsilon^2\rho),$$

из которого получаем

$$\|\Delta_1\theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + O(\epsilon\rho).$$

Следствие доказано. □

Доказательство леммы 5.1.4. Из лемм 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 следует

$$S^\top = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x} = -\left(R_0 + R_1 + R_2\right)^{-1}\left(P_0 + P_1\right) =$$

$$= -R_0^{-1}\left[I + (R_1 + R_2)R_0^{-1}\right]^{-1}(P_0 + P_1) \doteq -R_0^{-1}\left[I + M\right]^{-1}(P_0 + P_1).$$

Применяя следствие 5.1.2, приходим к равенству

$$S^\top = -R_0^{-1}(I + Y)(P_0 + P_1) = -R_0^{-1}P_0 - R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0 + P_1)\right].$$

Отсюда следует $S_1^\top \doteq -R_0^{-1}\left[P_1 + Y(P_0 + P_1)\right]$,

$$Y \doteq -M\left[I + M\right]^{-1} \doteq -(R_1 + R_2)R_0^{-1}\left[I + (R_1 + R_2)R_0^{-1}\right]^{-1}.$$

Первое утверждение доказано. Оценим норму $\|S_1^\top\|$. Ведем обозначения

$$\|R_0^{-1}\| \doteq \nu_0, \qquad \|R_{1,2}\| \doteq \nu_{1,2}, \qquad \|P_{0,1}\| \doteq \mu_{0,1}.$$

При условии выполнения неравенства

$$\|M\| = \|(R_1 + R_2)R_0^{-1}\| \doteq \nu \leqslant \nu_0(\nu_1 + \nu_2) < 1 \tag{5.1.26}$$

будет верна оценка $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n}$ (см. следствие 5.1.2). Следующие оценки получены в леммах 5.1.2 и 5.1.3:

$$\nu_1 \leqslant 2\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho, \qquad \nu_2 \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \rho^2, \tag{5.1.27}$$

$$\mu_0 \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_0} \cdot \|x\|, \qquad \mu_1 \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_0} \cdot \rho. \tag{5.1.28}$$

Примем следующую оценку для ν_0:

$$\nu_0 \doteq \|R_0^{-1}\| \leqslant \sqrt{n}\,\|R_0^{-1}\|_2 = \sqrt{n}\,\lambda_{\max}(R_0^{-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)} = \tfrac{1}{2}b_0. \tag{5.1.29}$$

Имеем

$$\|S_1^\top\| = \|R_0^{-1}\left(P_1 + Y(P_0 + P_1)\right)\| \leqslant \nu_0\left(\mu_1 + \|Y\| \cdot (\mu_0 + \mu_1)\right),$$

$$\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{n} \leqslant \frac{\nu_0(\nu_1+\nu_2)}{1-\nu_0(\nu_1+\nu_2)}\sqrt{n},$$

и с учетом неравенств (5.1.27), (5.1.29)

$$\nu_0(\nu_1+\nu_2) \leqslant \tfrac{1}{2}b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (2\cdot\|x\| + \rho)\,\rho \leqslant \tfrac{1}{2}b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot 3 \cdot \|x\| \cdot \rho \doteq \varphi.$$

Имея в виду (5.1.26), наложим условие $\varphi < 1$, которое будет играть роль порога обусловленности оценок. Запишем его в виде

$$\rho < \frac{2}{3\,b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|}. \tag{5.1.30}$$

Заменим последнее неравенство более сильным условием (5.1.20), из которого следует

$$\rho \leqslant \frac{1}{10\,b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|},$$

тогда

$$\varphi \doteq \tfrac{1}{2}b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot 3 \cdot \|x\| \cdot \rho \leqslant 5\,b_0c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot \rho \doteq \omega_0\rho \leqslant \tfrac{1}{2} < 1.$$

Поскольку $\nu_0(\nu_1+\nu_2) \leqslant \varphi \leqslant \omega_0\rho \leqslant \frac{1}{2} < 1$, имеем оценку

$$\|Y\| \leqslant \frac{\nu_0(\nu_1+\nu_2)}{1-\nu_0(\nu_1+\nu_2)}\sqrt{n} \leqslant \frac{\omega_0\rho}{1-\omega_0\rho}\,\sqrt{n} \leqslant \frac{\omega_0\rho}{1-\frac{1}{2}}\,\sqrt{n} = 2\omega_0\rho\,\sqrt{n}. \tag{5.1.31}$$

Используя (5.1.27), (5.1.28), (5.1.29) и (5.1.31), получаем неравенства

$$\|S_1^\top\| \leqslant \nu_0\left(\mu_1 + \|Y\| \cdot (\mu_0+\mu_1)\right) \leqslant \tfrac{1}{2}b_0\,\sqrt{c_0} \cdot \|D\| \cdot \left(1 + 2\omega_0\,\sqrt{n}\,(\|x\| + \rho)\right)\rho \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}b_0\,\sqrt{c_0} \cdot \|D\| \cdot \left(1 + 4\omega_0\,\sqrt{n}\,\|x\|\right)\rho = \tfrac{b_0\sqrt{R^*}}{2\|x\|}\left(20\,\sqrt{n}\,b_0R^* + 1\right)\rho.$$

Из неравенства (5.1.15) $1 \leqslant \frac{\lambda_{\max}(R_0)}{\lambda_{\min}(R_0)} \leqslant \frac{b_0R^*}{2\sqrt{n}\,c_{00}}$ следует $b_0R^* \geqslant 2\sqrt{n}\,c_{00} > 1$, откуда $20\,\sqrt{n}\,b_0R^* + 1 < 21\,\sqrt{n}\,b_0R^*$ и $\|S_1^\top\| \leqslant \frac{21\,\sqrt{n}\,b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho$. Лемма доказана. □

Доказательство леммы 5.1.5. 1) Ввиду леммы 5.1.3 и предложения 5.1.3

$$\|J''_{\theta x}\| \leqslant \|D\| \cdot \|J''_{\gamma x}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|D\| \cdot \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \|x^\top\left(\Pi E_q^\top CG + G^\top CE_q\Pi\right)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|D\| \cdot \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \left(\|x\| \cdot \|CG\| + \|x^\top G^\top C\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|D\| \cdot \sqrt{r(r+m)(p+1)} \cdot \left(\|x\| \cdot \sqrt{\operatorname{Sp} C} + \rho \cdot \sqrt{\operatorname{Sp} C}\right).$$

Следовательно, $\|J''_{\theta x}\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot (\|x\| + \rho)$,

$$\|B_{3,5}\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \mathrm{Sp}\, C} \cdot (\|x\| + \rho) \cdot \epsilon. \tag{5.1.32}$$

2) Оценим $\|J'''_{\theta x \theta_s}\|$. Пусть, как и ранее, $[A]^i$ обозначает i-ю строку матрицы A. Согласно лемме 5.1.3 $\left[J''_{\gamma x}\right]^q = x^\top \left(\Pi E_q^\top CG + G^\top C E_q \Pi\right)$. Тогда, применяя соотношения $\partial \Pi / \partial \gamma^t = -\Pi E_t^\top CG - G^\top C E_t \Pi$ (см. (5.1.22)) и $\partial C / \partial \gamma^t = -C \left(E_t G^\top + G E_t^\top\right) C$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_t} \left[J''_{\gamma x}\right]^q = x^\top \Bigg(- \left[\Pi E_t^\top CG + G^\top C E_t \Pi\right] E_q^\top CG +$$

$$+ \underbrace{\Pi E_q^\top}_{\mathrm{a}_1} \left\{-C \left(E_t G^\top + G E_t^\top\right) C\right\} G + \underbrace{\Pi E_q^\top C E_t}_{\mathrm{a}_2} + \underbrace{E_t^\top C E_q \Pi}_{\mathrm{b}_1} +$$

$$+ G^\top \left\{-C \left(E_t G^\top + G E_t^\top\right) C\right\} \underbrace{E_q \Pi}_{\mathrm{b}_2} - G^\top C E_q \left[\Pi E_t^\top CG + G^\top C E_t \Pi\right] \Bigg) =$$

(объединяя слагаемые a_1, a_2 и b_1, b_2 вместе с сомножителями)

$$= x^\top \Bigg(- \left[\Pi E_t^\top CG + G^\top C E_t \Pi\right] E_q^\top CG + \underbrace{\Pi E_q^\top C E_t \Pi}_{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2} - \Pi E_q^\top CG E_t^\top CG +$$

$$+ \underbrace{\Pi E_t^\top C E_q \Pi}_{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2} - G^\top C E_t G^\top C E_q \Pi - G^\top C E_q \left[\Pi E_t^\top CG + G^\top C E_t \Pi\right] \Bigg).$$

Перейдем к оценке нормы, применяя предложение 5.1.3:

$$\|J'''_{\gamma x \gamma}\| \leqslant c_{00} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial \gamma_t} \left[J''_{\gamma x}\right]^q\right\| \leqslant c_{00} \big(\|x\| \cdot \|CG\|^2 + \|x^\top G^\top C\| \cdot \|CG\| +$$

$$+ \|x\| \cdot \|C\| + \|x\| \cdot \|CG\|^2 + \|x\| \cdot \|C\| + \|x^\top G^\top C\| \cdot \|G^\top C\| +$$

$$+ \|x^\top G^\top C\| \cdot 2 \|CG\|\big) \leqslant 4 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \cdot (\|x\| + \rho).$$

В результате

$$\|J'''_{\theta x \theta_s}\| \leqslant \|D\|^2 \cdot \|J'''_{\gamma x \gamma}\| \leqslant 4\, \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \cdot (\|x\| + \rho). \tag{5.1.33}$$

3) Оценим норму $\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\|$. Перейдем к производным по γ:

$$\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \leqslant \|D\|^2 \cdot \|D_s\| \cdot \|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\| \leqslant \|D\|^3 \cdot \|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\|.$$

Обозначим производные по элементам γ_q с помощью индексов:

$\frac{\partial}{\partial\gamma_q}(..) \doteq (..)_q$. Тогда $E_q \doteq G_q$, $E_t \doteq G_t$. Из леммы 5.1.2 имеем

$$J''_{qt} = \widehat{V}_q^\top C \widehat{V}_t - W_1^{qt} - W_2^{qt} =$$

$$= x^\top \left(\Pi G_t^\top C G_q \Pi - G^\top C \underbrace{\left(G_t G^\top C G_q + G_q G^\top C G_t\right)}_{A} \Pi - G^\top C G_q \Pi G_t^\top C G \right) x. \quad (5.1.34)$$

Вычислим 3-ю производную:

$$J'''_{qts} = x^\top \left(\underbrace{\Pi_s G_t^\top C G_q \Pi}_{A_1} + \underbrace{\Pi G_t^\top C_s G_q \Pi}_{A_2} + \underbrace{\Pi G_t^\top C G_q \Pi_s}_{A_3} - \underbrace{G_s^\top C A \Pi}_{A_4} - \underbrace{G^\top C_s A \Pi}_{A_5} - \right.$$

$$- \underbrace{G^\top C A_s \Pi}_{A_6} - \underbrace{G^\top C A \Pi_s}_{A_7} - \underbrace{G_s^\top C G_q \Pi G_t^\top C G - G^\top C_s G_q \Pi G_t^\top C G}_{A_8} -$$

$$\left. - \underbrace{G^\top C G_q \Pi_s G_t^\top C G}_{A_9} - \underbrace{G^\top C G_q \Pi G_t^\top C_s G - G^\top C G_q \Pi G_t^\top C G_s}_{A_{10}} \right) x.$$

Понадобятся соотношения:

$$\Pi_s = -\Pi G_s^\top C G - G^\top C G_s \Pi, \qquad C_s = -C\left(G_s G^\top + G G_s^\top\right) C.$$

Рассмотрим отдельные слагаемые.

$$x^\top A_{10} x = x^\top G^\top C G_q \Pi G_t^\top \left(C_s G + C G_s\right) x.$$

Обратим внимание на сумму в скобках:

$$C_s G + C G_s = -C\left(G_s G^\top + G G_s^\top\right) C G + C G_s =$$

$$= C G_s \left(I - G^\top C G\right) - C G G_s^\top C G = C G_s \Pi - C G G_s^\top C G.$$

С учетом последнего равенства

$$x^\top A_{10} x = x^T G^\top C G_q \Pi G_t^\top \left(C G_s \Pi - C G G_s^\top C G\right) x.$$

Применяя предложение 5.1.3, получаем оценку

$$\|x^\top A_{10} x\| \leqslant \|x^\top G^\top C\| \cdot (\|C\| \cdot \|x\| + \|CG\| \cdot \|CGx\|) \leqslant (\operatorname{Sp} C)^{3/2} \rho\,(\|x\| + \rho).$$

Ввиду симметрии между слагаемыми A_8 и A_{10} без вычислений получаем

$$\|x^\top A_8 x\| \leqslant (\operatorname{Sp} C)^{3/2} \rho\,(\|x\| + \rho).$$

Далее, $\|\Pi_s\| = \|\Pi G_s^\top CG + G^\top CG_s\Pi\| \leqslant 2\cdot\|CG\| \leqslant 2\sqrt{\mathrm{Sp}\, C}\,.$

$$\|x^\top A_9 x\| = \|x^\top G^\top CG_q\Pi_s G_t^\top CGx\| \leqslant \|x^\top G^\top C\|^2\cdot\|\Pi_s\| \leqslant 2\rho^2\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\,.$$

$$\|x^\top\Pi_s\| = \|x^\top\Pi G_s^\top CG + x^\top G^\top CG_s\Pi\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|\cdot\|CG\| + \|x^\top G^\top C\| \leqslant \sqrt{\mathrm{Sp}\,C}\,\left(\|x\|+\rho\right).$$

$$\|x^\top A_1 x\| = \|x^\top\Pi_s G_t^\top CG_q\Pi x\| \leqslant \|x^\top\Pi_s\|\cdot\|C\|\cdot\|x\| \leqslant (\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\left(\|x\|+\rho\right)\cdot\|x\|.$$

Ввиду симметрии между A_1 и A_3 без вычислений получаем

$$\|x^\top A_3 x\| \leqslant (\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\left(\|x\|+\rho\right)\cdot\|x\|.$$

Затем, $\|C_s\| = \|C\left(G_sG^\top + GG_s^\top\right)C\| \leqslant 2\cdot\|C\|\cdot\|CG\| \leqslant 2\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\,.$

$$\|x^\top A_2 x\| = \|x^\top\Pi G_t^\top C_sG_q\Pi x\| \leqslant \|C_s\|\cdot\|x\|^2 \leqslant 2\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\cdot\|x\|^2.$$

$$\|A\| = \|G_tG^\top CG_q + G_qG^\top CG_t\| \leqslant 2\,\|G^\top C\| \leqslant 2\sqrt{\mathrm{Sp}\,C}.$$

$$\|x^\top A_4 x\| = \|x^\top G_s^\top CA\Pi x\| \leqslant \|C\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|^2 \leqslant 2\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\cdot\|x\|^2.$$

$$\|G^\top C_s\| = \|G^\top C\left(G_sG^\top + GG_s^\top\right)C\| \leqslant 2\cdot\|G^\top C\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{Sp}\,C.$$

$$\|x^\top G^\top C_s\| = \|x^\top G^\top C\left(G_sG^\top + GG_s^\top\right)C\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x^\top G^\top C\|\cdot\|G^\top C\| + \underbrace{\|x^\top G^\top CG\|}_{\rho}\cdot\|C\| \leqslant 2\rho\,\mathrm{Sp}\,C.$$

$$\|x^\top A_5 x\| = \|x^\top G^\top C_sA\Pi x\| \leqslant \|x^\top G^\top C_s\|\cdot\|A\|\cdot\|x\| \leqslant 4\rho\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\cdot\|x\|.$$

Далее,

$$\|A_s\| = \|\left(G_tG^\top CG_q + G_qG^\top CG_t\right)_s\| =$$

$$= \|G_tG_s^\top CG_q + G_tG^\top C_sG_q + G_qG_s^\top CG_t + G_qG^\top C_sG_t\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\|C\| + 2\cdot\|G^\top C_s\| \leqslant 6\cdot\mathrm{Sp}\,C,$$

$$\|x^\top A_6 x\| = \|x^\top G^\top CA_s\Pi x\| \leqslant \|x^\top G^\top C\|\cdot\|A_s\|\cdot\|x\| \leqslant 6\rho\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\cdot\|x\|.$$

$$\|x^\top A_7 x\| = \|x^\top G^\top CA\Pi_s x\| \leqslant \|x^\top G^\top C\|\cdot\|A\|\cdot\|\Pi_s x\| \leqslant 2\rho\,(\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\left(\|x\|+\rho\right).$$

В результате оценка принимает вид

$$\|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \leqslant \|D\|^3\cdot\|J'''_{\gamma\gamma\gamma}\| \leqslant \|D\|^3\cdot c_{00}^{3/2}\cdot\|J'''_{qts}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|D\|^3\cdot c_{00}^{3/2}\cdot\left(\|x^\top A_1 x\| + \ldots + \|x^\top A_{10}x\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|D\|^3\cdot(c_{00}\mathrm{Sp}\,C)^{3/2}\left(6\,\|x\|^2 + 16\,\|x\|\,\rho + 6\rho^2\right). \tag{5.1.35}$$

4) Оценим сомножитель $\|B_2\|$. Учитывая определение, имеем

$$a_{s,j} \doteq J'''_{\theta\theta\theta_s} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x_j} - J'''_{\theta x_j \theta_s},$$

$$\|B_2\| = \| \sum_j \begin{pmatrix} a_{1,j} & \dots & a_{n,j} \end{pmatrix} \Delta x_j \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n} \, \| \sum_j a_{s,j} \Delta x_j \| = \sqrt{n} \, \| J'''_{\theta\theta\theta_s} \left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta x} \Delta x - J'''_{\theta x \theta_s} \Delta x \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n} \, \|B\| \cdot \|J'''_{\theta\theta\theta_s}\| \cdot \|J''_{\theta x} \Delta x\| + \sqrt{n} \, \|J'''_{\theta x \theta_s} \Delta x\|.$$

Применим неравенства (5.1.32), (5.1.33), (5.1.35). В результате получим оценку

$$\|B_2\| \leqslant \sqrt{n} \, \left\{ \|B\| \cdot \|D\|^2 \cdot (c_{00} \mathrm{Sp}\, C) \left(6 \, \|x\|^2 + 16 \, \|x\| \, \rho + 6\rho^2\right) + 4 \right\} \times$$

$$\times \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \cdot (\|x\| + \rho) \cdot \epsilon.$$

5) Оценим сомножитель $\|B_4\| = \|J'''_{\theta\theta x} \Delta x\|$. Из (5.1.34) имеем

$$\tfrac{\partial}{\partial x} J''_{qt} = \tfrac{\partial}{\partial x} \left\{ x^\top \left(\Pi G_t^\top C G_q \Pi - G^\top C A \Pi - G^\top C G_q \Pi G_t^\top C G \right) x \right\}.$$

Применим тождество

$$\tfrac{\partial}{\partial x} \left(x^\top Y x \right) = \tfrac{\left(\partial x^\top \cdot Y x + x^\top Y \cdot \partial x\right)}{\partial x} = x^\top \left(Y + Y^\top \right).$$

С учетом неравенства $\|J'''_{\gamma\gamma x}\| \leqslant c_{00} \cdot \max_{qt} \|\frac{\partial}{\partial x} J''_{qt}\|$ получаем

$$\|J'''_{\gamma\gamma x}\| \leqslant c_{00} \cdot \|x^\top \left(Y + Y^\top \right) \| =$$

$$= c_{00} \cdot \|x^\top \Pi G_t^\top C G_q \Pi - x^\top G^\top C A \Pi - x^\top G^\top C G_q \Pi G_t^\top C G +$$

$$+ x^\top \Pi G_q^\top C G_t \Pi - x^\top \Pi A^\top C G - x^\top G^\top C G_t \Pi G_q^\top C G\| \leqslant$$

$$\leqslant c_{00} \left(2 \, \|x^\top \Pi G_t^\top C G_q \Pi\| + \|x^\top G^\top C A \Pi\| + \right.$$

$$\left. + \|x^\top G^\top C G_q \Pi G_t^\top C G\| + \|x^\top \Pi A^\top C G\| + \|x^\top G^\top C G_t \Pi G_q^\top C G\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{00} \left(2 \, \|x\| \cdot \|C\| + \|x^\top G^\top C\| \cdot \|A\| + \|x^\top G^\top C\| \cdot \|CG\| + \right.$$

$$\left. + \|x\| \cdot \|A\| \cdot \|CG\| + \|x^\top G^\top C\| \cdot \|CG\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{00} \left(2 \, \|x\| \cdot \mathrm{Sp}\, C + 2\rho \, \mathrm{Sp}\, C + \rho \, \mathrm{Sp}\, C + 2 \, \|x\| \cdot \mathrm{Sp}\, C + \rho \, \mathrm{Sp}\, C \right) =$$

$$= 4 c_{00} \mathrm{Sp}\, C \, \left(\|x\| + \rho \right).$$

Тогда $\|B_4\| = \|J'''_{\theta\theta x} \Delta x\| \leqslant \|D\|^2 \cdot \|J'''_{\gamma\gamma x}\| \cdot \|\Delta x\| \leqslant$

$$\leqslant 4 \, \|D\|^2 \cdot c_{00} \mathrm{Sp}\, C \, \left(\|x\| + \rho \right) \cdot \epsilon.$$

6) Оценим слагаемое $\|B_6\| = \|\sum_j \sum_k J'''_{\theta x_j x_k} \Delta x_j \Delta x_k\|$. Из (5.1.25) следует

$$\left[J'''_{\gamma x x}\right]^q \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left[J''_{\gamma x}\right]^q = \Pi G_q^\top C G + G^\top C G_q \Pi,$$

и верна оценка $\left[J'''_{\gamma x x}\right]^q \leqslant 2\,\|CG\| \leqslant 2\sqrt{\operatorname{Sp} C}$ (предложение 5.1.3),

$$\|\sum_j \sum_k J'''_{\theta x_j x_k} \Delta x_j \Delta x_k\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_{00}}\, \|\left[J'''_{\gamma x x}\right]^q\| \cdot \|\Delta x\|^2 \leqslant 2\,\|D\| \cdot \sqrt{c_{00} \operatorname{Sp} C} \cdot \epsilon^2.$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 5.1.6. Из леммы 5.1.2 имеем

$$\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\| \doteq \|\,(R_0 + E)^{-1}\,\|,$$

$$\|E\| \leqslant \|R_1\| + \|R_2\| \leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \|x\| + \rho\right) \rho.$$

Из леммы 5.1.8 с учетом неравенства

$$|\lambda_i(A+E) - \lambda_i(A)| \leqslant \|\operatorname{diag}\left(\lambda_1(A+E) - \lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A+E) - \lambda_n(A)\right)\|$$

следует

Лемма 5.1.9. *Пусть A, E — вещественные симметрические матрицы, и λ_i — собственные числа. Тогда $\forall i$ $|\lambda_i(A+E) - \lambda_i(A)| \leqslant \|E\|$.*

Следствие. *Для симметричных вещественных неотрицательных матриц A, E верно неравенство $\|\,(A+E)^{-1}\,\|_2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(A+E)} \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(A) - \|E\|}$.*

Применим это следствие для получения верхней оценки нормы

$$\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\| = \|\,(R_0 + E)^{-1}\,\|.$$

Используя предложение 5.1.1, можем написать

$$\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\| \leqslant \sqrt{n}\,\|\,(J''_{\theta\theta})^{-1}\,\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0) - c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \|x\| + \rho\right) \rho}.$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 5.1.7. Установим одно вспомогательное неравенство. Заметим, что $CGG^\top = I_{N-p}$, следовательно, $\|C\| \cdot \|G\|^2 \geqslant \|CGG^\top\| = \|I_{N-p}\| = \sqrt{N-p}$. Учитывая соотношение

$$\|G\|^2 = (N-p)\|\gamma\|^2, \tag{5.1.36}$$

получаем неравенство

$$\|C\| \cdot \|\gamma\|^2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{N-p}}. \tag{5.1.37}$$

Перейдем к доказательству леммы. Матрицы C и $C+\Delta C$ симметричные и положительно определены:

$$\mathrm{Sp}\, C = \lambda_1(C) + \ldots + \lambda_{N-p}(C) > 0, \qquad \mathrm{Sp}\, C + \Delta \mathrm{Sp}\, C = \mathrm{Sp}\,(C+\Delta C) > 0.$$

Применяя лемму 5.1.9, получаем неравенство

$$\mathrm{Sp}\, \Delta C = \Delta \mathrm{Sp}\, C \leqslant (N-p) \max_i |\Delta\lambda_i| \leqslant (N-p) \cdot \|\Delta C\|. \tag{5.1.38}$$

Оценим $\|\Delta C\|$.

$$C + \Delta C = \left(GG^\top + \Delta G \cdot G^\top + G \cdot \Delta G^\top + \Delta G \cdot \Delta G^\top\right)^{-1} =$$

$$= C\left(I + \underbrace{\left(\Delta G \cdot G^\top + G \cdot \Delta G^\top + \Delta G \cdot \Delta G^\top\right) C}_{M}\right)^{-1}.$$

Обозначим $\nu \doteq \|M\|$. Имеет место оценка (см. 5.1.36)

$$\nu \doteq \|M\| \leqslant \|C\| \cdot \left(2 \cdot \|G\| \cdot \|\Delta G\| + \|\Delta G\|^2\right) =$$

$$= (N-p) \cdot \|C\| \cdot \left(2 \cdot \|\gamma\| \cdot \|\Delta\gamma\| + \|\Delta\gamma\|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (N-p) \cdot \|C\| \cdot \|D\| \cdot \|\Delta\theta\| \cdot (2 \cdot \|\gamma\| + \|D\| \cdot \|\Delta\theta\|) \doteq \nu_+.$$

Предположим, что $\nu_+ < 1$, тогда $\nu < 1$ и можно применить следствие 5.1.2, $C + \Delta C = C(I+Y)$, $\|Y\| \leqslant \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{N-p}$. Следовательно,

$$\|\Delta C\| \leqslant \|C\| \cdot \|Y\| \leqslant \|C\| \cdot \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{N-p} \leqslant \|C\| \cdot \frac{\nu_+}{1-\nu_+}\sqrt{N-p}. \tag{5.1.39}$$

Для выполнения неравенства $\mathrm{Sp}\, \Delta C \leqslant \mathrm{Sp}\, C$ ввиду (5.1.38) достаточно условия $(N-p) \cdot \|\Delta C\| \leqslant \mathrm{Sp}\, C$, и значит, в силу (5.1.39) достаточно удовлетворить неравенству $(N-p)^{3/2} \cdot \|C\| \cdot \frac{\nu_+}{1-\nu_+} \leqslant \mathrm{Sp}\, C$. Поскольку $\|C\| \leqslant \mathrm{Sp}\, C$ (см. предложение 5.1.1), достаточным будет также условие $(N-p)^{3/2} \cdot \mathrm{Sp}\, C \cdot \frac{\nu_+}{1-\nu_+} \leqslant \mathrm{Sp}\, C$, которое запишем в виде

$$\nu_+ \leqslant \frac{1}{(N-p)^{3/2}+1}. \tag{5.1.40}$$

Отсюда будет следовать и условие $\nu < \nu_+ < 1$.

Из неравенства (5.1.40) следует искомое ограничение на $\|\Delta\theta\|$:

$$\nu_+ = (N-p) \cdot \|C\| \cdot \|D\| \cdot \|\Delta\theta\| \cdot (2 \cdot \|\gamma\| + \|D\| \cdot \|\Delta\theta\|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(N-p)^{3/2}+1}. \tag{5.1.41}$$

Оно имеет вид $x(2a+x) \leqslant b$, где

$$x \doteq \|D\| \cdot \|\Delta\theta\|, \qquad a \doteq \|\gamma\|, \qquad b \doteq \frac{1}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\|}.$$

Учитывая, что $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$, имеем $x \leqslant \sqrt{(a^2+b)} - a = a\left(\sqrt{1+e}-1\right)$,

$$e \doteq \frac{b}{a^2} = \frac{1}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|^2},$$

т. е. неравенство (5.1.41) равносильно условию

$$\|D\| \cdot \|\Delta\theta\| \leqslant \|\gamma\| \cdot \left(\sqrt{1+e}-1\right). \tag{5.1.42}$$

Ввиду соотношения (5.1.37) верна оценка $e \leqslant \frac{1}{\sqrt{N-p}\left[(N-p)^{3/2}+1\right]} \leqslant \frac{1}{2}$, тогда $(\sqrt{6}-2)e \leqslant \sqrt{1+e}-1$, и достаточным условием для (5.1.42) и (5.1.41) является неравенство

$$\|D\| \cdot \|\Delta\theta\| \leqslant \|\gamma\| \cdot \left(\sqrt{6}-2\right) e =$$

$$= \|\gamma\| \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|^2},$$

которое запишем в виде

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2}+1\right] \cdot \|C\| \cdot \|D\| \cdot \|\gamma\|}. \tag{5.1.43}$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.1.2. Ввиду соотношений (5.1.12) выбором достаточно малого ϵ всегда можно обеспечить любую сколь угодно малую величину нормы $\|\Delta\theta\|$. Будем считать отклонения Δx малыми настолько, чтобы соответствующие отклонения $\Delta\theta$ удовлетворяли неравенству из условия леммы 5.1.7. Ниже будет показано, что для выполнения этого неравенства достаточно условия (5.1.21).

Получим оценку нормы $\|\Delta\theta\| = \|S_0^\top \Delta x + S_1^\top \Delta x + \Delta_2\theta\|$. С учетом (5.1.12) и следствия 5.1.1

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + \|S_1^\top\| \cdot \epsilon + \|\Delta_2\theta\|. \tag{5.1.44}$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} = \sqrt{\frac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon. \qquad (5.1.45)$$

Из леммы 5.1.4 имеем оценку $\|S_1^\top\| \leqslant \frac{21\sqrt{n}\, b_0^2(R^*)^{3/2}}{2\|x\|}\,\rho$.

Перейдем к оценке нормы $\|\Delta_2\theta\|$. Переменные в выражениях для компонент $\Delta_2\theta$ берутся в точках $x + h_i\Delta x$, $h_i \in (0,1)$ согласно (5.1.10). Пометим значения величин в этих точках индексом Δ. Из леммы 5.1.6 следует оценка

$$\|B^\Delta\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0^\Delta) - c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot (2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta)\,\rho^\Delta}.$$

Ввиду леммы 5.1.9

$$\left|\lambda_{\min}(R_0^\Delta) - \lambda_{\min}(R_0)\right| \leqslant \|R_0^\Delta - R_0\|,$$

тогда получаем оценку

$$\|B^\Delta\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0) - \|R_0^\Delta - R_0\| - c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot (2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta)\,\rho^\Delta}.$$

Имеет место оценка

$$\|R_0^\Delta - R_0\| \leqslant \|D\|^2 \cdot \|\widehat{V}^{\top\Delta} C \widehat{V}^\Delta - \widehat{V}^\top C \widehat{V}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|D\|^2 \cdot c_{00}\|C\| \cdot (\|x\| + \|\Delta x\|) \cdot \|\Delta x\| \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon$$

(см. доказательство леммы 5.1.2). В правой части все величины без индекса "Δ".

Исходя из этого неравенства, в качестве второго порога обусловленности оценок (см. (5.1.30)) принимаем условие

$$c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot \left(2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right)\rho^\Delta \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_{\min}(R_0), \qquad (5.1.46)$$

которое равносильно ограничению

$$\|B^\Delta\| \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)} = b_0. \qquad (5.1.47)$$

Выразим полученные неравенства через значения величин в точке $\theta(x)$. Принимая условие на $\Delta\theta$ из леммы 5.1.7 и $\rho, \rho^\Delta, \epsilon \leqslant \|x\|$, можем считать

$$c_0^\Delta = c_{00}\mathrm{Sp}\, C^\Delta \leqslant 2\, c_{00}\mathrm{Sp}\, C = 2\, c_0, \qquad \|x^\Delta\| \leqslant 2\,\|x\|. \qquad (5.1.48)$$

Учтем соотношение (5.1.19) между ρ и ρ^Δ, тогда

$$c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + c_0^\Delta \cdot \|D\|^2 \cdot \left(2\,\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right)\rho^\Delta \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (\|x\| + \epsilon)\,\epsilon + 2\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot (4\,\|x\| + \|x\|) \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant$$

$$\leqslant 2\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|\epsilon + 10\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant$$

$$\leqslant 12\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon).$$

Следовательно, достаточным условием для выполнения (5.1.46) является неравенство

$$12\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\| \cdot (\rho + \epsilon) \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_{\min}(R_0),$$

которое запишем в виде

$$\rho + \epsilon < \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|}. \qquad (5.1.49)$$

Все три условия (5.1.30), (5.1.46) и (5.1.49) будут выполнены, если ограничиться неравенством

$$\rho + \epsilon \leqslant \frac{\lambda_{\min}(R_0)}{24\,\sqrt{n}\,c_0 \cdot \|D\|^2 \cdot \|x\|} = \frac{\|x\|}{12\,b_0 R^*}. \qquad (5.1.50)$$

Это неравенство принимается в качестве единого порога обусловленности оценок. Оно включено в условие теоремы.

Для оценки $\|\Delta_2\theta\|$ имеем неравенство (см. (5.1.17), (5.1.18))

$$\|\Delta_2\theta\| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\sqrt{n}\,\|B^\Delta\| \cdot \left\{\|B^\Delta\| \cdot \|B_{3,5}^\Delta\| \cdot \left(\|B_2^\Delta\| + \|B_4^\Delta\|\right) + \|B_6^\Delta\|\right\}. \qquad (5.1.51)$$

При выполнении соотношения (5.1.50) и его следствия (5.1.46) для нормы $\|B^\Delta\|$ имеет место оценка (5.1.47). Оценки норм $\|B_{2\div6}^\Delta\|$ получаем из леммы 5.1.5. Упростим эти оценки с учетом неравенства $\rho^\Delta \leqslant \|x\|$ и выразим величины через значения переменных в точке $\theta(x)$ (5.1.19), (5.1.48):

$$\|B_2^\Delta\| \leqslant \sqrt{n}\,\left\{\|B^\Delta\| \cdot \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(6\,\|x^\Delta\|^2 + 16\,\|x^\Delta\|\,\rho^\Delta + 6\rho^{\Delta 2}\right) + 4\right\} \times$$

$$\times \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right)\epsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\left\{b_0 \cdot \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(6\,\|x^\Delta\|^2 + 16\,\|x^\Delta\| \cdot \|x\| + 6\|x\|^2\right) + 4\right\} \times$$

$$\times \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta \cdot \left(\|x^\Delta\| + \|x\|\right)\epsilon =$$

$$= 3\,\sqrt{n}\,\left\{62 \cdot b_0 \cdot \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta \cdot \|x\|^2 + 4\right\} \cdot \|D\|^2 \cdot c_0^\Delta \cdot \|x\| \cdot \epsilon \leqslant$$

$$\leqslant 6\,\sqrt{n}\,\left\{124 \cdot b_0 \cdot \|D\|^2 \cdot c_0 \cdot \|x\|^2 + 4\right\} \cdot \|D\|^2 \cdot c_0 \cdot \|x\| \cdot \epsilon =$$

$$= 24\,\sqrt{n}\,\{31 \cdot b_0 R^* + 1\}\,\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon,$$

$$\|B_{3,5}^\Delta\| \leqslant \|D\| \cdot \sqrt{c_0^\Delta}\,\left(\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right)\epsilon \leqslant 3\,\sqrt{2} \cdot \|D\| \cdot \sqrt{c_0} \cdot \|x\| \cdot \epsilon = 3\,\sqrt{2R^*}\,\epsilon,$$

$$\|B_4^\Delta\| \leqslant 4\,\|D\|^2 \cdot c_0^\Delta\,\left(\|x^\Delta\| + \rho^\Delta\right)\epsilon \leqslant 24\,\|D\|^2 \cdot c_0 \cdot \|x\| \cdot \epsilon = 24\,\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon,$$

$$\|B_6^\Delta\| \leqslant 2\,\|D\| \cdot \sqrt{c_0^\Delta}\,\epsilon^2 \leqslant 2\,\|D\| \cdot \sqrt{2c_0}\,\epsilon^2 \leqslant 2\,\frac{\sqrt{2R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2.$$

Подставим полученные значения в неравенство (5.1.51):

$$\|\Delta_2\theta\| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\sqrt{n}\,b_0 \times$$

$$\times \left\{ b_0 \cdot 3\sqrt{2R^*}\,\epsilon \cdot \left(24\,\sqrt{n}\,\left[31 \cdot b_0 R^* + 1\right]\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon + 24\frac{R^*}{\|x\|}\,\epsilon\right) + 2\,\frac{\sqrt{2R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2 \right\} =$$

$$= \sqrt{2n}\,b_0 \cdot \left\{36 \cdot b_0 R^*\left(\sqrt{n}\,\left[31 \cdot b_0 R^* + 1\right] + 1\right) + 1\right\}\frac{\sqrt{R^*}}{\|x\|}\,\epsilon^2. \qquad (5.1.52)$$

В результате получены оценки всех трех слагаемых в правой части неравенства (5.1.44). После выполнения подстановок (5.1.45), (5.1.52) и леммы 5.1.4 неравенство приобретает вид:

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \sqrt{\tfrac{b_0}{2\sqrt{n}}}\,\epsilon + \tfrac{21\,\sqrt{n}\,b_0^2 (R^*)^{\,3/2}}{2\|x\|}\,\rho\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2, \qquad (5.1.53)$$

$$c_{22} \doteq \tfrac{\sqrt{2n}\,b_0\sqrt{R^*}}{\|x\|}\left\{36\,b_0 R^*\left(\sqrt{n}\,\left[31\,b_0 R^* + 1\right] + 1\right) + 1\right\}.$$

Осталось показать, что из условия теоремы следует неравенство (5.1.43). Действительно, из оценки (5.1.53) ввиду неравенства (5.1.20) получаем соотношение

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \left(\sqrt{\tfrac{b_0}{2\sqrt{n}}} + \tfrac{21\,\sqrt{n}\,b_0\sqrt{R^*}}{24}\right)\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2.$$

Поскольку $\|C\| \leqslant \mathrm{Sp}\,C$, из условия (5.1.21) следует неравенство (5.1.43). Теорема 5.1.2 доказана. □

5.2 Количественные показатели идентифицируемости

В этом разделе на основании полученных выше теорем 4.1.1, 4.1.2, 4.3.1, 5.1.1, 5.1.2 предлагается ряд количественных априорных и апостериорных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем. Эти показатели основаны на числовых характеристиках нижней границы асимптотической дисперсии оценок параметров, приближенно вычисляемой через среднее значение обратной информационной матрицы (4.1.1). Информационные матрицы вычисляются в предельном случае малой амплитуды шумов и совпадают в этом предельном случае с обратными матрицами чувствительности $\left(S^\top S\right)^{-1}$ (5.1.14).

Условия идентифицируемости параметров можно разделить на три группы.

1. *Априорные* неколичественные критерии. Имеют вид алгебраических уравнений, разрешимость которых нужно проверять до начала измерительного эксперимента. Ес-

ли структура идентифицируемой системы достаточно простая, то проверяется полнота планируемого множества измерений [100,244] (определение 3.2.2). Для многомерных систем со сложным расположением идентифицируемых параметров необходимо дополнительно проверять, допускает ли система однозначную идентификацию при наилучших возможных наблюдениях (т. е. имеет ли место различимость) [2,22,72,263] (теорема 2.3.1 и далее). Критерии этого рода имеют предварительный характер, отвечая на вопрос об идентифицируемости в самой простой форме — "да" или "нет".

2. Апостериорные *количественные* показатели идентифицируемости. Основываются на вычислении матриц чувствительности полученных оценок к малым отклонениям в данных наблюдений. По матрицам чувствительности можно оценить погрешности результатов идентификации.

3. *Априорные количественные* показатели идентифицируемости. Представляют особый интерес с точки зрения практики и теории линейных систем. Являются обобщением критериев 1-го типа, отвечая на вопрос об идентифицируемости в количественной форме до начала измерительного эксперимента.

Критерии 3-го типа могут быть построены исходя из значений показателей 2-го типа (матриц чувствительности) при наилучшем плане эксперимента, если этот план удается вычислить теоретически. Такого рода критерии уже не зависят от наблюдений и могут считаться априорными. Они характеризуют наименьший разброс оценок параметров, который может быть получен для исследуемой системы при возмущениях заданного уровня.

С точки зрения статистического подхода, критерии 3-го типа могут опираться на априорные предположения о вероятностном распределении наблюдений и выражаться через количественные характеристики (например, собственные числа и собственные векторы) информационных матриц для идентифицируемых параметров. Через информационные матрицы вычисляются, например, асимптотические матрицы ковариации ошибок (АМКО) [120]. Получение точных аналитических выражений для информационных матриц в ряде задач идентификации с аддитивными шумами измерений является нерешенной проблемой [76,78,202]. В общем случае неразрешимы и уравнения для АМКО [120]. В этом разделе используется предположение о малости амплитуды шумов, и на этом пути удается получить приближенные выражения для информационных матриц, которые совпадают с обратными матрицами чувствительности.

Значение информационной матрицы и матрицы чувствительности зависит от распределения наблюдений. Это распределение учитывается в целевой функции при вычислении оптимальных оценок параметров. Наиболее сложными являются целевые функции, включающие как невязку уравнения модели, так и аддитивные ошибки в наблюдениях [35, 51, 206]. Известно, что получаемые на этом пути алгоритмы идентификации имеют недостаточную устойчивость к погрешностям начального приближения, что затрудняет их применение в контурах управления с реальным временем [206]. Исключение составляют только случаи непрерывного функционирования, когда можно пренебречь влиянием неизвестных начальных условий объекта [96, 120, 195]. С точки зрения вычислительной устойчивости заслуживают внимания более простые (в сравнении с [35,51,206]) методы идентификации, например, только по невязке уравнения или только с аддитивными ошибками наблюдений [42,45,76,202]. Минимизация ошибки наблюдений интересна также тем, что получаемая модель наилучшим образом аппроксимирует измеренные траектории объекта решениями модельного уравнения. Этот факт оказывается решающим аргументом в пользу выбора вариационного метода идентификации, потому что оценки матриц чувствительности и вытекающие из них доверительные интервалы для оценок параметров существенно опираются на оценки траекторий системы (см. раздел 5.2.7).

В этом разделе представлены примеры расчетов матриц чувствительности параметров динамической модели, получаемой минимизацией ошибок наблюдений (вариационным методом). По матрицам чувствительности вычисляются средние обратные информационные матрицы (в пределе малой нормы ошибок). Исходя из характеристик этих матриц предложен ряд априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости.

5.2.1 Класс моделей и оценки параметров

Как и ранее, рассматриваются модели вида (3.1.2)

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1, N-p}, \tag{5.2.1}$$

с переменными входа, выхода $u[k]$, $y[k]$ и матричными коэффициентами $\alpha_i = \alpha_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i = \beta_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r\times m}$, зависящими от постоянного векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^v$, который подлежит идентификации. Будем использовать конструкции, определенные в разделе 3.1, в частности, вектор $z \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ (3.1.6) траектории (процесса) системы (5.2.1), (3.1.2) и матрицу наблюдений V (3.1.8). На систему (5.2.1) налагаются ограничения (i), (ii) на с. 91 и (i'), (i") на с. 128.

Пусть $\breve{z}_{(1)}, \ldots, \breve{z}_{(L)}$ — наблюдения процессов системы (5.2.1). Оценка параметра θ вычисляется из условия минимума целевой функции (3.3.11)

$$J(\theta) = \min_{G_\theta z_{(i)}=0} L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \|\breve{z}_{(i)} - z_{(i)}\|^2. \tag{5.2.2}$$

Эти оценки называются вариационными (определение 3.3.1). Как следует из вида целевой функции, вариационные оценки обеспечивают наилучшую аппроксимацию наблюдений $\breve{z}_{(1)}, \ldots, \breve{z}_{(L)}$ решениями системы (5.2.1).

При статистическом рассмотрении задачи идентификации мы также приходим к целевой функции (5.2.2), если предполагаем, что наблюдения $\breve{z}_{(i)}$ получены добавлением к истинным процессам $z_{*(i)}$ аддитивных стохастических возмущений $\eta_{*(i)}$ с нулевым средним и конечной матрицей вторых моментов, см. (3.2.1). В этом случае системы (5.2.1) называются *системами с ошибками в наблюдаемых переменных* (errors in variables) [154].

Наблюдаемые процессы $z_{*(i)}$ (без возмущений) должны заключать в себе полную информацию о параметрах системы (5.2.1). Это равносильно условию полноты (определение 3.2.1, утверждение 3.2.1):

$$\lim_{L\to\infty} L^{-1}\sum_{i=1}^{L} D^\top V(z_{*(i)})^\top V(z_{*(i)})D > 0.$$

Тогда оценка

$$\theta_L = \arg\min_\theta J(\theta) \tag{5.2.3}$$

с вероятностью 1 сходится к истинному значению $\lim_{L\to\infty}\theta_L = \theta_*$ (теорема 3.4.1). Асимптотические свойства оценок (5.2.3) изучены в главе 4 (теоремы 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3).

Целевая функция (5.2.2) явно выражается через аргументы $\breve{z}$, θ, $\vartheta \doteq (1;\theta)$, см. (3.3.14):

$$J(\theta) = \vartheta^\top \widetilde{D}^\top \left(\sum_{i=1}^{L} \breve{V}_{(i)}^\top C \breve{V}_{(i)}\right) \widetilde{D}\vartheta.$$

5.2.2 Матрица чувствительности

Будем рассматривать оценки $\theta_L \doteq \theta(\breve{z})$ (5.2.3). Они удовлетворяют условию минимума целевой функции

$$J'_\theta(\breve{z},\theta) = 0, \tag{5.2.4}$$

где J'_θ — частная производная J по θ. Уравнение (5.2.4) задает неявную функцию

$$\theta(\breve{z}) = \theta_* + \Delta\theta(\Delta z) + \Delta^2\theta(\Delta z) + \ldots$$

$$\Delta z \doteq \breve{z} - z_*, \qquad J'_\theta(z_*,\theta_*) = 0.$$

Осюда следует (см. раздел 4.3)

$$\Delta\theta = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta z}\Delta z + O_{z,\theta,2}.$$

Элементы матрицы

$$\frac{d\theta}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = -\left(J''_{\theta\theta}\right)^{-1} J''_{\theta z} \doteq S^\top(z_*,\theta_*)$$

показывают чувствительность оптимального значения параметра к малым отклонениям в наблюдаемых переменных. Определим *матрицу чувствительности*

$$\mathfrak{S} \doteq S^\top S. \tag{5.2.5}$$

Ее роль иллюстрируется следующими двумя замечаниями.

Замечание 5.2.1. Шару возмущений $B_\sigma \doteq \{\|\Delta z\| \leqslant \sigma\}$ в пространстве наблюдаемых переменных при малых σ соответствует эллипсоид отклонений в пространстве параметров, определяемый через матрицу чувствительности:

$$B_\sigma \leftrightarrow \left\{ \|\Delta\theta\|_{R^{-1}} \doteq \sqrt{\Delta\theta^\top \mathfrak{S}^{-1} \Delta\theta} \leqslant \sigma \right\} =$$

$$= \left\{ \Delta\theta = S\Delta z : \ \|\Delta z\| \leqslant \sigma \right\}.$$

Замечание 5.2.2. Если считать возмущение Δz случайным вектором с нулевым мат. ожиданием и диагональной матрицей вторых моментов

$$\mathbf{M}\,\Delta z \Delta z^\top = \sigma^2 I,$$

то отклонения параметра $\Delta\theta$ будут распределены с нулевым мат. ожиданием и матрицей вторых моментов, определяемой через матрицу чувствительности:

$$\mathbf{M}\,\Delta\theta\Delta\theta^\top = \sigma^2 \mathfrak{S}.$$

Следующая теорема является прямым следствием теоремы 4.3.1.

Теорема 5.2.1. *Пусть Δz есть случайная величина с распределением $\mathbf{M}_{2,c\sigma}(0,\sigma^2 I)$ и $L = 1$. Тогда для оценки (5.2.3) по наблюдениям $\check{z} = z_* + \Delta z$ матрица чувствительности определяется выражением $\mathfrak{S} = \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$.*

Заметим отличие матрицы чувствительности (5.2.5) от функций чувствительности, определенных в [107, 120]. Пусть $L = 1$ и даны наблюдения $\check{z}$. Оптимальное значение оценки процесса

$$\hat{z} = \arg \min_{z:\, G_\theta z = 0} \|\check{z} - z\|^2$$

есть функция $\hat{z}(\theta)$:

$$\hat{z}(\theta) = \hat{z}_* + \Delta z(\Delta\theta) + \Delta^2 z(\Delta\theta) + \ldots \tag{5.2.6}$$

$$\Delta\theta \doteq \theta - \theta_*, \qquad \hat{z}_* \doteq \hat{z}(\theta_*).$$

Функциями чувствительности согласно [107, 120] называются элементы матрицы $\frac{d\hat{z}}{d\theta}$.

5.2.3 Информационная матрица

При статистическом рассмотрении роль матрицы чувствительности играет обратная информационная матрица.

Обозначим w вектор из переменных правой части и начальных условий уравнения (5.2.1). Уравнения (5.2.1) и $G_\theta z = 0$ равносильны условию $\exists\, w \quad z = H(\theta) w$, где $H(\theta)$ — матрица из марковских параметров (1.2.8). Пусть $p(\check{z}|\theta_*, w_*)$ — плотность распределения вектора $\check{z} = z_* + \eta_*$ (3.2.1) при $L = 1$. Обозначим $\mathrm{I}\,(\theta_*, w_*)$ информационную матрицу, определяемую выражениями [63, с. 119]

$$\mathrm{I}\,(\theta_*, w_*) \doteq \|\mathrm{I}_{ij}\|,$$

$$\mathrm{I}_{ij} = \mathbf{M}\, \frac{\partial}{\partial \chi_i} \log p(\check z|\chi) \frac{\partial}{\partial \chi_j} \log p(\check z|\chi),$$

$$\chi \doteq \begin{pmatrix} \theta_*; & w_* \end{pmatrix}.$$

Пусть θ_L — оценка (5.2.3) параметра $\theta_* = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \chi$. Нижняя граница для асимптотической дисперсии θ_L задается информационным неравенством [63, с. 359]

$$\operatorname{cov} L^{1/2}\,(\theta_L - \theta_*) \geqslant \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \mathrm{I}\,(\theta_*, w_*)^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1}. \tag{5.2.7}$$

Из этого неравенства следует, что величина $\mathrm{I}_1(\theta_*)$ играет роль информационной матрицы для параметра θ_* в условиях, когда распределение наблюдаемых переменных $\check z$ зависит от параметров θ_* и w_*, и w_* подлежит оцениванию вместе с θ_*.

Из теорем 4.1.1, 4.1.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.2.2. *Оценка θ_L (5.2.3) в предельном случае $L \to \infty$, $\sigma \to 0$ имеет дисперсию, определяемую выражением*:

$$\operatorname{cov} L^{1/2}\,(\theta_L - \theta_*) \to \sigma^2 \left(\mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}.$$

Если переменные w_* фиксированы, удовлетворяют условию полноты (3.2.4) *с $L = 1$ и распределение возмущений нормальное $\eta_* \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$, то оценка θ_L* (5.2.3) *является асимптотически наилучшей, т. е. имеет наименьшую возможную дисперсию согласно информационному неравенству* (5.2.7):

$$\sigma^2 \left(\mathbf{M}\, D^\top V_*^\top C_* V_* D\right)^{-1} = \sigma^2 \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1} = \mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1}.$$

Рассмотрим случай, когда переменные w_* не фиксированы и имеют распределение с конечным носителем. Тогда распределение вектора переменных $\chi \doteq \begin{pmatrix} \theta_*; & w_* \end{pmatrix}$ также имеет конечный носитель (значение θ_* фиксировано). Для вычисления дисперсии оценки θ_L параметра $\theta_* = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \chi$ нужно применить усреднение по переменным w_* (или по χ). Аналогом информационного неравенства в этом случае является следующее утверждение [13, §30]:

$$\operatorname{cov} L^{1/2}\,(\theta_L - \theta_*) \geqslant \mathbf{M}\, \mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1} + o(1).$$

В пределе $L \to \infty$ отсюда получается нижняя граница асимптотической дисперсии

$$\operatorname{cov} L^{1/2}\,(\theta_L - \theta_*) \geqslant \mathbf{M}\, \mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1}, \tag{5.2.8}$$

и эта граница неулучшаема [13, §30]. В неасимптотическом случае конечных объемов выборки ($L < \infty$) неравенств общего вида, подобных (5.2.8), по-видимому, не существует. Это дает основание использовать в качестве количественной априорной меры идентифицируемости числовые характеристики средней обратной информационной матрицы $\mathbf{M}\,\mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1}$. Ввиду теорем 5.2.1 и 5.2.2 для оценок с целевой функцией (5.2.2) мерой идентифицируемости является *средняя матрица чувствительности*:

$$\mathbf{M}\,\mathrm{I}_1(\theta_*)^{-1} = \sigma^2\,\mathbf{M}\left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1} = \sigma^2\,\mathbf{M}\,\mathfrak{S}. \tag{5.2.9}$$

5.2.4 Показатель идентифицируемости по отклику на типовые воздействия

В реальном эксперименте ансамбль значений переменных w_* (правой части и начальных условий) может быть простым набором заданных типовых воздействий. В этом случае количественный критерий идентифицируемости параметра θ строится исходя из собственных чисел и собственных векторов матрицы чувствительности

$$\mathfrak{S} = \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1},$$

вычисленной по отклику системы на заданное типовое воздействие. Примерами типовых воздействий являются единичные начальные условия и ступенчатая или импульсная функция в правой части уравнения (5.2.1). Если применяется l разных воздействий, то согласно (5.2.9) вычисляется среднее значение $\mathfrak{S} = \frac{1}{l}\left(\mathfrak{S}_1 + \ldots + \mathfrak{S}_l\right)$.

Установим связь собственных чисел матрицы $\mathfrak{S}$ с условием различимости (ii') на с. 128. Напомним, система (5.2.1) называется *локально различимой* (*локально идентифицируемой*) в точке θ_* по решению z_*, если в малой окрестности θ_* нет других систем с параметрами $\theta \neq \theta_*$, имеющих такое же решение z_* (см. определение 2.3.1).

Согласно следствию теоремы 3.2.1, система (5.2.1) локально различима в точке θ_* по решению z_* тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $V_* D$ линейно независимы.

Ввиду того, что условие (ii.a) на с. 91 гарантирует неособенность матрицы C, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.2.3. *Система* (5.2.1) *с условием* (i') *на с. 128 локально идентифицируема в точке θ_* по решению z_* тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы $\mathfrak{S}^{-1} = D^\top V_*^\top C V_* D$ строго больше нуля.*

Из этой теоремы и замечания 5.2.2 вытекает следующий алгоритм проверки идентифицируемости системы (5.2.1).

1. Выбирается значение параметра θ_*, для которого нужно проверить идентифицируемость. Вычисляется решение системы z_* для заданного типового воздействия w_* (вектор w_* сформирован из начальных условий и переменных $u[i]$ правой части).

2. Находится наименьшее собственное число матрицы $D^\top V_*^\top C V_* D$. Если оно больше порога точности, система локально идентифицируема.

3. Рассчитывается матрица чувствительности $\mathfrak{S} = \left(D^\top V_*^\top C V_* D\right)^{-1}$. Наибольшее собственное число $\lambda_{\max}$ и соответствующий собственный вектор матрицы $\mathfrak{S}$ задают, согласно замечанию 5.2.1, ожидаемую норму наибольшей погрешности $\Delta_{\max}$ оценок параметра θ_* (и соответствующее направление в пространстве параметров) при заданной погрешности наблюдений σ:

$$\Delta_{\max} \doteq \sigma\sqrt{\lambda_{\max}}.$$

4. Если величина $\Delta_{\max}$ "заметно меньше" абсолютных величин элементов вектора θ_*, то система имеет приемлемую степень идентифицируемости. В противном случае, несмотря на то, что система может быть идентифицируема по пункту 2, степень идентифицируемости недостаточно велика, и в практическом смысле система неидентифицируема.

5.2.5 Показатель идентифицируемости при наилучшем плане эксперимента

Предложенный выше количественный критерий идентифицируемости по отклику на типовые воздействия зависит от значений правой части и начальных условий системы: $\Delta_{\max} = \Delta_{\max}(w)$. Этот критерий не дает ответа на вопрос, существуют ли значения правой части и начальных условий, при которых степень идентифицируемости будет выше, чем при использовании конкретных типовых воздействий. Поэтому идентифицируемость по отклику на типовые воздействия не может считаться исчерпывающей характеристикой идентифицируемости.

Рассмотрим задачу нахождения значения переменных $w = w_0$, при которых достигается наилучшая степень идентифицируемости. При этом ошибка оценки параметров становится наименьшей:

$$\Delta_0 = \min_w \Delta_{\max}(w) = \Delta_{\max}(w_0).$$

Значение $w = w_0$ естественно назвать наилучшим планом идентификационного эксперимента. Для нахождения w_0 нужно решить задачу на максимум наименьшего собственного числа положительно определенной матрицы. Это E-оптимальный план [47]:

$$Q(w) \doteq \tfrac{1}{\|z_*\|^2} D^\top V_*^\top C V_* D, \tag{5.2.10}$$

$$w_0 = \arg\max_w \lambda_{\min}\left\{Q(w)\right\}.$$

Ввиду того, что амплитуда входных воздействий уже не задана заранее, как в типовых планах, появляется нормирующий множитель $\frac{1}{\|z_*\|^2}$. Его наличие означает рассмотрение чувствительности параметров не к абсолютным, а относительным величинам возмущений $\frac{\Delta z}{\|z_*\|}$.

Второй возможный подход к поиску наилучшего плана эксперимента состоит в минимизации по w объема эллипсоида рассеяния с матрицей

$$\bar{\mathfrak{S}}(w) \doteq Q^{-1}(w).$$

Это приводит к задаче максимизации определителя (D-оптимальный план [47])

$$w_0 = \arg\max_w |Q(w)|\,.$$

Не все способы оптимизации плана можно использовать для характеристики идентифицируемости. В частности, A-оптимальные планы, максимизирующие сумму квадратов главных полуосей эллипсоида рассеяния (след $Q(w)$) [47], всегда имеют ненулевое значение целевой функции, независимо от того, идентифицируема система или нет.

Поиск D-оптимальных планов существенно проще, чем E-оптимальных [47]. Но значение определителя матрицы $Q(w)$, вычисляемое при поиске D-оптимального плана, не имеет ясной связи с величиной погрешности $\Delta_{\max}$ оценки параметров. Ввиду этого E-оптимальный план, максимизирующий $\lambda_{\min}\{Q(w)\}$ и минимизирующий тем самым погрешность оценок параметров $\Delta_{\max} \doteq \sigma\lambda_{\max}\left\{\bar{\mathfrak{S}}(w)\right\}$, является с практической точки зрения предпочтительным.

5.2.6 Наилучший план для идентификации одного коэффициента

Пусть оценивается только один коэффициент уравнения. Тогда $v = 1$, $\theta \in \mathbb{R}^1$, $Q(w) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, и вычисление оптимального плана $w_0 = \arg\max_w Q(w)$ оказывается сравнительно простым. Такой план приводит к наилучшему возможному показателю идентифицируемости для данного коэффициента, ввиду того, что совместная оценка с другими коэффициентами только ухудшит показатель идентифицируемости (согласно информационному неравенству).

План w_0, оптимальный для одного коэффициента, можно использовать и в случае оценки вектора параметров $\theta \in \mathbb{R}^v$, $v > 1$, когда требуется улучшить идентифицируемость какой-либо одной критической компоненты.

Теорема 5.2.4. *В случае $v = 1$, $\theta \in \mathbb{R}^1$ вектор процесса оптимального плана $z_0 = z(w_0)$ коллинеарен главному собственному вектору матрицы*

$$P \doteq \Pi G_1^\top C G_1 \Pi, \qquad G_1 \doteq \partial G/\partial\theta, \qquad \Pi = I - G^\top\left(GG^\top\right)^{-1} G,$$

т. е. $z_0 \in \operatorname{im} z_1$, $z_1 = \arg\max_{\|z\|=1} z^\top P z$.

Доказательство. При $v = 1$ согласно (5.2.10)

$$Q(w) \doteq Q(z) = \frac{1}{\|z\|^2} D_1^\top V^\top C V D_1,$$

где $D_1 \doteq \partial\gamma/\partial\theta$ — вектор-столбец. Заметим, что $VD_1 = \frac{\partial V\gamma}{\partial\theta} = \frac{\partial Gz}{\partial\theta} \doteq G_1 z$, $G_1 \doteq \partial G/\partial\theta$. С учетом последнего равенства $Q(z) = \frac{1}{\|z\|^2} z^\top G_1^\top C G_1 z$. Нужно найти максимум последнего выражения по z при условии $Gz = 0$. Максимум достигается на направлении главного собственного вектора матрицы $P = \Pi G_1^\top C G_1 \Pi$. Теорема доказана. $\square$

Для целевых функций, учитывающих невязку уравнения вместе с невязками сигналов, поиск оптимального плана значительно более сложен, см. [35].

Приведем пример программы для среды Scilab [5] расчета оптимального плана идентификации коэффициента c_φ согласно теореме 5.2.4.

```
//Длина траектории
N=100;
// К-ты диф. уравнения
ca=-0.086; cf=-0.0072; ma=-0.86; mo=-0.050; mf=-0.83;
// Интервал дискретизации
tau=0.032;
// К-ты разностного уравнения
T=[1, -tau/2 ; 1, tau/2];
gamma1=[-ca, 1] * inv(T);
gamma2=[-mo, 1] * inv(T);
// Матрица разностной системы, 1-е уравнение:
row=[gamma1 zeros(1,N-2) ] ; col=[gamma1(1) ; zeros(N-2,1) ];
G1a=toeplitz(col,row);
row=[-1 0 zeros(1,N-2) ] ; col=[-1 ; zeros(N-2,1) ];
G1o=toeplitz(col,row);
row=[-cf 0 zeros(1,N-2) ] ; col=[-cf ; zeros(N-2,1) ];
G1f=toeplitz(col,row);
// 2-е уравнение:
row=[-ma 0 zeros(1,N-2) ] ; col=[-ma ; zeros(N-2,1) ];
G2a=toeplitz(col,row);
row=[gamma2 zeros(1,N-2) ] ; col=[gamma2(1) ; zeros(N-2,1) ];
G2o=toeplitz(col,row);
row=[-mf 0 zeros(1,N-2) ] ; col=[-mf ; zeros(N-2,1) ];
G2f=toeplitz(col,row);
// Полная матрица разностной системы
G = [G1a G1o G1f ; G2a G2o G2f];
// Производная по параметру: G1 = {\partial G} / {\partial cf}
Nul=zeros(N-1, N);
row=[-1 0 zeros(1,N-2) ] ; col=[-1 ; zeros(N-2,1) ];
G1ff=toeplitz(col,row);
G1 = [ Nul Nul G1ff ; Nul Nul Nul];
// Проектор на подпространство решений системы
C = inv(G*G'); Pi = eye(3*N,3* N) - G'*C*G;
// Матрица для итераций траектории
```

```
P = Pi*G1'*C*G1*Pi;
// Начальное значение траектории, ||z0||=1
z0 = ones (3*N,1); z0 = z0 / norm(z0,'fro');
// Итерации
delta = 100;
while delta>0.001,
z1 = P*z0; z1 = z1 / norm(z1,'fro');
delta = norm(z1-z0,'fro'); z0 = z1;
end
// Вывод результата; массив z0 содержит оптимальный план для к-та cf
// -- последовательно три массива длиной по N точек:
alpha = z0 (1:N);
omega = z0 (N+1:2*N);
phi   = z0 (2*N+1:3*N);
subplot(3,1,1); plot(1:N,alpha);
subplot(3,1,2); plot(1:N,omega);
subplot(3,1,3); plot(1:N,phi);
// Конец программы
```

5.2.7 Применение матрицы чувствительности для апостериорной оценки качества идентификации

Матрица чувствительности $\mathfrak{S}$ из теоремы 5.2.1 оказывается удобным инструментом для приближенного расчета доверительных интервалов полученных в результате идентификации оценок параметров.

Пусть $\hat{\theta}$ — оценка параметра, полученная по наблюдениям z. Требуется сопроводить все элементы вектора $\hat{\theta}$ значениями доверительных интервалов по заданному уровню вероятности. Ввиду сложного характера реального эксперимента точное вычисление доверительных интервалов не представляется возможным. Решение проблемы ищется в рамках гипотезы, что оценка процесса $\hat{z}$ (5.2.6), полученная из наблюдений z, "не сильно" отличается от неизвестного истинного значения z_*, и при вычислении матрицы чувствительности $\mathfrak{S}$ можно использовать $\hat{z}$ вместо z_*.

Величина $z - z_*$ является ошибкой наблюдений. Пусть она носит случайный характер с дисперсией $\sigma^2 I$, $\sigma \ll 1$. Тогда неизвестное истинное значение параметра θ_* отличается от оценки $\hat{\theta}$ на величину, которая имеет вероятностное распределение с дисперсией $\sigma^2\mathfrak{S}$ (см. замечание 5.2.2). Следовательно, величина

$$\Delta(\hat{\theta}_i) \doteq 2\sigma\sqrt{\mathfrak{S}_{ii}} \tag{5.2.11}$$

является приближенным значением доверительного интервала для оценки i-й компоненты $\hat{\theta}_i$ с уровнем значимости 0.95 в предположении нормальности распределения [52, табл.2].

Выражение (5.2.11) теоретически получено для малых значений σ. Практически же, согласно данным численного моделирования, линейная пропорциональность вида

(5.2.11) между СКО[*)] ошибок наблюдений σ и СКО оценок параметров сохраняется для относительных значений σ примерно до 50% [83, рис.4].

Значения доверительных интервалов, вычисленные из приближенного соотношения (5.2.11), позволяют составить суждение о степени доверия к полученным в ходе идентификации оценкам параметров.

5.2.8 Примеры расчетов

Рассмотрим динамическую систему из статьи [70] (см. также раздел 3.7.4):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = c_\alpha \alpha + \omega + c_\varphi \varphi, \\ \dot{\omega} = m_\alpha \alpha + m_\omega \omega + m_\varphi \varphi, \end{cases}$$

где $c_\alpha = -0.086$, $c_\varphi = -0.0072$, $m_\alpha = -0.86$, $m_\omega = -0.050$, $m_\varphi = -0.83$. Заменой производных конечными разностями переходим к системе (5.2.1) с $r = 2$, $m = 1$, $p = 1$, в которой вектор коэффициентов $\gamma = \gamma(\theta)$ зависит от векторного параметра

$$\theta = \Big(c_\alpha; \quad c_\varphi; \quad m_\alpha; \quad m_\omega; \quad m_\varphi \Big)$$

аффинным образом согласно условию (i) на с. 91.

Отклик системы на импульсное входное воздействие представлен на рисунке 1 (где $N = 100$ и время дискретизации $\tau = 0.032$).

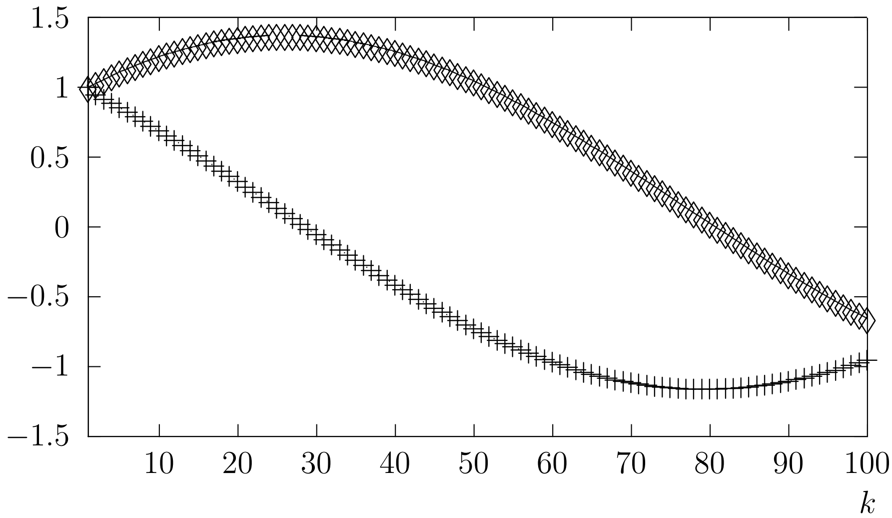


Рис. 1. Отклик системы на импульсное входное воздействие φ (" $\Diamond$ " — α, " + " — ω).

Результаты расчетов количественных показателей идентифицируемости (5.2.11) при относительном уровне помех $\sigma = 0.1$ сведены в таблицу[**)]. Для контроля были вы-

[*)] СКО — среднеквадратическое отклонение.

[**)] Несовпадения с данными таблицы [84] объясняются добавлением в целевую функцию весовой диагональной матрицы для учета различий в нормах сигналов α, ω, φ.

числены СКО оценок параметров по 50 реализациям наблюдений с моделированием гауссовых возмущений с относительным уровнем $\sigma = 0.1$. Абсолютные значения СКО возмущений вычислялись отдельно для каждого из трех сигналов α, ω, φ по формулам $\sigma_\alpha = \sigma\frac{\|\alpha\|}{\sqrt{N}}$, $\sigma_\omega = \sigma\frac{\|\omega\|}{\sqrt{N}}$, $\sigma_\varphi = \sigma\frac{\|\varphi\|}{\sqrt{N}}$.

Эталонные коэффициенты	Характеристики оценок	Входной сигнал ($\Delta_{\max}$)		
		Импульс (0.064)	Ступенька (0.140)	Оптимальный план для c_φ (0.049)
$c_\alpha = -0.086$	$\mathbf{M}\,\hat{c}_\alpha =$	-0.086 ± 0.004	-0.09 ± 0.01	-0.08 ± 0.01
	СКО$(\hat{c}_\alpha) =$	0.015	0.046	0.042
	$\Delta(\hat{c}_\alpha) =$	$2 \cdot 0.014$	$2 \cdot 0.041$	$2 \cdot 0.044$
$c_\varphi = -0.0072$	$\mathbf{M}\,\hat{c}_\varphi =$	-0.006 ± 0.013	-0.009 ± 0.010	-0.005 ± 0.004
	СКО$(\hat{c}_\varphi) =$	0.054	0.040	0.016
	$\Delta(\hat{c}_\varphi) =$	$2 \cdot 0.061$	$2 \cdot 0.036$	$2 \cdot 0.019$
Оценка только c_φ:	$\mathbf{M}\,\hat{c}_\varphi =$	-0.00 ± 0.02	-0.008 ± 0.003	-0.005 ± 0.002
	СКО$(\hat{c}_\varphi) =$	0.060	0.010	0.0076
	$\Delta(\hat{c}_\varphi) =$	$2 \cdot 0.060$	$2 \cdot 0.011$	$2 \cdot 0.0070$
$m_\alpha = -0.86$	$\mathbf{M}\,\hat{m}_\alpha =$	-0.86 ± 0.01	-0.86 ± 0.008	-0.86 ± 0.01
	СКО$(\hat{m}_\alpha) =$	0.050	0.033	0.039
	$\Delta(\hat{m}_\alpha) =$	$2 \cdot 0.046$	$2 \cdot 0.034$	$2 \cdot 0.039$
$m_\omega = -0.050$	$\mathbf{M}\,\hat{m}_\omega =$	-0.04 ± 0.015	-0.05 ± 0.03	-0.048 ± 0.007
	СКО$(\hat{m}_\omega) =$	0.057	0.13	0.027
	$\Delta(\hat{m}_\omega) =$	$2 \cdot 0.059$	$2 \cdot 0.12$	$2 \cdot 0.028$
$m_\varphi = -0.83$	$\mathbf{M}\,\hat{m}_\varphi =$	-0.84 ± 0.01	-0.83 ± 0.02	-0.83 ± 0.005
	СКО$(\hat{m}_\varphi) =$	0.055	0.079	0.017
	$\Delta(\hat{m}_\varphi) =$	$2 \cdot 0.057$	$2 \cdot 0.073$	$2 \cdot 0.017$

Таблица 1. Количественные показатели идентифицируемости при относительном уровне помех $\sigma = 10\%$.

В таблице вместе со средними значениями оценок по 50 реализациям указаны приближенные доверительные интервалы отклонений средних от мат. ожиданий (например, $\mathbf{M}\,\hat{c}_\alpha = -0.086 \pm 0.04$) исходя из распределения Стьюдента при вероятности $P = 2(1-F) = 0.9$ и $\nu = n - 1 = 49$ [52, табл.5].

Полученные при моделировании результаты свидетельствуют о хорошем соответствии СКО$(\hat{\theta}_i)$ величинам $\Delta(\hat{\theta}_i)$, которые предлагается использовать в качестве априорных показателей идентифицируемости параметров.

Коэффициент c_φ при $\sigma = 0.1$ оказался как по результатам моделирования, так и по априорным показателям практически неидентифицируемым при любом из трех использованных входных воздействий. В третьей строке таблицы приведены результаты идентификации коэффициента c_φ в случае, когда остальные коэффициенты фиксировались на истинных значениях. В последнем столбце указаны результаты при оптимальном для c_φ плане, вычисленном согласно теореме 5.2.4. Величина дисперсии c_φ при этом плане соответствует теоретически наилучшей степени идентифицируемости c_φ. Из таблицы следует, что для достижения приемлемого качества идентификации коэффициента c_φ нужно быть уверенным, что погрешность в наблюдаемых переменных не превышает 1%.

5.3 Численное сравнение оценок МНК и ВМ в задаче К. Ланцоша

К. Ланцошом [184, IV.23] было обнаружено, что при наличии ошибок округления в третьем разряде измерений суммы трех затухающих экспонент (относительная погрешность около 0.3%) по измерениям 24 точек невозможно восстановить ни число экспонент, ни значения их показателей. См. также доклад П. Дюписа и др. (2004) [149] о проблемах устойчивости восстановления показателей экспонент. Расчет априорных показателей идентифицируемости предлагаемым в диссертации методом в примере К. Ланцоша дает теоретическое подтверждение этого отрицательного результата; для восстановления экспонент оказывается необходимым уровень погрешности измерений не выше 0.01% (округление в пятом разряде). Также показано, что расчеты показателей экспонент обобщенным методом де Прони (по А. Хаусхолдеру (1950) [166]), когда для оценки применяется линейный метод наименьших квадратов, дают значительно худшие результаты в примере К. Ланцоша, чем расчеты вариационным методом А. О. Егоршина (ВМ); целевая функция ВМ как раз и используется для расчета априорных показателей идентифицируемости; как отмечено выше (следствие 2 теорем 4.1.2, 4.1.3), этот метод дает оценки, наиболее близкие к асимптотически эффективным при аддитивных ошибках наблюдений.

Данные измерений в примере Ланцоша

k	$\check{y}[k]$	k	$\check{y}[k]$	k	$\check{y}[k]$	k	$\check{y}[k]$
1	2.51	7	0.77	13	0.27	19	0.11
2	2.04	8	0.64	14	0.23	20	0.10
3	1.67	9	0.53	15	0.20	21	0.09
4	1.37	10	0.45	16	0.17	22	0.08
5	1.12	11	0.38	17	0.15	23	0.07
6	0.93	12	0.32	18	0.13	24	0.06

Уравнение объекта:

$$y[k] = 0.0951 \cdot e^{-k} + 0.8607 \cdot e^{-3k} + 1.5576 \cdot e^{-5k}.$$

Модель для оценки коэффициентов уравнения:

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Эталонные значения коэффициентов:

$$a_2 = 9, \qquad a_1 = 23, \qquad a_0 = 15.$$

Переход к разностному уравнению осуществлялся заменой производных конечными разностями. Данные измерений моделировались в программе по эталонному разностному уравнению с добавлением аддитивного гауссового шума $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Корни характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -5.$$

Таблица результатов

σ	$\lvert\Delta a_2\rvert$	$\lvert\Delta a_1\rvert$	$\lvert\Delta a_0\rvert$	$\widehat{\lambda}_1$	$\widehat{\lambda}_2$	$\widehat{\lambda}_3$
		$\left(\frac{\text{ВМ}}{\text{МНК}}\right)$			$\left(\frac{\text{ВМ}}{\text{МНК}}\right)$	
0.000001	$\frac{0.00007}{0.00045}$	$\frac{0.00017}{0.00111}$	$\frac{0.00025}{0.00161}$	$\frac{-1.00}{-1.00}$	$\frac{-3.00}{-3.00}$	$\frac{-5.00}{-5.00}$
0.000005	$\frac{0.00007}{0.00973}$	$\frac{0.00015}{0.02422}$	$\frac{0.00019}{0.03642}$	$\frac{-1.00}{-1.01}$	$\frac{-3.00}{-3.12}$	$\frac{-5.00}{-5.00}$
0.000010	$\frac{0.00002}{0.02462}$	$\frac{0.00002}{0.06170}$	$\frac{0.000006}{0.093667}$	$\frac{-1.00}{-1.02}$	$\frac{-3.00}{-3.23}$	$\frac{-5.00}{-5.00}$
0.000050	$\frac{0.003}{0.673}$	$\frac{0.009}{***}$	$\frac{0.01}{***}$	$\frac{-1.00}{-1.16}$	$\frac{-2.9}{-5.00}$	$\frac{-5.00}{-8.33}$
0.000100	$\frac{0.002}{***}$	$\frac{0.004}{***}$	$\frac{0.005}{***}$	$\frac{-1.00}{-1.18}$	$\frac{-3.00}{-5.26}$	$\frac{-5.00}{-16.7}$
0.000500	$\frac{0.03}{***}$	$\frac{0.08}{***}$	$\frac{0.1}{***}$	$\frac{-0.96}{-1.22}$	$\frac{-2.70}{-5.26}$	$\frac{-5.00}{-33.3}$
0.001	$\frac{***}{***}$	$\frac{***}{***}$	$\frac{***}{***}$	$\frac{-0.85}{-0.78}$	$\frac{-0.20}{-0.19}$	$\frac{-0.000001}{-0.03}$

*** — относительное смещение > 1.

Число итераций ИП СВ: 2-3 для уровней шума от 0.000001 до 0.0005. Начальное приближение при тех же уровнях шума — практически любое.

Теоретически предельное (по матрице чувствительности) значение СКО наблюдений, при котором ожидаемые СКО оценок не превосходят половины модулей эталонных коэффициентов: 0.0001.

Заключение по разделу 5.2

Рассмотрена задача идентификации параметров линейной динамической системы при аддитивных возмущениях в наблюдениях траекторий. В предельном случае малых шумов удается получить выражения для информационных матриц и предложить ряд количественных критериев идентифицируемости параметров, основываясь на априорных предположениях о распределении наблюдений. Количественные критерии идентифицируемости позволяют заранее выбирать оптимальные планы экспериментов для оценки параметров с наименьшей погрешностью.

С другой стороны, обратные информационные матрицы характеризуют чувствительность оценок параметров к малым возмущениям в измерениях. Это позволяет предложить способ оценки доверительных интервалов полученных в результате идентификации оценок параметров при заданном уровне шума наблюдений.

Вычисления матриц чувствительности предполагают совместную состоятельную оценку как параметров системы, так и оптимальной траектории по критерию наименьшего рассогласования с данными измерений. Для получения совместных оценок используется вариационный метод идентификации.

Глава 6

Вариационные оценки в анализе временных рядов

В этой главе изучается одна из самых интересных областей применения вариационных методов идентификации — анализ временных рядов. Показано, что при вариационной постановке задач анализа временных рядов *с трендами* естественным образом возникает новый класс так называемых *суммарных* (*дизъюнктивных*) систем.

Задачи исследования рядов с трендами встречаются в эконометрике [227], медицине, в технических системах управления [106], в теории прогнозирования и анализа данных [12, 51]. Эти задачи мы будем рассматривать как задачи идентификации процессов и параметров линейных систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий. Такими детерминированными составляющими могут быть решения другой линейной системы, как с известными параметрами, так и с параметрами, подлежащими идентификации наряду с параметрами основной системы.

Для применения вариационного подхода к исследованию временных рядов с трендами, в первую очередь, дается определение и описываются способы построения суммарных систем (теорема 6.1.2); затем формулируются условия нулевого пересечения многообразий решений двух динамических систем в виде условий на матрицы систем; по сути это условия идентифицируемости процессов ряда и тренда по наблюдениям суммарного процесса «ряд плюс тренд» при известных параметрах уравнений (теорема 6.1.3); после этого выводятся формулы оптимального вычисления слагаемых процессов ряда и тренда по возмущенным измерениям суммарного процесса (теоремы 6.2.1, 6.2.2 и следствие). Если параметры уравнений ряда и тренда неизвестны и подлежат идентификации, нужно проверить условие идентифицируемости. В ряде содержательных случаев получены критерии идентифицируемости как параметров суммарной системы, так и параметров уравнений слагаемых процессов (теоремы 6.3.1, 6.3.2). Получен критерий управляемости суммарных систем (теоремы 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6). Показано, что в большинстве практических случаев суммарные системы неуправляемы. Это накладывает ограничение на классы методов идентификации, которые могут быть применены к суммарным системам. К допустимым ввиду отсутствия ограничений на управляемость относятся вариационные методы идентификации. Применение вариационных методов идентификации также не накладывает ограничений на устойчивость идентифицируемых объектов и на минимальную длину наблюдаемых процессов, по которым производится идентификация (см. начало главы 3 и раздел 3.1).

6.1 Суммарные системы и их свойства

В этом разделе вводится новое понятие суммарных систем, исследуются их свойства и указываются способы построения. Показывается, что суммарные системы в ряде случаев, важных для приложений, неуправляемы.

6.1.1 Определение и построение суммарных систем

Определение 6.1.1. Система уравнений $Px = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ называется суммарной (или дизъюнктивной) по отношению к системам $P_1 x = 0$, $P_2 x = 0$, если $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P_1) + \mathcal{N}(P_2)$.

Определение 6.1.2. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство. И пусть $Px = 0$, $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — система уравнений, множество решений которой совпадает с $\mathcal{M}$: $\mathcal{N}(P) = \mathcal{M}$. Систему $Px = 0$ (или матрицу P) будем называть *описанием* для $\mathcal{M}$. Без ограничения общности можно считать, что строки P линейно независимы.

Пусть теперь $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — два линейных подпространства в $\mathbb{R}^n$ с описаниями P_1 и P_2. Тогда многообразие $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ также является подпространством в $\mathbb{R}^n$. Любое описание P для суммарного многообразия $\mathcal{M}$ согласно определению 6.1.1 является суммарным по отношению к описаниям P_1 и P_2.

Обозначение 6.1.1. Будем называть систему P дизъюнкцией (или суммой) систем P_1 и P_2 и обозначать $P = P_1 \vee P_2$, если $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P_1) + \mathcal{N}(P_2)$.

Замечание 6.1.1. Как будет видно из дальнейшего (предложение 6.1.2), описание суммарной системы получается не дизъюнкцией, а конъюнкцией описаний. Тем не менее, мы используем символ дизъюнкции, делая акцент в понятии системы на множестве ее решений, а не на описании. Это согласно с принятым в диссертации подходом, при котором явление (исследуемый объект) отождествляется с множеством наблюдений его характеристик, а модель явления (объекта) есть многообразие решений модельного уравнения, аппроксимирующее множество наблюдений (глава 2). Попросту говоря, явление может быть одно, а равносильных описаний бесконечное множество; поэтому описание не считается первичным понятием.

Предложение 6.1.1. *Любые две дизъюнкции $P = P_1 \vee P_2$ и $P' = P_1 \vee P_2$ левоэквивалентны, т. е. связаны левым умножением на неособенную матрицу:* $P = QP'$, $\det Q \neq 0$.

Укажем способ построения суммарных систем.

Обозначение 6.1.2. Пусть $\mathcal{M}^\circ$ — линейное подпространство всех линейных функционалов (числовых строк), аннулирующих множество векторов $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}^\circ = \{y : y\mathcal{M} = 0\}$ [118].

Теорема 6.1.1. *Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — линейные подпространства. Тогда имеют место соотношения*:

$$\mathcal{M}^{\circ\circ} = \mathcal{M}, \tag{6.1.1}$$

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M}^\circ \supseteq \mathcal{N}^\circ, \tag{6.1.2}$$

$$(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\circ = \mathcal{M}^\circ \cap \mathcal{N}^\circ, \tag{6.1.3}$$

$$(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\circ = \mathcal{M}^\circ + \mathcal{N}^\circ. \tag{6.1.4}$$

Доказательство. Первое соотношение есть теорема 2 § 17 монографии [118]. Остальные соотношения приведены там же в упражнении 8. Этим замечанием доказательство завершается. □

Ясно, что любая базисная система строк в $\mathcal{M}^\circ$ согласно определению 6.1.2 является описанием для $\mathcal{M}$. Обозначим $\mathcal{L}(P)$ линейную оболочку строк матрицы P. Тогда

$$\mathcal{L}(P) = \mathcal{N}(P)^\circ, \qquad \mathcal{L}(P)^\circ = \mathcal{N}(P). \tag{6.1.5}$$

Если P — описание для $\mathcal{M}$, то $\mathcal{L}(P) = \mathcal{M}^\circ$ и

$$\mathcal{L}(P)^\circ = \mathcal{M}. \tag{6.1.6}$$

Предложение 6.1.2. *Соотношения* $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P_1) + \mathcal{N}(P_2)$ *и* $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P_1) \cap \mathcal{L}(P_2)$ *равносильны.*

Доказательство. Ввиду равенств (6.1.5) соотношение $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P_1) + \mathcal{N}(P_2)$ равносильно равенству $\mathcal{L}(P)^\circ = \mathcal{L}(P_1)^\circ + \mathcal{L}(P_2)^\circ$. Из тождества (6.1.4) имеем $\mathcal{L}(P)^\circ = (\mathcal{L}(P_1) \cap \mathcal{L}(P_2))^\circ$. Последнее равносильно равенству $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P_1) \cap \mathcal{L}(P_2)$. Предложение доказано. □

6.1.1.1 Суммарные динамические системы

Операция суммирования линейных систем (определение 6.1.1) становится нетривиальной и интересной в случае динамических систем. Пусть некоторые матрицы G и F описывают динамические системы вида (1.4.1), т. е.

$$G \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-p)r \times Nn}, \tag{6.1.7}$$

$$
F \doteq \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_q & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_q & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-q)r_1 \times Nn}. \tag{6.1.8}
$$

Как и ранее, ассоциируем матрицы G и F с многочленными матрицами

$$
\begin{aligned} \gamma(s) &\doteq \gamma_p s^p + \gamma_{p-1} s^{p-1} + \ldots + \gamma_0, \\ \varphi(s) &\doteq \varphi_q s^q + \varphi_{q-1} s^{q-1} + \ldots + \varphi_0, \end{aligned} \tag{6.1.9}
$$

которые называются образующими для G и F. Будем обозначать $G \backsim \gamma(s)$, $F \backsim \varphi(s)$ (заметим отличие от символа $\sim$).

Без ограничения общности всюду полагается, что матрицы $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ имеют полный ранг, т. е. их канонические формы $\operatorname{Sm}\gamma(s)$ и $\operatorname{Sm}\varphi(s)$ не имеют нулевых строк.

Для дальнейшего нам понадобится записывать отношение $G \backsim \gamma(s)$ в виде явной формулы. Перестановкой строк матрицу G (6.1.7) приведем к виду

$$
G \sim \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{pmatrix}, \qquad G_i \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0^{(i)} & \gamma_1^{(i)} & \dots & \gamma_p^{(i)} & & & 0 \\ & \gamma_0^{(i)} & \gamma_1^{(i)} & \dots & \gamma_p^{(i)} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0^{(i)} & \gamma_1^{(i)} & \dots & \gamma_p^{(i)} \end{pmatrix} \doteq \backslash \gamma^{(i)} \backslash,
$$

где

$$
\gamma^{(i)} \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0^{(i)} & \gamma_1^{(i)} & \dots & \gamma_p^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (p+1)n}
$$

обозначает i-ю строку матрицы

$$
\gamma \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (p+1)n}.
$$

Заметим, что клетки $\gamma_k^{(i)}$ суть строки из n элементов:

$$
\gamma_k^{(i)} \doteq \begin{pmatrix} \gamma_k^{(i,1)} & \dots & \gamma_k^{(i,n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}.
$$

Обозначим

$$
\gamma^{(ij)} \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0^{(i,j)} & \gamma_1^{(i,j)} & \dots & \gamma_p^{(i,j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (p+1)},
$$

$$
\gamma^{(ij)}(s) \doteq \gamma_p^{(i,j)} s^p + \gamma_{p-1}^{(i,j)} s^{p-1} + \ldots + \gamma_0^{(i,j)} \in \mathbb{R}[s],
$$

$$
G_{ij} \doteq \backslash \gamma^{(ij)} \backslash \in \mathbb{R}^{(N-p) \times N}.
$$

Заметим, что $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{(11)} & \dots & \gamma^{(1n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{(r1)} & \dots & \gamma^{(rn)} \end{pmatrix}$ и $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma^{(11)}(s) & \dots & \gamma^{(1n)}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{(r1)}(s) & \dots & \gamma^{(rn)}(s) \end{pmatrix}$, где $\gamma^{(ij)}(s)$ — скалярные многочлены. Тогда с точностью до перестановки столбцов

$$G \underset{\mathrm{LR}}{\sim} \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1} & \dots & G_{rn} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \backslash\gamma^{(11)}\backslash & \dots & \backslash\gamma^{(1n)}\backslash \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \backslash\gamma^{(r1)}\backslash & \dots & \backslash\gamma^{(rn)}\backslash \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы E, $E^{(k)}$ тех же размеров, что и G_{ij}:

$$E^{(k)} \doteq E^{(k)}_{N-p} \doteq \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(N-p)\times N}, \tag{6.1.10}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{p_n-k}$$

$k \geqslant 0,$

$$E \doteq E_{N-p} \doteq E^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть s обозначает оператор сдвига, определенный соотношениями

$$s^k E \doteq E^{(k)}.$$

Тогда $\gamma^{(ij)}(s) \otimes E = \backslash\gamma^{(ij)}\backslash$. В итоге с точностью до перестановки столбцов

$$G \underset{\mathrm{LR}}{\sim} \begin{pmatrix} \backslash\gamma^{(11)}\backslash & \dots & \backslash\gamma^{(1n)}\backslash \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \backslash\gamma^{(r1)}\backslash & \dots & \backslash\gamma^{(rn)}\backslash \end{pmatrix} = \gamma(s) \otimes E. \tag{6.1.11}$$

Перестановка столбцов G означает изменение порядка элементов в векторе переменных z уравнения $Gz = 0$. Напомним, в уравнениях (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) был принят следующий порядок:

$$z = (w[1]; \dots; w[N]), \tag{6.1.12}$$

$$w[k] = (y[k]; u[k]) \in \mathbb{R}^{r+m}, \qquad n \doteq r + m,$$

$$y[k] = (y_1[k]; \dots; y_r[k]) \in \mathbb{R}^r, \qquad u[k] = (u_1[k]; \dots; u_m[k]) \in \mathbb{R}^m.$$

В равносильном уравнении с матрицей $\gamma(s) \otimes E$ (6.1.11) порядок переменных следующий:

$$z = (z_{y_1}; \dots; z_{y_r}; z_{u_1}; \dots; z_{u_m}), \tag{6.1.13}$$

$$z_{y_i} \doteq (y_i[1]; \dots; y_i[N]) \in \mathbb{R}^N, \qquad z_{u_i} \doteq (u_i[1]; \dots; u_i[N]) \in \mathbb{R}^N.$$

Порядок элементов в векторе z всегда будет ясен из контекста, и это не должно приводить к недоразумениям.

Пусть теперь дана клеточно-теплицевая матрица $P \backsim \pi(s)$ с теми же числами столбцов nN и клеточных столбцов N, что и у матриц G, F:

$$P = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_l & & & 0 \\ & \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_l & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r_2(N-l)\times nN},$$

$$\pi(s) \doteq \pi_l s^l + \pi_{l-1}s^{l-1} + \ldots + \pi_0, \qquad \pi_i \in \mathbb{R}^{r_2\times n}.$$

Обозначение 6.1.3. Пусть $\alpha(s) \doteq \begin{pmatrix} \alpha^{(1)}(s) \\ \vdots \\ \alpha^{(r)}(s) \end{pmatrix}$ — многочленная матрица из r строк $\alpha^{(r)}(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}[s]$. Обозначим $\mathcal{P}\left(\alpha(s)\right)$ множество многочленных строк вида

$$\nu_1(s)\alpha^{(1)}(s) + \ldots + \nu_r(s)\alpha^{(r)}(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}[s],$$

где $\nu_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ — произвольные скалярные многочлены. Это множество является линейным подпространством в пространстве многочленных строк относительно умножения на скалярные многочлены, точнее — модулем [118, с. 15].

Имеет место следующее утверждение, уточняющее предложение (6.1.2) для случая динамических систем.

Теорема 6.1.2. *Для клеточно-теплицевых матриц $G \backsim \gamma(s)$, $F \backsim \varphi(s)$ с одинаковыми числами столбцов и клеточных столбцов всегда существует клеточно-теплицевая матрица $P \backsim \pi(s)$ такая, что $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ и многочленная матрица $\pi(s)$ удовлетворяет условиям* (ii) *на с. 91. Последнее равенство равносильно равенству $\mathcal{P}\left(\pi(s)\right) = \mathcal{P}\left(\gamma(s)\right) \cap \mathcal{P}\left(\varphi(s)\right)$.*

Доказательство. Пусть матрица $G \backsim \gamma(s)$ состоит из $(N-p)\times N$ клеток размерности $r\times n$ и матрица $F \backsim \varphi(s)$ состоит из $(N-q)\times N$ клеток размерности $r_1\times n$. Покажем, что всегда можно построить клеточно-теплицевую матрицу $P \backsim \pi(s)$ из $(N-l)\times N$ клеток размерности $r_2\times n$, отвечающую соотношению $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$, и при этом верно равенство

$$\mathcal{P}\left(\pi(s)\right) = \mathcal{P}\left(\gamma(s)\right) \cap \mathcal{P}\left(\varphi(s)\right).$$

Введем, как это описано в формулах (6.1.14), числовую матрицу $E_{N-p} \doteq \begin{pmatrix} I_{N-p} & 0_{p'} \end{pmatrix}$ размерности $(N-p)\times(N-p+p')$, $p' \geqslant p$, и определим оператор сдвига s посредством соотношения

$$s^k E_{N-p} \doteq \begin{pmatrix} 0_k & I_{N-p} & 0_{p'-k} \end{pmatrix}, \quad k \in \overline{0,p'}. \tag{6.1.14}$$

Тогда матрицы G, F с точностью до перестановки строк и столбцов представимы через кронекеровы произведения вида (6.1.11):

$$G = \gamma(s) \otimes E_{N-p}, \qquad F = \varphi(s) \otimes E_{N-q}. \tag{6.1.15}$$

В силу предложения 6.1.2 соотношение $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ равносильно равенству $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(F)$. Линейное подпространство $\mathcal{L}(G)$ состоит из строк вида $\tau G = [\tau(s)\gamma(s)] \otimes E_1$, где многочленная строка $\tau(s) \in \mathbb{R}^{1\times r}[s]$ вычисляется по числовой строке $\tau \in \mathbb{R}^{Nn}$ по формуле (1.4.4) (см. раздел 1.4). Поясним конструкцию $[\tau(s)\gamma(s)] \otimes E_1$ примером. Пусть

$$\tau(s)\gamma(s) = \begin{pmatrix} s+1, & s^2+2s+2, & s^3+3s^2+3s+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}[s].$$

Тогда

$$[\tau(s)\gamma(s)] \otimes E_1 \doteq \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \end{pmatrix}, \qquad G_{1i} \in \mathbb{R}^{1\times N},$$
$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_{12} = \begin{pmatrix} 2\ 2\ 1\ 0\ \ldots\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}, \qquad G_{13} = \begin{pmatrix} 3\ 3\ 3\ 1\ 0\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что замена E_1 на E_{N-p} при $N-p=3$, $p=3$ приводит к матрице

$$[\tau(s)\gamma(s)] \otimes E_3 \doteq \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \end{pmatrix}, \qquad G_{1i} \in \mathbb{R}^{3\times N},$$

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & & & 0 \\ & 2 & 2 & 1 & & 0 \\ & & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 3 & 3 & 3 & 1 & \\ & & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее. Множество $\mathcal{N}(F)$ состоит из строк вида $\mu F = [\mu(s)\varphi(s)] \otimes E_1$, $\mu \in \mathbb{R}^{Nn}$. Учитывая равенство $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(F)$ получаем, что множество $\mathcal{L}(P)$ состоит из числовых строк вида $\rho(s) \otimes E_1$, $\deg \rho(s) < N$, где многочленные строки $\rho(s)$ представимы в виде произведений

$$\rho(s) = \tau(s)\gamma(s) = \mu(s)\varphi(s), \qquad \deg \rho(s) < N \tag{6.1.16}$$

— для всех тех скалярных многочленов $\tau(s)$, $\mu(s)$, для которых последнее равенство возможно. Предположим, что степени многочленов $\tau(s)$, $\mu(s)$ и соответственно $\rho(s)$ не ограничены. Тогда равенство $\tau(s)\gamma(s) = \mu(s)\varphi(s)$ задает линейное подпространство (модуль) $\mathcal{P}(\gamma(s)) \cap \mathcal{P}(\varphi(s))$. Выбором достаточно большого N всегда можно добиться, чтобы множество строк $\rho(s)$ конечной степени, определяемое условием (6.1.16), содержало базис этого модуля (важно, что базис конечен). Тогда будет верно равенство

$$\mathcal{P}(\rho(s)) = \mathcal{P}(\gamma(s)) \cap \mathcal{P}(\varphi(s)).$$

Выберем многочленную матрицу $\pi(s)$, строки которой образуют конечный базис модуля $\mathcal{P}(\rho(s))$. Тогда, если s понимать как оператор сдвига, матрица $\pi(s)$ будет двусторонне строчно-минимальная согласно определению 1.6.4, и при этом будут выполняться условия (ii) на с. 91. В итоге матрица $P = \pi(s) \otimes E_{N-l}$, где l — наибольшая степень строки в $\pi(s)$, и будет искомой клеточно-теплицевой матрицей суммарной системы.

Обратно, пусть $\mathcal{P}(\pi(s)) = \mathcal{P}(\gamma(s)) \cap \mathcal{P}(\varphi(s))$.

Обозначение 6.1.4. Обозначим $[\mathcal{P}]_N \subset \mathcal{P}$ множество многочленных строк $a(s) \in \mathcal{P}$ таких, что $\deg a(s) < N$.

Нетрудно увидеть, что для любых двух модулей $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1\times n}[s]$ верно равенство $[\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}]_N = [\mathcal{P}]_N \cap [\mathcal{Q}]_N$. Тогда

$$[\mathcal{P}(\pi(s))]_N = [\mathcal{P}(\gamma(s))]_N \cap [\mathcal{P}(\varphi(s))]_N .$$

Отсюда сразу получаем соотношение для множеств числовых строк из $\mathbb{R}^{nN}$:

$$\{[\mathcal{P}(\pi(s))]_N \otimes E_1\} = \{[\mathcal{P}(\gamma(s))]_N \otimes E_1\} \cap \{[\mathcal{P}(\varphi(s))]_N \otimes E_1\} .$$

Лемма 6.1.1. *Пусть $\alpha(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s]$ и p — наибольшая степень строки в $\alpha(s)$. Тогда верно равенство*

$$[\mathcal{P}(\alpha(s))]_N \otimes E_1 = \mathcal{L}(\alpha(s) \otimes E_{N-p}) .$$

Доказательство. Утверждение леммы становится очевидным, если вспомнить определения конструкций. Рассмотрим пример с $r = 2$, $n = 2$, $p = 2$, $N = 5$. Переход к другим значениям r, n, p, N не изменяет хода рассуждений. Пусть

$$\alpha(s) \doteq \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{(11)}(s) & \alpha^{(12)}(s) \\ \hline \alpha^{(21)}(s) & \alpha^{(22)}(s) \end{array}\right) \doteq \left(\begin{array}{c|c} s+1 & s^2+2s+2 \\ \hline s^2+3s+3 & s+4 \end{array}\right).$$

Тогда

$$[\mathcal{P}(\alpha(s))]_5 \doteq \left\{ \begin{pmatrix} \rho^{(1)}(s) & \rho^{(2)}(s) \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{1\times 2}[s],$$

$$\rho^{(i)}(s) \doteq \rho_0^{(i)} + \rho_1^{(i)} s + \rho_2^{(i)} s^2 + \rho_3^{(i)} s^3, \qquad i \in \overline{1,2},$$

$$[\mathcal{P}(\alpha(s))]_5 \otimes E_1 = \begin{pmatrix} \backslash\rho^{(1)}\backslash & \backslash\rho^{(2)}\backslash \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_0^{(1)} & \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \rho_3^{(1)} & \rho_4^{(1)} & \rho_0^{(2)} & \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \rho_3^{(2)} & \rho_4^{(2)} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\alpha(s) \otimes E_{5-2} = \begin{pmatrix} \backslash\alpha^{(11)}\backslash & \backslash\alpha^{(12)}\backslash \\ \backslash\alpha^{(21)}\backslash & \backslash\alpha^{(22)}\backslash \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & & & & 2 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 1 & & & & 2 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 1 & & & & 2 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 & & & 4 & 1 & & & \\ & 3 & 3 & 1 & & & 4 & 1 & & \\ & & 3 & 3 & 1 & & & 4 & 1 & \end{array}\right).$$

Несложно увидеть, что равенство

$$\left(\ \rho^{(1)}(s) \quad \rho^{(2)}(s)\ \right) =$$

$$= \nu_1\left(s\right)\left(\ \alpha^{(11)}(s) \quad \alpha^{(12)}(s)\ \right) + \nu_2\left(s\right)\left(\ \alpha^{(21)}(s) \quad \alpha^{(22)}(s)\ \right)$$

при ограничении $\deg\left(\ \rho^{(1)}(s) \quad \rho^{(2)}(s)\ \right) < 5$ равносильно соотношению

$$\left(\ \backslash\rho^{(1)}\backslash \quad \backslash\rho^{(2)}\backslash\ \right) =$$

$$= \nu_1\left(\ \backslash\alpha^{(11)}\backslash \quad \backslash\alpha^{(12)}\backslash\ \right) + \nu_2\left(\ \backslash\alpha^{(21)}\backslash \quad \backslash\alpha^{(22)}\backslash\ \right)$$

с числовыми строками $\nu_{1,2} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, связанными с многочленами $\nu_{1,2}\left(s\right)$ формулой вида (1.4.4) (см. раздел 1.4). Это означает, что верны равенства

$$\left[\mathcal{P}\left(\alpha(s)\right)\right]_5 \otimes E_1 = \mathcal{L}\left(\alpha(s) \otimes E_{5-2}\right),$$

$$\left[\mathcal{P}\left(\alpha(s)\right)\right]_N \otimes E_1 = \mathcal{L}\left(\alpha(s) \otimes E_{N-p}\right).$$

Лемма доказана. □

Следствие. *Верны равенства*

$$\mathcal{L}\left(\pi(s) \otimes E_{N-l}\right) = \mathcal{L}\left(\gamma(s) \otimes E_{N-p}\right) \cap \mathcal{L}\left(\varphi(s) \otimes E_{N-q}\right),$$

$$\mathcal{L}\left(P\right) = \mathcal{L}\left(G\right) \cap \mathcal{L}\left(F\right), \qquad \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F).$$

Последнее равенство следствия получается из предложения 6.1.2. Теорема доказана. □

Пример A. Пусть

$$G = \alpha(s) \otimes E, \qquad \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \in \mathbb{R}[s],$$

$$F = \varphi(s) \otimes E, \qquad \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0 \in \mathbb{R}[s],$$

$$\text{НОД}(\alpha, \varphi) = 1.$$

Ограничимся случаем многочленов α, φ с некратными корнями. Иногда будем опускать указание аргумента у многочленов и многочленных матриц, если это не вызывает недоразумений. Выберем $N = 6$, тогда

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & \\ & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & \\ & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.1.17)$$

1. Сначала построим суммарную систему $P = G \vee F$, прямо следуя определению 6.1.1: $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$. Согласно приложению 1 (раздел 6.4), многообразие $\mathcal{N}(G)$ решений системы $Gx = 0$ состоит из векторов $x = (x[1]; \ldots; x[6]) \in \mathbb{R}^6$, где $x[t] = x_1 s_1^t + x_2 s_2^t$, $t \in \overline{1,6}$, x_1, x_2 — произвольные начальные условия, $s_{1,2}$ — корни многочлена $\alpha(s)$. Многообразие $\mathcal{N}(F)$ решений системы $Fy = 0$ состоит из векторов $y = (y[1]; \ldots; y[6])$, $y[t] = y_1 s_3^t + y_2 s_4^t$, где y_1, y_2 — произвольные начальные условия, $s_{3,4}$ — корни многочлена $\varphi(s)$.

Суммарное многообразие $\mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ состоит из векторов

$$z = (z[1]; \ldots; z[6]),$$

$$z[t] = z_1 s_1^t + z_2 s_2^t + z_3 s_3^t + z_4 s_4^t, \qquad t \in \overline{1,6}, \tag{6.1.18}$$

где $z_1, \ldots, z_4$ — произвольные начальные условия, $\{s_1, \ldots, s_4\}$ — объединение множеств корней многочленов $\alpha(s)$ и $\varphi(s)$.

Из выражения (6.1.18) следует, что суммарное многообразие $\mathcal{N}(G)+\mathcal{N}(F)$ является множеством решений системы уравнений $Pz = 0$ с теплицевой матрицей P, составленной из коэффициентов многочлена $\pi(s) = \alpha(s)\varphi(s)$, $\deg \pi(s) \doteq l = 4$:

$$P = [\alpha(s)\varphi(s)] \otimes E_{N-l} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 1 & 0 \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Построим суммарную систему P другим способом, опираясь на теорему 6.1.2. Согласно утверждению теоремы, матрицу P сразу можно искать в клеточно-теплицевом виде $P = \pi \otimes E$,

$$\mathcal{P}(\pi) = \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{P}(\varphi).$$

Подпространство $\mathcal{P}(\alpha)$ образовано многочленами $p\alpha$, $p \in \mathbb{R}[s]$. Аналогично, подпространство $\mathcal{P}(\varphi)$ образовано многочленами $q\varphi$, $q \in \mathbb{R}[s]$. Пересечением $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{P}(\varphi)$ является множество многочленов $r\alpha\varphi$, $r \in \mathbb{R}[s]$. Базисом пересечения является многочлен $\pi = \alpha\varphi$, которому соответствует числовая теплицевая матрица $P = [\alpha\varphi] \otimes E$.

Пример Б. Рассмотрим динамические системы с матрицами G, F:

$$G \doteq \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \otimes E, \qquad F \doteq \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E, \tag{6.1.19}$$

$$\alpha = \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \qquad \beta = \beta(s) = s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

$$\tau = \tau(s) = s^2 + \tau_1 s + \tau_0, \qquad \zeta = \zeta(s) = s^2 + \zeta_1 s + \zeta_0,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \tau, \zeta) = 1.$$

Пусть $N = 5$, тогда

$$G = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 & \beta_0 & \beta_1 & 1 & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & \beta_0 & \beta_1 & 1 & \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & \beta_0 & \beta_1 & 1 \end{array}\right),$$

$$F = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \tau_0 & \tau_1 & 1 & & 0 & & & & & \\ & \tau_0 & \tau_1 & 1 & & & & 0 & & \\ 0 & & \tau_0 & \tau_1 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & & 0 \\ & & 0 & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & \\ & & & & & 0 & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 \end{array}\right).$$

Для системы с указанной матрицей G уравнение (1.4.1) принимает вид:

$$y[k+2] + \alpha_1 y[k+1] + \alpha_0 y[k] = u[k+2] + \beta_1 u[k+1] + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1,3}.$$

Многообразие решений системы с матрицей F состоит из траекторий $z' = (y'; u')$, описываемых однородными уравнениями

$$y'[k+2] + \tau_1 y'[k+1] + \tau_0 y'[k] = 0,$$

$$u'[k+2] + \zeta_1 u'[k+1] + \zeta_0 u'[k] = 0, \tag{6.1.20}$$
$$k \in \overline{1,3}.$$

1. Построим описание P для суммарного многообразия $\mathcal{M} = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$:

$$\mathcal{M} = \{z + z' = (y + y'; u + u')\}.$$

Согласно теореме 6.1.2 $P = \pi \otimes E$,

$$\mathcal{P}(\pi) = \mathcal{P}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \cap \mathcal{P}\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}.$$

Подпространство $\mathcal{P}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ состоит из строк

$$\begin{pmatrix} r\alpha & r\beta \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}[s].$$

Подпространство $\mathcal{P}\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}$ состоит из строк

$$\begin{pmatrix}p\tau & q\zeta\end{pmatrix}, \qquad p,q\in\mathbb{R}[s].$$

Тогда пересечение $\mathcal{P}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\cap\mathcal{P}\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}$ состоит из строк

$$\begin{pmatrix}r\xi\alpha & r\xi\beta\end{pmatrix}, \qquad r\in\mathbb{R}[s], \qquad \xi\doteq \text{НОК}(\tau,\zeta),$$

где $\text{НОК}(\tau,\zeta)$ — наименьшее общее кратное многочленов φ, ζ. Базисом пересечения является строка $\pi=\begin{pmatrix}\xi\alpha & \xi\beta\end{pmatrix}$. Следовательно,

$$P=\begin{pmatrix}\xi\alpha & \xi\beta\end{pmatrix}\otimes E, \qquad \xi\doteq \text{НОК}(\tau,\zeta).$$

Пример В. Пусть

$$G=\begin{pmatrix}\alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s)\end{pmatrix}\otimes E, \tag{6.1.21}$$

$$\alpha_i(s),\, \beta_j(s)\in\mathbb{R}[s],$$

$$F=\begin{pmatrix}\tau(s) & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \tau(s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1\end{pmatrix}\otimes E=\begin{pmatrix}I_r\otimes\tau(s) & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}\otimes E, \tag{6.1.22}$$

$$\tau(s)\in\mathbb{R}[s], \qquad m\geqslant 1.$$

Полагаем, что многочлены α_i и τ взаимно просты ($\text{НОД}(\alpha_i,\tau)=1$), $i=\overline{1,r}$, и многочлены β_j и τ взаимно просты ($\text{НОД}(\beta_j,\tau)=1$), $j=\overline{1,m}$. От многочленов α_i и β_j взаимной простоты не требуется.

Утверждение 6.1.1. *Для матриц G (6.1.21), F (6.1.22) матрица суммарной системы $P=G\vee F$ имеет вид $P=\pi(s)\otimes E$,*

$$\pi(s)=\tau(s)\begin{pmatrix}\alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s)\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Следуем той же схеме рассуждений, что и в предыдущих примерах А, Б.

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m\end{pmatrix}=\left\{p\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m\end{pmatrix}\,:\,p\in\mathbb{R}[s]\right\}\doteq\mathcal{G}.$$

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} \tau I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1\tau & \dots & p_r\tau & q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix} \,:\, p_i, q_j \in \mathbb{R}[s] \right\} \doteq \mathcal{F}.$$

Из условия взаимной простоты α_i и τ следует, что искомое пересечение имеет вид

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}\left(\tau \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \end{pmatrix} \right).$$

Базисом этого подпространства является строка

$$\pi = \tau \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $P = \pi \otimes E$. Утверждение доказано. □

Пример Г. Перейдем к системам из нескольких уравнений ($r > 1$). Пусть матрица F, как и в предыдущем примере В, определена равенствами (6.1.22). Рассмотрим матрицу G из r строк:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(s) & \dots & \alpha_{1r}(s) & \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1}(s) & \dots & \alpha_{rr}(s) & \beta_{r1}(s) & \dots & \beta_{rm}(s) \end{pmatrix} \otimes E \doteq \gamma(s) \otimes E, \tag{6.1.23}$$

$$\gamma(s) \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s].$$

Полагаем, что $\det \alpha(s) = 0$ не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{R}$ и НОД$(\tau, \det \alpha) = 1$.

Утверждение 6.1.2. *Для матриц F (6.1.22), G (6.1.23) матрица суммарной системы $P = G \vee F$ имеет вид $P = \pi(s) \otimes E$,*

$$\pi(s) = \tau(s) \begin{pmatrix} \alpha_{11}(s) & \dots & \alpha_{1r}(s) & \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1}(s) & \dots & \alpha_{rr}(s) & \beta_{r1}(s) & \dots & \beta_{rm}(s) \end{pmatrix} = \tau(s)\gamma(s). \tag{6.1.24}$$

Доказательство. Рассуждаем так же, как и в доказательстве предыдущего утверждения 6.1.1.

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \left\{ f \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \,:\, f \in \mathbb{R}^{1\times r}[s] \right\} \doteq \mathcal{G}.$$

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} \tau I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \tau p & q \end{pmatrix} \,:\, p \in \mathbb{R}^{1\times r}[s],\ q \in \mathbb{R}^{1\times m}[s] \right\} \doteq \mathcal{F}.$$

Из условия взаимной простоты $\det \alpha$ и τ следует, что искомое пересечение имеет вид

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}\left(\tau f \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \right) = \mathcal{P}\left(\tau \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \right).$$

Базисом пересечения является строка $\pi \doteq \tau \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Следовательно, $P = \pi \otimes E$.

Утверждение доказано. $\square$

6.1.2 Условие нулевого пересечения

Рассмотрим условия на матрицы G и F, при которых сумма многообразий $\mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ прямая, т. е. $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$. Это условие является необходимым и достаточным для единственности восстановления слагаемых $g \in \mathcal{N}(G)$ и $f \in \mathcal{N}(F)$ по наблюдению суммы $p = g + f$ при известных базисах подпространств $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$ или (равносильно) при известных матрицах G и F. Поэтому условие нулевого пересечения является условием идентифицируемости суммируемых процессов по наблюдениям сумм, при известных параметрах уравнений.

Пусть дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Будем обозначать $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ матрицу, столбцы которой образуют базис дополнения $\mathcal{R}(A)$ до $\mathbb{R}^n$ (напомним, $\mathcal{R}(A)$ обозначает линейную оболочку столбцов A):

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A) \dot{+} \mathcal{R}\left(\overline{A}\right), \qquad \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}\left(\overline{A}\right) = \{0\}.$$

Согласно этому определению всегда

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}\left(\overline{A}^{\top}\right). \tag{6.1.25}$$

Кроме того, будем обозначать $A_{\perp} \in \mathbb{R}^{m\times t}$ матрицу, столбцы которой образуют базис подпространства $\mathcal{N}(A)$:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A_{\perp}), \qquad AA_{\perp} = 0. \tag{6.1.26}$$

Столбцы составной матрицы $\left(A^{\top}, A_{\perp}\right)$ всегда содержат базис пространства $\mathbb{R}^m$: $\mathcal{R}\left(A^{\top}, A_{\perp}\right) = \mathbb{R}^m$. Если строки A линейно независимы, то матрица $\left(A^{\top}, A_{\perp}\right)$ неособенная.

Предложение 6.1.3. *Имеют место следующие соотношения:*

(1) *если столбцы матрицы A линейно независимы, то $\overline{\left(\overline{A}\right)} \doteq \overline{\overline{A}} = A$;*

(2) *всегда $\left(A_{\perp}\right)_{\perp} \doteq A_{\perp\perp} = 0$;*

(3) *всегда $\left(\overline{A}\right)_{\perp} = 0$;*

(4) *если строки матрицы A линейно независимы, то $\overline{\left(A_{\perp}\right)} \doteq \overline{A_{\perp}} = A^{\top}$.*

Доказательство. Первое соотношение сразу следует из определения матрицы $\overline{A}$. Второе и третье соотношения следуют из того, что матрицы $\overline{A}$ и $A_{\perp}$ по определению имеют линейно независимые столбцы, то есть $\mathcal{N}\left(\overline{A}\right) = 0$ и $\mathcal{N}(A_{\perp}) = 0$. Четвертое соотношение получается так: по условию строки A линейно независимы, следовательно, матрица $\left(A^{\top}, A_{\perp}\right)$ неособенная; последнее равносильно тому, что $A_{\perp} = \overline{A^{\top}}$ или (ввиду соотношения (1)) $\overline{A_{\perp}} = A^{\top}$. Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим теперь систему уравнений с матрицей G

$$Gg = 0, \tag{6.1.27}$$

и систему уравнений с матрицей F:

$$Ff = 0, \tag{6.1.28}$$

где $g, f \in \mathbb{R}^n$. Пусть наблюдаемой величиной является сумма

$$p = g + f.$$

Задача. По наблюдению p при известных матрицах G, F восстановить слагаемые g, f.

Если эта задача имеет единственное решение, будем говорить, что решения систем с матрицами G и F разделимы. Как было отмечено выше, условие разделимости есть условие прямой суммы подпространств решений $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$.

Построим описание для многообразия сумм $g + f$. Объединим уравнения (6.1.27) и (6.1.28) в систему

$$\begin{cases} p = (I, I)\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = 0. \end{cases} \tag{6.1.29}$$

Введем обозначения

$$H \doteq \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad N \doteq (I, I), \quad x \doteq \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}, \tag{6.1.30}$$

придем к системе

$$\begin{cases} p = Nx, \\ Hx = 0. \end{cases} \tag{6.1.31}$$

Получим условия разделимости в виде условий на матрицы N, H.

Пусть наблюдаемый вектор p удовлетворяет системе уравнений (6.1.31) при некотором x. Условие $Hx = 0$ равносильно выполнению равенства $x = H_{\perp}\chi$ при некотором χ, и вычисление x сводится к вычислению χ. Из первого уравнения системы (6.1.31) получаем

$$p = NH_{\perp}\chi,$$

откуда следует искомое условие на матрицы N, $H_{\perp}$:

Предложение 6.1.4. *Задача вычисления вектора x по наблюдению p имеет единственное решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $NH_{\perp}$ линейно независимы, т. е. $\mathcal{N}(NH_{\perp}) = \{0\}$.*

Утверждение 6.1.3. *Пусть матрицы N, H определены выражениями* (6.1.30). *Тогда следующие условия единственности* (*условия нулевого пересечения*) *равносильны*:

$$\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}, \tag{6.1.32}$$

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \{0\}, \tag{6.1.33}$$

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} = \{0\}, \tag{6.1.34}$$

$$\mathcal{N}(NH_\perp) = \{0\}, \tag{6.1.35}$$

$$\mathcal{N}(GF_\perp) = \{0\}, \tag{6.1.36}$$

$$\mathcal{N}(FG_\perp) = \{0\}. \tag{6.1.37}$$

Доказательство. 1) Равносильность (6.1.35) и (6.1.34) вытекает из определений:

$$H_\perp \doteq \begin{pmatrix} G_\perp & 0 \\ 0 & F_\perp \end{pmatrix}, \qquad NH_\perp = \begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix}.$$

2) Для доказательства равносильности (6.1.35) и (6.1.32) установим равносильность противоположных утверждений:

$$\mathcal{N}(NH_\perp) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) \neq \{0\}.$$

Переформулируем последнее утверждение, используя определение (6.1.26) и равносильность (6.1.35) и (6.1.34):

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(G_\perp) \cap \mathcal{R}(F_\perp) \neq \{0\}.$$

Для доказательства этого соотношения заметим, что $\mathcal{N}\begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} \neq \{0\}$ значит $G_\perp x = F_\perp y \doteq z$ для некоторых x, y, то есть $\mathcal{R}(G_\perp)$ и $\mathcal{R}(F_\perp)$ имеют общий элемент z. Обратно, если $z \in \mathcal{R}(G_\perp) \cap \mathcal{R}(F_\perp) \neq \{0\}$, то $z = G_\perp x = F_\perp y$ для некоторых x, y, следовательно, $\mathcal{N}\begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} \neq \{0\}$. Тем самым, равносильность (6.1.35) и (6.1.32) доказана.

3) Установим равносильность (6.1.35) и (6.1.34). От противного,

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \neq 0 \begin{cases} Gx = 0, \\ Fx = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathcal{R}(G_\perp), \\ x \in \mathcal{R}(F_\perp), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = G_\perp \chi = F_\perp \omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} \neq \{0\}.$$

4) Утверждения (6.1.36) и (6.1.37) равносильны в силу симметрии. Докажем (6.1.37). От противного, пусть $\exists\, w \neq 0$: $FG_\perp w = 0$. Тогда для $x \doteq G_\perp w \neq 0$ выполнено $Gx = 0$ и $Fx = 0$. Противоречие с (6.1.33). Обратно, пусть нарушено (6.1.33), т. е. $\exists\, x \neq 0$:

$Fx = 0$ и $Gx = 0$. Тогда $\exists\, w \neq 0$: $x = G_\perp w$, следовательно, $Fx = FG_\perp w = 0$. Это значит $\mathcal{N}(FG_\perp) \neq 0$. Утверждение доказано. □

6.1.2.1 Условие нулевого пересечения для динамических систем

Рассмотрим случай, когда системы (6.1.27), (6.1.28) динамические, т. е. имеют порядок $p > 0$; тогда матрицы G и F клеточно-теплицевые вида (6.1.7), (6.1.8) и соответствуют разностным уравнениям вида (1.4.1). С учетом определений 6.1.14, 6.1.11 можем написать

$$G = \gamma(s) \otimes E, \qquad F = \varphi(s) \otimes E. \tag{6.1.38}$$

Теорема 6.1.3. *Условие* $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$ *равносильно любому из следующих трех утверждений*:

(1) *многочленная матрица* $\binom{\gamma(s)}{\varphi(s)}$ *для всех* s *имеет линейно независимые столбцы*:

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix} = \{0\};$$

(2) *каноническая форма* $\operatorname{Sm}\binom{\gamma(s)}{\varphi(s)}$ *для всех* s *имеет линейно независимые столбцы*:

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\left(\operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix}\right) = \{0\}; \tag{6.1.39}$$

(3) *матрица* $\operatorname{Sm}\binom{\gamma(s)}{\varphi(s)}$ *является "вертикальной" (число строк* $\geqslant$ *числа столбцов), не имеет нулевых столбцов и состоит только из нулей и единиц.*

Доказательство. Согласно предложению 6.1.3

$$\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \{0\}.$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s) \otimes E \\ \varphi(s) \otimes E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix} \otimes E.$$

Следовательно, условие $\mathcal{N}\binom{G}{F} = \{0\}$ означает, что система (1.4.2), соответствующая составной матрице $\gamma(s) \doteq \binom{\gamma(s)}{\varphi(s)}$, имеет только нулевые траектории. Последнее равносильно тому, что каноническая форма $\operatorname{Sm}\binom{\gamma(s)}{\varphi(s)}$ для всех s имеет линейно независимые столбцы (см. предложение 6.4.1). Это утверждение (2). Согласно свойствам канонической формы, утверждение (2) равносильно (3). Наконец, ввиду того, что каноническая форма связана с исходной матрицей элементарными преобразованиями, утверждение (2) равносильно (1). Теорема доказана. □

Пример А. Пусть даны две системы с матрицами (6.1.17):

$$G = \alpha(s) \otimes E, \qquad \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

$$F = \varphi(s) \otimes E, \qquad \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \varphi) = 1.$$

Сумма $\mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ прямая, т. к. многообразия траекторий $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$ имеют нулевое пересечение: $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$. Это следует из теоремы 6.1.3 ввиду равенства $\operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\alpha(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Пример Б. Рассмотрим системы с матрицами (6.1.19).

Утверждение 6.1.4. *Пусть*

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \qquad F \doteq \begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix} \otimes E,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \tau, \zeta) = 1.$$

Тогда условие

$$\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$$

равносильно системе равенств

$$\begin{cases} \text{НОД}(\tau, \zeta) = 1,\\ \text{НОД}(\beta, \zeta) = 1,\\ \text{НОД}(\alpha, \tau) = 1. \end{cases} \tag{6.1.40}$$

Доказательство. Ввиду теоремы 6.1.3 достаточно проверить равносильность системы (**??**) следующему условию:

$$\operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \tau & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Последнее ввиду взаимной простоты многочленов $\alpha, \beta, \tau, \zeta$ равносильно равенству

$$\sigma = \text{НОД}(M_1, M_2, M_3) = \text{НОД}(\tau\zeta, \alpha\zeta, \beta\tau) = 1.$$

Отсюда следует (6.1.40) (проверяется от противного).

Обратно, пусть выполнено (6.1.40). Обозначим α, β, τ, ζ множества корней соответствующих многочленов. Объединение и пересечение множеств будем писать как сумму и произведение. Тогда (6.1.40) равносильно условиям

$$\begin{cases} \tau\zeta = \varnothing, \\ \beta\zeta = \varnothing, \\ \alpha\tau = \varnothing. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(\tau + \zeta)(\alpha + \zeta)(\beta + \tau) = (\tau + \zeta)(\alpha\beta + \alpha\tau + \zeta\beta + \zeta\tau) =$$

$$= (\tau + \zeta)\alpha\beta = \tau\alpha\beta + \zeta\alpha\beta = \varnothing,$$

что означает $\text{НОД}(\tau\zeta, \alpha\zeta, \beta\tau) = 1$. Утверждение доказано. □

Пример B. Рассмотрим системы с матрицами (6.1.21), (6.1.22).

Утверждение 6.1.5. *Для матриц G и F:*

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \alpha_i,\, \beta_j \in \mathbb{R}[s],$$

$$F = \begin{pmatrix} I_r \otimes \tau & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \tau \in \mathbb{R}[s], \qquad m \geqslant 1,$$

$$\text{НОД}(\alpha_i, \tau) = 1, \qquad \text{НОД}(\beta_j, \tau) = 1.$$

многообразия $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$ имеют нулевое пересечение тогда и только тогда, когда $r = 1$.

Доказательство. Применяя теорему 6.1.3, рассмотрим составную матрицу

$$M \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \tau & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \tau & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме, $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда каноническая форма $\operatorname{Sm} M$ состоит только из нулей и единиц, что равносильно взаимной простоте всех миноров M старшего порядка. Выпишем эти миноры:

$$M_0 \doteq \begin{vmatrix} \tau & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \tau & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{vmatrix} = \tau^r,$$

$$M_i \doteq \begin{vmatrix} \tau & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \tau & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \tau^{r-1}\alpha_i, \qquad i \in \overline{1,r},$$

$$M_{r+j} \doteq \begin{vmatrix} \tau & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \tau & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_j & \dots & \beta_m \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \tau^r\beta_j, \qquad j \in \overline{1,m}.$$

Несложно увидеть, что НОД$(M_0, \dots, M_{r+m}) = \tau^{r-1} = 1$ тогда и только тогда, когда $r = 1$. Утверждение доказано. $\square$

Пример Г. Рассмотрим системы с матрицами (6.1.23), (6.1.22).

Утверждение 6.1.6. *Для матриц* G *и* F:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \alpha(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s], \qquad \beta(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}[s],$$

$$F = \begin{pmatrix} I_r \otimes \tau & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \tau \in \mathbb{R}[s], \qquad m \geqslant 1,$$

многообразия $\mathcal{N}(G)$ *и* $\mathcal{N}(F)$ *имеют нулевое пересечение тогда и только тогда, когда НОД*$(\det\alpha, \tau) = 1$.

Доказательство. Согласно утверждению (1) теоремы 6.1.3, условие нулевого пересечения равносильно условию

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ I_r \otimes \tau(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \{0\}\,.$$

Последнее равносильно соотношению

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ I_r \otimes \tau(s) \end{pmatrix} = \{0\}\,. \tag{6.1.41}$$

Для выполнения этого равенства достаточно отсутствия общих корней у многочленов $\det\alpha$ и $\det\left(I_r \otimes \tau(s)\right) = \tau^r$, т. е. (6.1.41) следует из условия $\text{НОД}(\det\alpha, \tau) = 1$.

Обратно, пусть $\text{НОД}(\det\alpha, \tau) \neq 1$, и λ — общий корень многочленов α и τ: $\alpha(\lambda) = 0\,,\quad \tau(\lambda) = 0$. Тогда

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} \alpha(\lambda) \\ I_r \otimes \tau(\lambda) \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} \alpha(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\left(\alpha(\lambda)\right) \neq \{0\}\,.$$

Следовательно, условие $\text{НОД}(\det\alpha, \tau) = 1$ является не только достаточным, но и необходимым. Утверждение доказано. □

6.1.3 Условие управляемости

Для идентификации параметров линейных систем известно много алгоритмов, и как правило, идентифицируемая система предполагается управляемой [195]. В этом разделе получен критерий управляемости суммарных систем, из которого следует, что суммарные системы в большинстве практических случаев неуправляемы. Это существенно сужает класс методов, применимых для идентификации параметров суммарных систем. Вариационные методы не требуют управляемости (глава 3), и поэтому могут быть применены к суммарным системам.

Пусть даны две динамические системы с клеточно-теплицевыми матрицами

$$G \backsim \gamma(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s], \qquad F \backsim \varphi(s) \in \mathbb{R}^{r_1\times n}[s] \tag{6.1.42}$$

(определения конструкций даны в разделе 6.1.1.1). И пусть дана суммарная (дизъюнктивная) система

$$P \doteq G \vee F \backsim \pi(s) \in \mathbb{R}^{r_2\times n}[s], \tag{6.1.43}$$

определяемая условием $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$. Существование такой системы утверждается в теореме 6.1.2. Без ограничения общности предполагаем, что матрицы $\gamma(s)$, $\varphi(s)$ $\pi(s)$ имеют полный ранг, т. е. их канонические формы не имеют нулевых строк.

Обозначение 6.1.5. Пусть $v \in \mathbb{R}^{r\times n}[s]$ — многочленная матрица. Тогда $\operatorname{base}\mathcal{P}\,(v)$ обозначает произвольный базис модуля $\mathcal{P}\,(v)$.

Будем обозначать $\pi \doteq \gamma \vee \varphi$, если $P = G \vee F$, $P \backsim \pi(s)$, $G \backsim \gamma(s)$, $F \backsim \varphi(s)$.

Напомним известные критерии управляемости.

Система вида (1.4.2) с матрицей $G \backsim \gamma(s)$ называется управляемой, если (и только если) управляема равносильная ей система (1.1.2) в форме 1-го порядка (см. определение 1.1.3).

Среди всех равносильных систем вида (1.1.2) наименьшей размерностью $q = p_1 + \ldots + p_r$ пространства состояний обладают только наблюдаемые системы (теорема 1.2.2).

Имеют место следующие признаки управляемости (см., например, [146, раздел 8.2]):

Утверждение 6.1.7. *Система* (1.4.2) *управляема тогда и только тогда, когда выполнено любое из нижеследующих равносильных условий:*

1) *разложение*

$$\gamma(s) = \pi(s)\gamma'(s) \tag{6.1.44}$$

возможно только с унимодулярной матрицей $\pi(s)$ ($\deg\det\pi(s) = 0$, *т. е. определитель* $\pi(s)$ *не зависит от* s);

2) *каноническая форма* $\mathrm{Sm}\,\gamma(s)$ *состоит только из нулей и единиц*;

3) *матрица* $\gamma(s)$ *имеет линейно независимые строки для любого* $s \in \mathbb{R}$.

Исследуем управляемость суммарных систем. Сначала установим два простых утверждения. Опустим указание аргумента у многочленных матриц.

Предложение 6.1.5. *Пусть* γ *— многочленная строка из* n *элементов,* φ *— многочленная матрица из* n *столбцов, и* $G \backsim \gamma$, $F \backsim \varphi$ *— клеточно-теплицевые матрицы. Тогда*

$$\gamma \in \mathcal{P}\,(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}\,(G) \supseteq \mathcal{N}\,(F)\,.$$

Доказательство. Из $\gamma \in \mathcal{P}\,(\varphi)$ следует, что матрица $\binom{\gamma}{\varphi}$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду $\binom{0}{\varphi}$. Значит, матрица $\binom{G}{F}$ левым умножением на неособенную матрицу приводится к виду $\binom{0}{F}$, т. е. $\mathcal{N}\,\binom{G}{F} = \mathcal{N}\,\binom{0}{F}$. Учитывая, что $\mathcal{N}\,\binom{G}{F} = \mathcal{N}\,(G) \cap \mathcal{N}\,(F)$ и $\mathcal{N}\,\binom{0}{F} = \mathcal{N}\,(F)$, получаем вложение $\mathcal{N}\,(G) \supseteq \mathcal{N}\,(F)$. □

Предложение 6.1.6. *В условиях предложения 6.1.5 пусть* $\mathcal{P}\,(\gamma) \cap \mathcal{P}\,(\varphi) \neq \{0\}$. *Тогда* $\mathcal{P}\,(\gamma) \cap \mathcal{P}\,(\varphi) = \mathcal{P}\,(\mu\gamma)$, *где* μ *— многочлен. При этом* $\deg\mu > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma \notin \mathcal{P}\,(\varphi)$.

Доказательство. 1) Из $\deg\mu = 0$ следует $\gamma \in \mathcal{P}\,(\varphi)$. 2) Определим клеточно-теплицевую матрицу $P \backsim \mu\gamma$. Пусть $\deg\mu > 0$, тогда $\mathcal{N}\,(P) \supset \mathcal{N}\,(G)$. Учитывая равенство $\mathcal{N}\,(P) = \mathcal{N}\,(G) + \mathcal{N}\,(F)$, получаем $\mathcal{N}\,(F) \not\subset \mathcal{N}\,(G)$. Согласно предложению 6.1.5, $\gamma \notin \mathcal{P}\,(\varphi)$. □

Несложно устанавливается следующая теорема.

Теорема 6.1.4. *Пусть* $r = 1$ *и* $P \backsim \pi$, $G \backsim \gamma$, $F \backsim \varphi$ *— клеточно-теплицевые матрицы такие, что* $\mathcal{N}\,(P) = \mathcal{N}\,(G) + \mathcal{N}\,(F)$ *и* $\mathcal{N}\,(G) \cap \mathcal{N}\,(F) = \{0\}$. *Тогда* $\pi = \mu\gamma$, *где* μ *— некоторый многочлен степени больше нуля. Другими словами, в случае* $r = 1$ *суммарная система* $P \backsim \pi$ *всегда неуправляема.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}(F) \not\subset \mathcal{N}(G)$, имеем $\gamma \notin \mathcal{P}(\varphi)$ (предложение 6.1.5). Согласно предложению 6.1.6 $\deg \mu > 0$. Это значит, что суммарная система с матрицей $\pi = \mu\gamma$ неуправляема. □

Дадим необходимое и достаточное условие управлямости суммарной системы.

Обозначение 6.1.6. Пусть $\overline{\gamma}$ — наименьшее по числу элементов множество строк: $\mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi)$ (строки матрицы $\overline{\gamma}$ могут не быть строками γ).

Замечание 6.1.2. Из определения 6.1.6 следует, что строки $\overline{\gamma}$ линейно независимы (в том смысле, что каноническая форма матрицы $\overline{\gamma}$ не имеет нулевых строк).

Запишем матрицу φ в канонической диагональной форме

$$\operatorname{Sm} \varphi = u\varphi v = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \varphi_q & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \doteq \varphi', \tag{6.1.45}$$

где u и v — унимодулярные многочленные матрицы. Обозначим

$$\gamma' \doteq \gamma v = \begin{pmatrix} \gamma_{(1)} & \dots & \gamma_{(q)} & \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{6.1.46}$$

где $\gamma_{(1)}, \dots, \gamma_{(q)}$ — столбцы, ε — прямоугольная подматрица. Пусть u' — унимодулярная многочленная матрица такая, что $u'\varepsilon$ имеет канонический вид $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ на множестве левых элементарных преобразований, и ε' не имеет нулевых строк, при этом строк ε' равно рангу ε', т. е. числу ненулевых элементов на диагонали двусторонней канонической формы ε' [23, гл. VI, пар. 2]. Обозначим

$$u'\gamma' \doteq \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{(1)} & \dots & \hat{\gamma}_{(q)} & \varepsilon' \\ \overline{\gamma}_{(1)} & \dots & \overline{\gamma}_{(q)} & 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} * \\ \overline{\gamma}' \end{pmatrix},$$

$$\overline{\gamma}' \doteq \begin{pmatrix} \overline{\gamma}_{(1)} & \dots & \overline{\gamma}_{(q)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.47}$$

Предложение 6.1.7. *Множество строк матрицы $\overline{\gamma} \doteq \overline{\gamma}' v^{-1}$ есть наименьшее по числу элементов множество такое, что $\mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi)$.*

Доказательство. Верны равенства:

$$\mathcal{P}(\gamma') \cap \mathcal{P}(\varphi') = \mathcal{P}(u'\gamma') \cap \mathcal{P}(\varphi') = \mathcal{P}(\overline{\gamma}') \cap \mathcal{P}(\varphi').$$

Ввиду унимодулярности матрицы v отсюда следует равенство

$$\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\varphi).$$

По построению, подматрица ε' не имеет нулевых строк, поэтому число строк в $\overline{\gamma}'$ и $\overline{\gamma}$ минимально. Предложение доказано. □

Следствие 6.1.1. *Верно равенство* $\dim \mathcal{P}(\overline{\gamma}) = \dim \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\varphi)$.

После построения матрицы $\overline{\gamma}$ описанным выше способом построим матрицу $\overline{\varphi}$ такую, что $\mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi})$ (подробней см. ниже подраздел 6.1.3.1). Тогда

$$\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi}).$$

Очевидно, $\gamma \vee \varphi = \overline{\gamma} \vee \overline{\varphi}$, т. е. дизъюнктивные системы, построенные по парам (γ, φ) и $(\overline{\gamma}, \overline{\varphi})$, совпадают с точностью до левых элементарных преобразований.

Следствие 6.1.2. *Верны равенства*

$$\dim \mathcal{P}(\overline{\gamma}) = \dim \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi}) = \dim \mathcal{P}(\overline{\varphi}).$$

Подведем некоторый итог. Из приведенных выше рассуждений вытекает следующий факт.

Теорема 6.1.5. *Пусть* γ *и* φ *— многочленные матрицы с одинаковыми числами столбцов. Тогда существует унимодулярная матрица* v *такая, что* $\gamma \vee \varphi = (\overline{\gamma}' \vee \overline{\varphi}')\, v$, *где* $\overline{\gamma}'$ *записана в левосторонней канонической форме, а* $\overline{\varphi}'$ *— в двусторонней канонической форме* (*Смита*):

$$\overline{\gamma}' \doteq \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \\ & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \gamma_{rr} & \end{array}\right),$$

$$\overline{\varphi}' \doteq \left(\begin{array}{ccc|c} \varphi_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \varphi_r & \end{array}\right), \tag{6.1.48}$$

$$r = \dim \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi).$$

Определение 6.1.3. Представление (6.1.48) назовем *каноническим* (*минимальным*) *представлением дизъюнкции* $\gamma \vee \varphi$.

Следствие 6.1.3. *Пусть* $\pi' = \overline{\gamma}' \vee \overline{\varphi}'$ *— минимальное представление дизъюнкции* $\pi = \gamma \vee \varphi$. *Тогда система* π *управляема тогда и только тогда, когда управляема система* π'.

Доказательство. Матрица π управляема тогда и только тогда, когда ее двусторонняя каноническая форма имеет вид $\mathrm{Sm}\,\pi = (\,I\ 0\,)$. Но матрицы π и π' правоэквивалентны, следовательно имеют одну и ту же двустороннюю каноническую форму. Следствие доказано. □

Определение 6.1.4. Будем называть уравнения (6.1.42) *согласованными* (*дизъюнктивно согласованными*, или *согласованными по дизъюнкции*), если с точностью до левых элементарных преобразований $\gamma = \overline{\gamma}$ и $\varphi = \overline{\varphi}$.

Теорема 6.1.6. *Пусть* $\overline{\gamma} \vee \overline{\varphi}$ *— минимальное представление дизъюнкции* $\gamma \vee \varphi$ *. Тогда для управляемости суммарной системы* $\pi = \gamma \vee \varphi$ (6.1.43) *необходимо и достаточно, чтобы* 1) *все строки* $\overline{\gamma}$ *представляли собой управляемую подсистему и* 2) *все строки* $\overline{\varphi}$ *представляли собой управляемую подсистему.*

Доказательство. Без ограничения общности можно рассмотреть матрицы $\overline{\gamma}$, $\overline{\varphi}$ в канонической форме (6.1.48): $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}'$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'$. Общеизвестно, что $\overline{\gamma}$ управляема тогда и только тогда, когда $\gamma_{11} \cdot \ldots \cdot \gamma_{rr} = 1$, и $\overline{\varphi}$ управляема тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_r = 1$ [141, 146]. Из свойств левой канонической формы [23, гл. VI] для квадратной матрицы следует равносильность условия управляемости $\overline{\gamma}$ условию $\gamma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\gamma_{ii} = 1$.

Пусть системы $\overline{\gamma}$ и $\overline{\varphi}$ обе управляемы. Тогда $\mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi}) = \mathcal{P}(\overline{\gamma}) = \mathcal{P}(\overline{\varphi})$ и дизъюнкция $\overline{\gamma} \vee \overline{\varphi} \doteq \operatorname{base} \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi})$, с точностью до равносильных левых элементарных преобразований совпадает с $\overline{\gamma} \sim \operatorname{base} \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \sim \overline{\varphi}$, т. е. управляема.

Пусть хотя бы одна из систем $\overline{\gamma}$ или $\overline{\varphi}$ неуправляема. Ввиду следствия 6.1.2 матрица $\pi \doteq \operatorname{base} \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi})$ имеет ровно r линейно независимых строк. Кроме того, множество строк π вложено в линейную оболочку $\mathcal{P}(\overline{\gamma})$ и одновременно вложено в линейную оболочку $\mathcal{P}(\overline{\varphi})$, т. е. верны равенства

$$\pi = p\overline{\gamma} = q\overline{\varphi}$$

для некоторых неособенных многочленных матриц $p, q \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$. Ввиду того, что хотя бы одна из систем $\overline{\gamma}$ или $\overline{\varphi}$ неуправляема, из последних равенств следует неуправляемость π. Теорема доказана. □

В тезисах доклада на X Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» им. Е.С. Пятницкого (3 - 6 июня 2008 г.), Москва, ИПУ РАН, был опубликован неверный вариант теоремы об управляемости [80]. Здесь мы исправили эту ошибку.

Замечание. Используя технику и утверждения раздела 2.4, можно показать, что полученные здесь результаты без существенных изменений переносятся на системы с непрерывным временем, когда s понимается как оператор дифференцирования.

6.1.3.1 Построение матрицы $\overline{\varphi}$

Пусть даны описанные выше в выражениях (6.1.45), (6.1.46), (6.1.47) матрицы φ', γ', $\overline{\gamma}'$. По построению, они удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{P}(\gamma') \cap \mathcal{P}(\varphi') = \mathcal{P}(\overline{\gamma}') \cap \mathcal{P}(\varphi').$$

Поставим задачу построить матрицу $\overline{\varphi}'$ такую, что

$$\mathcal{P}(\overline{\gamma}') \cap \mathcal{P}(\varphi') = \mathcal{P}(\overline{\gamma}') \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi}').$$

Согласно выражениям (6.1.45), (6.1.47)

$$\overline{\gamma}' \doteq \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\gamma}_{(1)} & \dots & \overline{\gamma}_{(q)} & 0 \end{array} \right),$$

$$\varphi' \doteq \left(\begin{array}{ccc|c} \varphi_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \varphi_q & 0 \end{array} \right).$$

Выберем унимодулярные матрицы u'', v'' такие, что матрица $u''\overline{\gamma}'v'' \doteq \overline{\gamma}''$ имеет двустороннюю каноническую форму (Смита), т. е.

$$\overline{\gamma}'' \doteq u'' \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\gamma}_{(1)} & \dots & \overline{\gamma}_{(q)} & 0 \end{array} \right) v'' = \left(\begin{array}{cccc|c} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \gamma_r & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тогда матрица $\varphi'' \doteq \varphi' v''$ имеет вид

$$\varphi'' \doteq \varphi' v'' = \left(\begin{array}{cccc|c} \varphi''_{11} & \dots & \varphi''_{1r} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \varepsilon'' & \vdots \\ \varphi''_{q1} & \dots & \varphi''_{qr} & & 0 \end{array} \right).$$

При этом подматрица ε'' строго вертикальная, поскольку $r \leqslant q$. Ранг ε'' равен $q-r$, столбцы ε'' линейно независимы. Выберем унимодулярную матрицу u''' такую, чтобы произведение $u'''\varepsilon''$ имело левоканонический вид $u'''\varepsilon'' \doteq \varepsilon''' \doteq \left(\begin{smallmatrix} \overline{\varepsilon}'' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, где строки подматрицы $\overline{\varepsilon}''$ линейно независимы, и число этих строк равно $q-r$. Тогда

$$\begin{aligned} u'''\varphi'' &\doteq \left(\begin{array}{cccc|c} \hat{\varphi}_{(1)} & \dots & \hat{\varphi}_{(r)} & \overline{\varepsilon}'' & 0 \\ \overline{\varphi}_{(1)} & \dots & \overline{\varphi}_{(r)} & 0 & 0 \end{array} \right) \doteq \begin{pmatrix} * \\ \overline{\varphi}' \end{pmatrix}, \\ \overline{\varphi}' &\doteq \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{\varphi}_{(1)} & \dots & \overline{\varphi}_{(r)} & 0 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

и подматрица $\left(\overline{\varphi}_{(1)} \cdots \overline{\varphi}_{(r)} \right)$ квадратная полного ранга. Она всегда может быть приведена в левостороннюю каноническую форму. Таким образом,

$$\mathcal{P}\left(\overline{\gamma}'\right) \cap \mathcal{P}\left(\varphi'\right) = \mathcal{P}\left(\overline{\gamma}'\right) \cap \mathcal{P}\left(\overline{\varphi}'\right),$$

где одна из матриц записана в двусторонней канонической форме, а другая в левостороней канонической форме:

$$\overline{\gamma}' \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \gamma_r & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\overline{\varphi}' \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1r} & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \varphi_{rr} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Обозначим $\overline{\gamma} \doteq \overline{\gamma}' v^{-1} v''^{-1}$, $\overline{\varphi} \doteq \overline{\varphi}' v^{-1} v''^{-1}$. Тогда

$$\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\overline{\gamma}) \cap \mathcal{P}(\overline{\varphi}),$$

и числа строк в $\overline{\gamma}$ и $\overline{\varphi}$ наименьшие и равны размерности пересечения $\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{P}(\varphi)$.

6.1.3.2 Примеры управляемых суммарных систем

Суммарные системы, построенные в примерах А-Г раздела 6.1.1.1, неуправляемы ввиду неуправляемости слагаемых систем с матрицами F , $\varphi(s)$, $\overline{\varphi}(s)$. Приведем два примера управляемых суммарных систем.

1. $\gamma = \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ s-3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Условие нулевого пересечения из теоремы 6.1.3 выполнено:

$$\mathrm{Sm} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} = \mathrm{Sm} \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ s-3 & 1 & 0 \\ s-1 & s-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие теоремы (6.1.2) на уравнение суммарной системы имеет вид

$$\mathcal{P}(\pi) = \mathcal{P} \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ s-3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cap \mathcal{P} \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{P} \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\gamma} = \overline{\varphi} = \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Суммарная система (6.1.43) с матрицей $\pi = \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \end{pmatrix}$ управляема. Проверим условие теоремы 6.1.6. Для этого по предложению 6.1.7 найдем $\overline{\gamma}$:

$$\mathrm{Sm}\, \varphi = u \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-s & 1 & 2-s \end{pmatrix},$$

$$\gamma v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s-3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} * & * & \epsilon^1 \\ * & * & \epsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\gamma} = \begin{pmatrix} s-1 & s-2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\varphi} = \overline{\gamma}.$$

Обе строки $\overline{\gamma}$ и $\overline{\varphi}$ управляемы. Условие теоремы 6.1.6 выполнено. Суммарная система управляема.

2. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v$, где v — произвольная унимодулярная матрица. Условие нулевого пересечения теоремы (6.1.3) выполнено:

$$\mathrm{Sm} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарной системы:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v.$$

Суммарная система управляема. Проверим условие теоремы 6.1.6.

$$\overline{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \overline{\varphi}.$$

Подсистема из строк $\overline{\gamma}$ и подсистема из строк $\overline{\varphi}$ обе управляемы. Условие теоремы 6.1.6 выполнено. Суммарная система управляема.

6.2 Идентификация слагаемых процессов

При исследовании систем управления возникают задачи оценивания параметров и сигналов входа, выхода объектов управления в условиях, когда наблюдения входа и выхода содержат неизвестные постоянные или медленно меняющиеся аддитивные составляющие. Такие составляющие обычно называют трендами [106, 227]. Выделение и последующее удаление нежелательных трендов из наблюдений можно осуществлять сглаживанием через фильтры с дробно-рациональной передаточной функцией [227] или специальными линейными преобразованиями [106]. При этом остается открытым вопрос о влиянии сглаживания на истинные сигналы объекта, недоступные прямому измерению.

Заметим, что отношение к трендам в технических и финансовых приложениях прямо противоположное: если при управлении в технике важны сами сигналы объекта, то в области финансов исследуются именно тренды с целью осуществления политики приумножения капитала.

Задачей вычисления трендов мы называем задачу идентификации траекторий объекта и тренда по измерениям сумм траекторий. Считается, что сигналы объекта и тренды описываются заданными линейными разностными уравнениями с неопределенными начальными условиями и правой частью. Эту задачу мы представляем как задачу аппроксимации в некотором евклидовом пространстве. На этом пути выводятся новые формулы для оценки трендов, соответствующие методу максимального правдоподобия при аддитивных стохастических возмущениях в наблюдениях.

Ради большей наглядности изложения задача сначала рассматривается в предположении точных измерений суммарного процесса ряда и тренда. Затем строится решение с учетом аддитивных ошибок в наблюдениях. В заключение приводятся примеры расчетов.

6.2.1 Случай точных измерений

Пусть объект описывается системой уравнений вида 1.4.1:

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1, N-p}. \tag{6.2.1}$$

Здесь $y[k] \in \mathbb{R}^r$, $u[k] \in \mathbb{R}^m$ — отсчеты выхода и входа объекта; матричные коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m}$ считаются известными. Многочленная матрица $\alpha(s) \doteq \alpha_p s^p + \alpha_{p-1}s^{p-1} + \ldots + \alpha_0$ имеет полный ранг.

Уравнения системы наблюдения имеют вид

$$\check{y}[k] = y[k] + f_y[k], \qquad \check{u}[k] = u[k] + f_u[k], \tag{6.2.2}$$

где $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$ — наблюдаемые сигналы, $f_y[k]$, $f_u[k]$ — тренды. Относительно трендов предполагается, что они являются *квазимногочленами* [102, гл. 2], т. е. решениями систем линейных однородных разностных уравнений

$$\tau_q f_y[k+q] + \ldots + \tau_0 f_y[k] = 0, \qquad \zeta_l f_u[k+l] + \ldots + \zeta_0 f_u[k] = 0, \tag{6.2.3}$$

с известными многочленными матрицами размеров соответственно $r\times r$ и $m\times m$ полного ранга:

$$\tau(s) \doteq \tau_q s^q + \tau_{q-1}s^{q-1} + \ldots + \tau_0, \qquad \zeta(s) \doteq \zeta_l s^l + \zeta_{l-1}s^{l-1} + \ldots + \zeta_0. \tag{6.2.4}$$

Неизвестными считаются начальные условия трендов, начальные условия и входной сигнал объекта.

Задача 1. По наблюдениям $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$ найти значения величин $y[k]$, $u[k]$, $f_y[k]$, $f_u[k]$ в моменты времени $k \in \overline{1, N}$.

6.2.1.1 Условия единственности

Запишем уравнения (6.2.1), (6.2.3) в матричном виде:

$$Gz = 0, \qquad Ff = 0, \tag{6.2.5}$$

$$z \doteq (y[1]; \ldots ; y[N]; -u[1]; \ldots ; -u[N]) \,,$$

$$f \doteq (f_y[1]; \ldots ; f_y[N]; -f_u[1]; \ldots ; -f_u[N]) \,.$$

Матрицы G и F для уравнений (6.2.1), (6.2.3) имеют следующую клеточно-теплицевую структуру:

$$G = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_p & & & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_p & & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_p & & & & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_p & 0 & & & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_p \end{array} \right), \tag{6.2.6}$$

$$F = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q & & & 0 & & & & & & & \\ & \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q & & & & & & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & & & & & \\ 0 & & & \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & \ldots & \zeta_l & & & 0 \\ & & & 0 & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & \ldots & \zeta_l & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & & \zeta_0 & \zeta_1 & \ldots & \zeta_l \end{array} \right). \tag{6.2.7}$$

Множествами решений систем уравнений (6.2.5) являются многообразия $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$. Столбцы матриц $G_\perp$, $F_\perp$, которые по определению образуют базисы подпространств соответственно $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(F)$, можно составить из фундаментальных систем решений уравнений (6.2.1) и (6.2.3) на конечной сетке.

Согласно равенству (6.2.2) наблюдается суммарный сигнал

$$\check{z} \doteq (\check{y}[1]; \ldots ; \check{y}[N]; -\check{u}[1]; \ldots ; -\check{u}[N]) = z + f. \tag{6.2.8}$$

Условие нулевого пересечения $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$ означает, что не существует траектории z (или f), которая одновременно удовлетворяла бы как уравнениям объекта, так и уравнениям трендов (6.2.5). Это гарантирует единственность восстановления слагаемых ряда и тренда из наблюдений суммарного процесса (6.2.2). Введем ассоциированные многочленные матрицы:

$$\gamma(s) \doteq (\alpha(s), \beta(s)) \,, \qquad \varphi(s) \doteq \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & \zeta(s) \end{pmatrix}. \tag{6.2.9}$$

Уравнения (6.2.5) записываются через матрицы $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ (см. раздел 6.1.1.1:

$$(\gamma(s) \otimes E)\, z = 0, \qquad (\varphi(s) \otimes E)\, f = 0, \tag{6.2.10}$$

где $\otimes$ — символ кронекерова произведения.

Для динамических систем (6.2.10) условие нулевого пересечения (условие единственности) в терминах многочленных матриц $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ приведены в теореме 6.1.3. Эта теорема верна для произвольных динамических систем (6.2.10). Если же $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ имеют вид (6.2.9) при $r = 1$, то существует более простое условие единственности, сформулированное выше в утверждении 6.1.4.

Если условие единственности не выполнено, то среди истинных процессов объекта (решений уравнения (6.2.1)) могут быть процессы, которые невозможно в условиях задачи отличить от трендов. В этом случае попытка выделения и последующего удаления трендов любыми процедурами сглаживания почти наверное исказит истинные процессы объекта.

6.2.1.2 Вычисление процессов

Если условия единственности выполнены, можно указать способ точного вычисления трендов и процессов объекта.

Запишем исследуемую систему (6.2.5), (6.2.8) в виде

$$\check{z} = z + f, \qquad z = G_\perp w, \qquad f = F_\perp e, \tag{6.2.11}$$

где $w \in \mathbb{R}^{mN+p_0}$ и $e \in \mathbb{R}^{q_0+l_0}$ — коэффициенты разложения траекторий z и f в базисах из фундаментальных систем решений уравнений (6.2.1) и (6.2.3), $p_0 \doteq \deg\det\alpha(s)$, $q_0 \doteq \deg\det\tau(s)$, $l_0 \doteq \deg\det\zeta(s)$ (см. раздел (6.4)). Задача вычисления тренда сводится к вычислению w и e из наблюдений суммы

$$\check{z} = G_\perp w + F_\perp e \tag{6.2.12}$$

при известных матрицах $G_\perp$ и $F_\perp$. Решение дается формулами косого проецирования (см. приложение 2 в разделе 6.5):

$$f = F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^\top G^\top G F_\perp\right)^{-1} F_\perp^\top G^\top G \check{z}, \tag{6.2.13}$$

$$z = G_\perp w = \check{z} - F_\perp e.$$

Это решение верно для матриц G, F произвольного вида, поэтому охватывает оба случая динамических ($p > 0$) и нединамических систем ($p = 0$). Обратная матрица в правой части уравнения (6.2.13) существует, когда столбцы матрицы $GF_\perp$ линейно независимы. Последнее равносильно условию нулевого пересечения (утверждение 6.1.3).

В случае динамических систем ($p > 0$) матричные сомножители в формуле (6.2.13) также имеют простую структуру, и вычисления легко выполнимы при любых размерностях вектора $\check{z}$. Соответствующие примеры приведены ниже.

Пример 1. Пусть поведение объекта описывается однородным разностным уравнением

$$y[k+2] + \alpha_1 y[k+1] + \alpha_0 y[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-2}. \tag{6.2.14}$$

Измеряется суммарный сигнал $\check{y} = y + f$,

$$\check{y} \doteq (\check{y}[1]; \ldots; \check{y}[N]), \qquad y \doteq (y[1]; \ldots; y[N]), \qquad f \doteq (f[1]; \ldots; f[N]).$$

Про тренд f известно, что он описывается уравнением

$$f[k+2] - 2f[k+1] + f[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-2}, \tag{6.2.15}$$

т. е. является линейной функцией $f[k] = ck + d$ момента времени k с некоторыми неизвестными значениями коэффициентов c и d.

Выберем $\alpha_1 = -1.36$, $\alpha_0 = 0.92$, $y[1] = y[2] = 1$, $c = \frac{0.5}{N}$, $d = -\frac{0.5}{N}$, $N = 25$, интервал дискретизации 1 *с*. Полученный суммарный сигнал $\check{y} = y + f$ представлен на рис. 1.

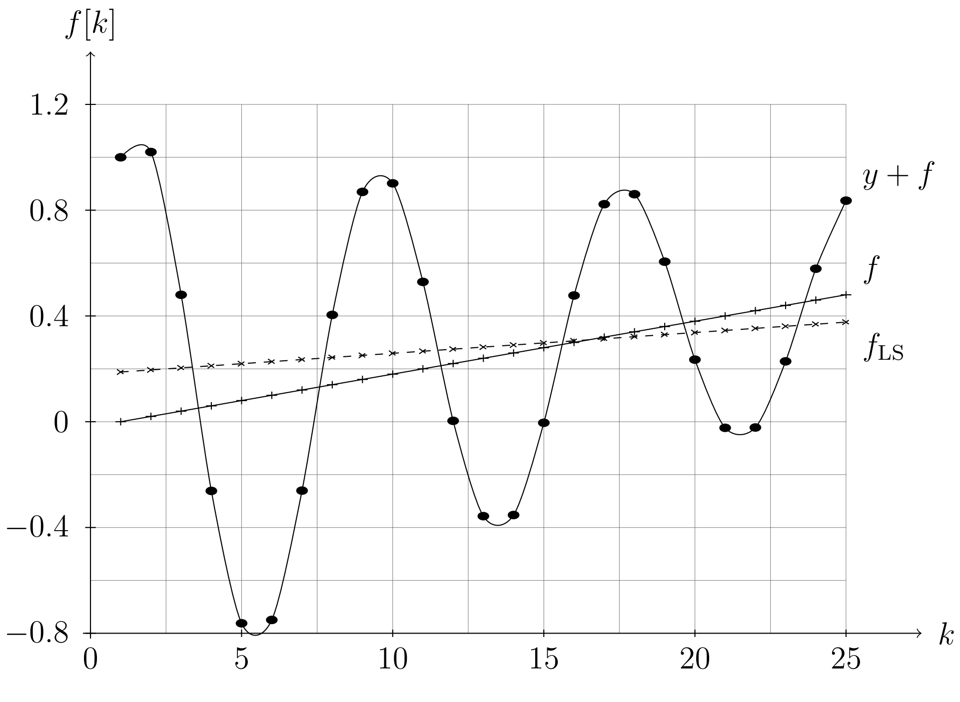


Рис. 1.

При известных уравнениях (6.2.14), (6.2.15) с заданными коэффициентами α_1, α_0 по измерениям $\check{y}$ нужно вычислить величины y и f.

Проверим условие единственности по теореме 6.1.3. Согласно определениям,

$$R(s) = \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \\ s^2 - 2s + 1 \end{pmatrix}.$$

Многочлены $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ взаимно просты, $\operatorname{Sm} R(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Условие единственности теоремы 6.1.3 выполнено и можно применять формулы (6.2.13), которые в данной задаче обеспечивают точное определение тренда:

$$f = F_\perp \left(F_\perp^\top G^\top G F_\perp\right)^{-1} F_\perp^\top G^\top G \check{y}, \qquad y = \check{y} - f,$$

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_\perp = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ N & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что значение f в данном примере может быть вычислено и другим, более простым способом. См. замечание 6.2.1 в разделе 6.2.2.2.

Для сравнения на рис. 1 приведена оценка f_{LS} тренда f, полученная по методу наименьших квадратов:

$$f_{\mathrm{LS}} = \arg\min_{x:Tx=0} \|\check{y} - x\|^2 = F_\perp \arg\min_{e \in \mathbb{R}^2} \|\check{y} - F_\perp e\|^2 = F_\perp \left(F_\perp^\top F_\perp\right)^{-1} F_\perp^\top y.$$

В оценке f_{LS} не учитывается, что сигнал y является решением уравнения (6.2.14).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда определение трендов невозможно.

Пусть объект описывается разностным уравнением

$$y[k+2] + \alpha_1 y[k+1] + \alpha_0 y[k] = \beta_1 u[k+1] + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1, N-2}.$$

Измеряются суммарные сигналы $\check{y} = y + f_y$, $\check{u} = u + f_u$,

$$\check{y} \doteq (\check{y}[1]; \ldots; \check{y}[N]), \qquad y \doteq (y[1]; \ldots; y[N]), \qquad f_y \doteq (f_y[1]; \ldots; f_y[N]),$$

$$\check{u} \doteq (\check{u}[1]; \ldots; \check{u}[N]), \qquad u \doteq (u[1]; \ldots; u[N]), \qquad f_u \doteq (f_u[1]; \ldots; f_u[N]).$$

Пусть тренды $f_y[k]$, $f_u[k]$ являются константами $f_y[k] = f_{y0}$, $f_u[k] = f_{u0}$ с неизвестными заранее амплитудами f_{y0} и f_{u0}, т. е. решениями однородных разностных уравнений

$$f_y[k+1] - f_y[k] = 0, \qquad f_u[k+1] - f_u[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-1},$$

$$\tau(s) = \zeta(s) = s - 1.$$

Коэффициенты α_1, α_0, β_1, β_0 считаем известными, такими что многочлены $\alpha(s) \doteq$

$s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ и $\beta(s) \doteq \beta_1 s + \beta_0$ взаимно просты с многочленами $\tau(s) = \zeta(s) = s - 1$, т. е. $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ не имеют корня $s = 1$.

Начальные условия $y[1]$, $y[2]$, входной сигнал $u[1], \ldots, u[N]$ и амплитуды трендов f_{y0}, f_{u0} заранее не известны.

Проверим, можно ли по наблюдениям $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$, $k \in \overline{1, N}$, восстановить значения величин $y[k]$, $u[k]$, $f_y[k]$, $f_u[k]$, т. е. найти $y[1]$, $y[2]$, $u[1], \ldots, u[N]$, f_{y0}, f_{u0}. В рассматриваемом примере

$$R(s) = \begin{pmatrix} s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 & \beta_1 s + \beta_0 \\ s - 1 & 0 \\ 0 & s - 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Sm} R(s) = \begin{pmatrix} s - 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 6.1.3, однозначное вычисление искомых величин невозможно.

Проверку условий единственности можно выполнить используя утверждение 6.1.4 без построения канонической формы $\operatorname{Sm} R(s)$. Действительно, здесь НОД$(\eta, \zeta) = s - 1 \neq 1$, система равенств 6.1.40 не выполняется, следовательно, однозначное восстановление сигналов невозможно.

Пример 3. Видоизменим предыдущий пример 2.

Предположим, что тренд $f_u[k]$ не константа, а синусоидальный сигнал с известной циклической частотой ω и неизвестными фазой и амплитудой. Тогда уравнение тренда $f_u[k]$ имеет вид

$$f_u[k+2] - 2\cos\omega \cdot f_u[k+1] + f_u[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-2},$$

$$\zeta(s) = s^2 - 2\cos\omega \cdot s + 1,$$

с решением $f_u[k] = A\cos(\omega k + \varphi_0)$. Начальная фаза φ_0 и амплитуда A определяются из начальных условий $f_u[1]$, $f_u[2]$.

Многочлены $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и $\tau(s)$ остаются теми же, что и в примере 2. Дополнительно предполагаем, что многочлен $\beta(s)$ взаимно прост с многочленом $\zeta(s)$.

Начальные условия $y[1]$, $y[2]$, входной сигнал $u[1], \ldots, u[N]$ и параметры трендов f_{y0}, $f_u[1]$, $f_u[2]$ заранее не известны.

Проверим, можно ли по наблюдениям $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$, $k \in \overline{1, N}$, восстановить значения величин $y[k]$, $u[k]$, $f_y[k]$, $f_u[k]$, или (что то же самое) значения переменных $u[1], \ldots, u[N]$, f_{y0}, $f_u[1]$, $f_u[2]$. Имеем

$$R(s) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \tau(s) & 0 \\ 0 & \zeta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 & \beta_1 s + \beta_0 \\ s - 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 2\cos\omega \cdot s + 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Sm} R(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 6.1.3, однозначное восстановление возможно.

Проверим условия утверждения 6.1.4. Так как НОД$(\alpha,\beta,\tau,\zeta)=1$, НОД$(\tau,\zeta)=1$, НОД$(\beta,\zeta)=1$, НОД$(\alpha,\tau)=1$, условия утверждения выполнены, и единственность имеет место.

Приведем основные элементы формул (6.2.13). При $N=5$ имеем

$$G = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & 0 & \beta_0 & \beta_1 & & 0 & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & \beta_0 & \beta_1 & & \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & \beta_0 & \beta_1 & \end{array}\right),$$

$$F = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & & & 0 & & & & \\ & 1 & -1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ 0 & & & 1 & -1 & & & & \\ \hline & & 0 & & & 1 & -2\cos\omega & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & -2\cos\omega & 1 \end{array}\right),$$

$$F_{\perp}^{\top} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 & & \\ \hline & & 0 & & & 0 & \sin\omega & \sin 2\omega & \sin 3\omega \\ & & & & & 1 & \cos\omega & \cos 2\omega & \cos 3\omega \end{array}\right).$$

Пример 4. Видоизменим пример 2, чтобы рассмотреть возможность разных описаний константных трендов и лучше уяснить роль условий единственности в теореме 6.1.3. Упростим матрицу G (6.2.6), положив $r=1$, $m=1$, $p=1$, $N=5$:

$$G = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) = (\alpha(s),\beta(s)) \otimes E \doteq \gamma(s) \otimes E, \tag{6.2.16}$$

$$\alpha(s) = a - s, \qquad \beta(s) = b.$$

Уравнение (6.2.1) примет вид

$$y[k+1] - ay[k] = bu[k], \qquad k = 1, 2.$$

Рассмотрим три варианта описания трендов-констант:

$$F_1 \doteq \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$\tau(s) \doteq 1 - s,$$

$$F_2 \doteq \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E,$$

$$F_3 \doteq \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix} \otimes E.$$

Можно показать, что все три варианта описаний $G \vee F_i$, $i \in \overline{1,3}$ соответствуют одному и тому же суммарному многообразию процессов «ряд плюс тренд»:

$$\mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F_1) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F_2) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F_3).$$

Выпишем матрицы базисов правых нуль-пространств:

$$G_{\perp} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a^2 & ab & b \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$F_{1\perp} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right), \qquad F_{2\perp} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right), \qquad F_{3\perp} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Проверим единственность восстановления тренда по теореме 6.1.3, условию (6.1.39):

$$\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi_1(s) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Sm} \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu(s) \doteq \text{НОД}\,(M_1, M_2, M_3),$$

$$M_1 \doteq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{vmatrix}, \qquad M_2 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \tau \end{vmatrix}, \qquad M_3 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Rightarrow \mu(s) = \text{НОД}\,(\tau, \alpha\tau, \beta) = 1.$$

Условие (6.1.39) выполнено, следовательно, тренд с описанием F_1 всегда может быть однозначно выделен из измерений суммарного процесса $\check{z} \doteq (\check{y}[1]; \check{y}[2]; \check{y}[3]; \check{u}[1]; \check{u}[2])$.

Таким же образом устанавливается единственность восстановления тренда с описанием F_2.

Для описаний F_1, F_2 проверим также условие единственности (6.1.34). Пусть “ $\sim$ ” обозначает какую-либо последовательность операций перестановки строк и столбцов матрицы. Тогда

$$(G_\perp, F_{1\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a^2 & ab & b & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ * & b & & \\ * & * & b & \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ясно, что при $b \neq 0$ столбцы матрицы $(G_\perp, F_{1\perp})$ линейно независимы, имеет место равенство $\mathcal{N}(G_\perp, F_{1\perp}) = 0$, условие (6.1.34) выполнено.

Далее,

$$(G_\perp, F_{2\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & ab & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ \hline 1 & 1 & * & * \\ a & 1 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

При $a \neq 1$ подматрица $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right)$ неособенная, следовательно, столбцы $(G_\perp, F_{2\perp})$ линейно независимы, имеет место равенство $\mathcal{N}(G_\perp, F_{2\perp}) = 0$, условие (6.1.34) выполнено.

Покажем, что тренд с описанием F_3 не может быть однозначно восстановлен из измерений суммарного процесса $\check{z}$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi_3(s) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Sm} \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_3(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu_3(s) = \text{НОД}\,(M_1, M_2, M_3),$$

$$M_1 \doteq \begin{vmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{vmatrix}, \qquad M_2 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \tau \end{vmatrix}, \qquad M_3 \doteq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \tau & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \mu_3(s) = \text{НОД}\left(\tau^2, \alpha\tau, \beta\tau\right) = \tau.$$

Условие (6.1.39) не выполнено, следовательно, тренд с описанием F_3 не может быть восстановлен.

Для описания F_3 убедимся также в нарушении условия (6.1.34):

$$(G_\perp, F_{3\perp}) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & ab & b & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad x \doteq \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{1-a}\right) \\ 1 \\ 1 \\ -\left(\frac{b}{1-a}\right) \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(G_\perp, F_{3\perp})\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}\,(G_\perp, F_{3\perp}) \neq 0,$$

условие (6.1.34) нарушено.

Для систем с описаниями трендов F_1, F_2 выпишем формулы (6.2.13) восстановления трендов:

$$F_{(1,2)\perp} e = F_{(1,2)\perp} \left(F_{(1,2)\perp}^\top G^\top G F_{(1,2)\perp}\right)^{-1} F_{(1,2)\perp}^\top G^\top G \check{z},$$

$$GF_{1\perp} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix},$$

$$GF_{2\perp} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & b \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$F_{1\perp} e = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) \frac{1}{2b^2} \begin{pmatrix} b, & b \end{pmatrix} G\check{z},$$

$$F_{2\perp} e = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) \frac{1}{2\,(a-1)^2} \begin{pmatrix} a-1, & a-1 \end{pmatrix} G\check{z}.$$

Ввиду клеточно-теплицевой структуры матрицы G процесс невязки $G\check{z}$ может вычисляться рекуррентно по мере поступления новых отсчетов $\check{z}$.

Полученные выражения для трендов $F_{1\perp} e$ и $F_{2\perp} e$ показывают, что в первом случае вычисляется тренд (постоянная составляющая) в траектории входа $(\check{u}[1]; \check{u}[2])$, а во втором случае — тренд в траектории выхода $(\check{y}[1]; \check{y}[2]; \check{y}[3])$. Нарушение условий единственности выделения трендов с описанием F_3 означает невозможность однозначного выделения постоянных составляющих одновременно на входе и на выходе системы с описанием (6.2.16).

Подведем краткий итог. Задачи обнаружения трендов в сигналах достаточно типичны для технических и финансовых приложений. Как было показано в этом разделе, для линейного случая можно предложить способ учета информации об уравнениях, которыми описываются процессы в объекте и тренды. Приведены формулы вычисления трендов, которые при отсутствии помех в измерениях дают точный результат.

Получены условия единственности, выполнение которых необходимо не только для вычисления трендов по точным измерениям, но и для получения состоятельных оценок процессов объекта и трендов в случае стохастических помех в измерениях. Если условия единственности не выполнены, получение точных значений или оценок процессов объекта и трендов по измерениям суммарного процесса невозможно.

6.2.2 Случай измерений с аддитивными возмущениями

Рассмотрим задачу вычисления процессов (входа, выхода) в линейной системе по наблюдениям, содержащим аддитивные квазимногочленные добавки (тренды) с аддитивными возмущениями. Предлагаемое решение соответствует методу максимального правдоподобия в предположении нормальности н. о. р. случайных возмущений.

В предыдущем разделе были получены условия единственности и формулы для точного вычисления процессов объекта и трендов, когда наблюдения не содержат ошибок.

Перейдем к случаю наблюдений с возмущениями. Отсчеты вектора переменных входа и выхода объекта в равноотстоящие моменты времени рассматриваются как временной ряд. Задачи оценки трендов временных рядов исследовались в большом числе работ по эконометрике [227], теории управления [106], теории прогнозирования и анализа данных [12, 51]. Традиционная статистическая трактовка предполагает описание ряда (и тренда) линейными уравнениями, в правую часть которых введены случайные возмущения с известной или оцениваемой корреляцией (так называемые уравнения с цветной невязкой) [12, 51, 227].

Здесь будем рассматривать случай аддитивных возмущений в наблюдениях, без возмущений в невязке уравнения. Для получения оптимальных оценок слагаемых процессов ряда и тренда используем вариационные целевые функции (раздел 3.3). Уравнения ряда и тренда в этом разделе предполагаются известными.

Пусть на временном интервале $\overline{1,N}$ наблюдается суммарный процесс z^* «ряд плюс тренд» с возмущениями e:

$$\check{z} = z^* + e = (\check{z}[1]; \ldots ; \check{z}[N]) \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{6.2.17}$$

Аппроксимацией вектора $\check{z}$ элементами некоторого заданного выпуклого множества

$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{nN}$ называем элемент $\hat{z} \in \mathcal{A}$, ближайший к $\check{z}$:

$$\hat{z} = \arg\min_{z \in \mathcal{A}} \|\check{z} - z\|^2. \tag{6.2.18}$$

Пусть $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{nN}$ — подпространства сеточных функций, порождаемые уравнениями ряда и тренда, и $\mathcal{A} = \mathcal{B} \dot{+} \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$. В обозначениях начала этой главы можно считать $\mathcal{B} \doteq \mathcal{N}(G)$, $\mathcal{C} \doteq \mathcal{N}(F)$. С точки зрения аппроксимации, оценки ряда и тренда можно получить через наилучшее приближение вектора $\check{z}$ суммой векторов $\hat{z}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ и $\hat{z}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$:

$$\|\check{z} - \hat{z}\|^2 = \|\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{B}} - \hat{z}_{\mathcal{C}}\|^2 = \min_{z_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B},\, z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}} \|\check{z} - z_{\mathcal{B}} - z_{\mathcal{C}}\|^2. \tag{6.2.19}$$

Выражение в правой части есть вариационная целевая фунция (ср. (3.3.3), (3.3.11)).

Задача (6.2.19) допускает простую статистическую интерпретацию. Пусть $\check{z} = z + e$ — измерения отсчетов суммарного ряда $z = z_{\mathcal{B}} + z_{\mathcal{C}}$ с возмущениями $e \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I_{nN})$. Заметим, что обобщение на случай $e \in \mathbf{N}(0, D)$, $D \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $D > 0$, с соответствующей весовой нормой $\|z\|^2_{D^{-1}} = z^\top D^{-1} z$ в (6.2.19) не вызывает принципиальных трудностей и здесь не рассматривается. Величина $\check{z}$ имеет плотность распределения $p(\check{z}|z_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{C}}) = \mathbf{N}(z_{\mathcal{B}} + z_{\mathcal{C}}, \sigma^2 I_{nN})$. Считая переменные $z_{\mathcal{B}}$, $z_{\mathcal{C}}$ параметрами распределения, напишем функцию правдоподобия:

$$L(z_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{C}}|\check{z}) = \ln p(\check{z}|z_{\mathcal{B}}, z_{\mathcal{C}}) = \mathrm{const} - \frac{1}{2\sigma^2} \|\check{z} - z_{\mathcal{B}} - z_{\mathcal{C}}\|^2.$$

Получение оценок величин $z_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$, $z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ по методу максимального правдоподобия [63] равносильно задаче (6.2.19).

6.2.2.1 Формулы аппроксимации

Остановимся на задаче (6.2.19). Пусть B, C — матрицы, составленные из базисных векторов подпространств $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (как столбцов). Обозначим $\overline{B}$ и $\overline{C}$ матрицы, составленные из базисных векторов дополнительных подпространств $\overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$, $\overline{\mathcal{B}} \dot{+} \mathcal{B} = \overline{\mathcal{C}} \dot{+} \mathcal{C} = \mathbb{R}^{nN}$. Везде далее будут рассматриваться только случаи, когда дана пара матриц $B, \overline{C}$ (или пара $\overline{B}, C$), а сама матрица $A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ не может быть вычислена за малое число операций.

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 6.2.1. *Пусть $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$, тогда для произвольного вектора $z \in \mathcal{B} + \mathcal{C}$ имеет место единственное разложение*

$$z = z_{\mathcal{B}} + z_{\mathcal{C}}, \quad z_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}, \quad z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C},$$

$$z_{\mathcal{B}} = B \left(\overline{C}_1^\top B\right)^{-1} \overline{C}_1^\top z, \quad \overline{C}_1 \doteq \overline{C}\, \overline{C}^\top B,$$

$$z_{\mathcal{C}} = C \left(\overline{B}_1^\top C\right)^{-1} \overline{B}_1^\top z, \quad \overline{B}_1 \doteq \overline{B}\, \overline{B}^\top C.$$

Доказательство. Единственность разложения следует из взаимной независимости подпространств, $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\{0\} \Rightarrow\ \mathcal{B}+\mathcal{C}=\mathcal{B}\dot{+}\mathcal{C}$. Формулы разложения проверяются подстановками $z=B\alpha=z_{\mathcal{B}}$ и $z=C\beta=z_{\mathcal{C}}$. Более подробный вывод приведен в приложении 2 (раздел 6.5). Лемма доказана. □

Ограничения на матрицы B, C, необходимые и достаточные для выполнения условия единственности $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\{0\}$ в случае подпространств, порождаемых динамическими системами, приведены в разделе (6.1.2.1) (теорема 6.1.3 и др.). При $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\{0\}$ гарантируется существование обратных матриц в формулах нижеследующих теорем 6.2.1, 6.2.2 и следствия (см. утверждение 6.1.3).

Известно, что если $\mathcal{A}$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^{nN}$ с базисом из столбцов некоторой матрицы A, то $\hat{z}=\Pi_{\mathcal{A}}\check{z}$, где $\Pi_{\mathcal{A}}\doteq A\left(A^\top A\right)^{-1}A^\top$ — матрица проектора со свойством $\Pi_{\mathcal{A}}\Pi_{\mathcal{A}}=\Pi_{\mathcal{A}}$. Выражение $\Pi_{\mathcal{A}}\doteq A\left(A^\top A\right)^{-1}A^\top$ может быть получено как следствие теоремы 6.2.2 при $C=0$ ($\overline{C}=I$). Для величины $\hat{z}=\hat{z}_{\mathcal{B}}+\hat{z}_{\mathcal{C}}=\Pi_{\mathcal{A}}\check{z}$ из леммы 6.2.1 сразу следует

Теорема 6.2.1. *Если* $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\{0\}$, *то решение задачи* (6.2.19) *единственно и имеет вид*

$$\hat{z}=A\left(A^\top A\right)^{-1}A^\top\check{z}=\left[I-\overline{A}\left(\overline{A}^\top\overline{A}\right)^{-1}\overline{A}^\top\right]\check{z},$$

$$\hat{z}_{\mathcal{B}}=B\left(\overline{C}_1^\top B\right)^{-1}\overline{C}_1^\top\hat{z},\qquad \overline{C}_1\doteq\overline{C}\,\overline{C}^\top B, \tag{6.2.20}$$

$$\hat{z}_{\mathcal{C}}=C\left(\overline{B}_1^\top C\right)^{-1}\overline{B}_1^\top\hat{z}=\hat{z}-\hat{z}_{\mathcal{B}},\qquad \overline{B}_1\doteq\overline{B}\,\overline{B}^\top C.$$

Если матрица $\overline{A}$, как и A, не может быть вычислена за малое число операций, следует использовать другую равносильную форму решения задачи (6.2.19):

Теорема 6.2.2. *Если* $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\{0\}$, *то решение задачи* (6.2.19) *единственно и оно*

1) *удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases}\hat{z}_{\mathcal{B}}=\Pi_{\mathcal{B}}\left(\check{z}-\hat{z}_{\mathcal{C}}\right), & \Pi_{\mathcal{B}}\doteq B\left(B^\top B\right)^{-1}B^\top,\\ \hat{z}_{\mathcal{C}}=\Pi_{\mathcal{C}}\left(\check{z}-\hat{z}_{\mathcal{B}}\right), & \Pi_{\mathcal{C}}\doteq C\left(C^\top C\right)^{-1}C^\top;\end{cases}$$

2) *имеет вид*

$$\begin{cases}\hat{z}_{\mathcal{B}}=B\left(\overline{C}_2^\top B\right)^{-1}\overline{C}_2^\top\check{z}, & \overline{C}_2^\top\doteq\overline{C}\left(\overline{C}^\top\overline{C}\right)^{-1}\overline{C}^\top B,\\ \hat{z}_{\mathcal{C}}=C\left(\overline{B}_2^\top C\right)^{-1}\overline{B}_2^\top\check{z}, & \overline{B}_2^\top\doteq\overline{B}\left(\overline{B}^\top\overline{B}\right)^{-1}\overline{B}^\top C.\end{cases}$$

Доказательство. Перейдем к безусловной минимизации:

$$\min_{\hat{z}_{\mathcal{B}}\in\mathcal{B},\ \hat{z}_{\mathcal{C}}\in\mathcal{C}}\|\check{z}-\hat{z}_{\mathcal{B}}-\hat{z}_{\mathcal{C}}\|^2=\min_{\beta,\lambda}\left\{\|\check{z}-\hat{z}_{\mathcal{B}}-C\beta\|^2+\lambda^\top\overline{B}^\top\hat{z}_{\mathcal{B}}\right\}.$$

Необходимое условие минимума: $(\check{z}-\hat{z}_{\mathcal{B}}-C\beta)^\top+\lambda^\top\overline{B}^\top=0$. Умножая справа на $\overline{B}$, получим $\lambda = -\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top (\check{z} - C\beta)$. Следовательно,

$$\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{B}} - C\beta - \overline{B}\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top (\check{z} - C\beta) = 0,$$

$$\hat{z}_{\mathcal{B}} = \left[I - \overline{B}\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top\right] (\check{z} - C\beta) = \Pi_{\mathcal{B}} (\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{C}}).$$

Аналогично получаем выражение для $\hat{z}_{\mathcal{C}}$.

Далее, имеем $\hat{z}_{\mathcal{B}} = \Pi_{\mathcal{B}} (\check{z} - \Pi_{\mathcal{C}} (\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{B}}))$. Отсюда

$$(I - \Pi_{\mathcal{B}}\Pi_{\mathcal{C}})\, \hat{z}_{\mathcal{B}} = \Pi_{\mathcal{B}} (I - \Pi_{\mathcal{C}})\, \check{z}.$$

Умножая обе части на $\Pi_{\mathcal{B}}$, с учетом равенства $\Pi_{\mathcal{B}}\Pi_{\mathcal{B}} = \Pi_{\mathcal{B}}$ получаем

$$\Pi_{\mathcal{B}} (I - \Pi_{\mathcal{C}})\, \hat{z}_{\mathcal{B}} = \Pi_{\mathcal{B}} (I - \Pi_{\mathcal{C}})\, \check{z}.$$

Последнее равносильно равенству

$$B\left(B^\top B\right)^{-1} B^\top \overline{C}\left(\overline{C}^\top \overline{C}\right)^{-1} \overline{C}^\top B\alpha = B\left(B^\top B\right)^{-1} B^\top \overline{C}\left(\overline{C}^\top \overline{C}\right)^{-1} \overline{C}^\top \check{z},$$

т. е. $B\left(B^\top B\right)^{-1} \overline{C}_2^\top B\alpha = B\left(B^\top B\right)^{-1} \overline{C}_2^\top \check{z}$. Учитывая линейную независимость столбцов B, имеем $\overline{C}_2^\top B\alpha = \overline{C}_2^\top \check{z}$. Следовательно $\hat{z}_{\mathcal{B}} = B\alpha = B\left(\overline{C}_2^\top B\right)^{-1} \overline{C}_2^\top \check{z}$. Аналогично получается выражение для $\hat{z}_{\mathcal{C}}$. Неособенность матриц $\overline{C}_2^\top B = B^\top \overline{C}\left(\overline{C}^\top \overline{C}\right)^{-1} \overline{C}^\top B$ и $\overline{B}_2^\top C = C^\top \overline{B}\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top C$ следует из взаимной независимости подпространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ (см. утверждение 6.1.3). Теорема доказана. □

Следующие формулы аппроксимации непосредственно вытекают из теоремы 6.2.2.

Следствие. *При* $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$ *задача* (6.2.19) *имеет единственное решение*

$$\begin{cases} \hat{z}_{\mathcal{B}} = \left[I - \overline{B}\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top\right] (\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{C}}), \\ \hat{z}_{\mathcal{C}} = C\left(\overline{B}_2^\top C\right)^{-1} \overline{B}_2^\top \check{z}, \qquad \overline{B}_2^\top \doteq \overline{B}\left(\overline{B}^\top \overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^\top C. \end{cases} \tag{6.2.21}$$

Здесь мы опускаем симметричную формулировку с перестановкой символов B и C ($\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$).

6.2.2.2 Особые случаи матриц B и C

Размеры матриц в формулах (6.2.20) и (6.2.21) определяются длиной N отрезка ряда $\check{z}$. В приложениях могут встречаться значения $N \geqslant 1000$. Поэтому необходимы рекуррентные по N вычисления с учетом строения матриц B и C.

Матрица $\overline{B}$ клеточно-теплицевая. Пусть объект описывается линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \quad k \in \overline{1, N-p}, \tag{6.2.22}$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}, \qquad \beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m}, \qquad n \doteq r+m,$$

$$z_{\mathcal{B}} = (y[1]; -u[1]; \ldots; y[N]; -u[N]).$$

Тогда подпространство $\mathcal{B} = \left\{z_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{nN} : (6.2.22)\right\}$ есть множество решений уравнения (6.2.22) со всевозможными значениями начальных условий и переменных $u[1], \ldots, u[N]$ в правой части.

В матричной записи уравнение (6.2.22) принимает вид $\overline{B}^\top z_{\mathcal{B}} = 0$ с клеточно-теплицевой матрицей $\overline{B}^\top$:

$$\overline{B}^\top = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r(N-p)\times nN}, \qquad \gamma_i \doteq \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times n}. \tag{6.2.23}$$

Условимся, что многочленная матрица $\alpha(s) \doteq \alpha_p s^p + \alpha_{p-1}s^{p-1} + \ldots + \alpha_0$ имеет полный ранг, тогда столбцы $\overline{B}$ линейно независимы (см. предложение (1.4.1)).

Пусть многообразие допустимых значений тренда $\mathcal{C} = \mathcal{R}(C)$ состоит из линейных комбинаций заданной системы функций. Столбцы матрицы C сформированы из отсчетов базисных функций на сетке $1, \ldots, N$.

Чтобы вычислить оценку тренда $\hat{z}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ по наблюдениям суммарного сигнала $\check{z}$, применяем следствие теоремы 6.2.2. Согласно (6.2.21), ко всем столбцам матрицы C и к вектору $\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{C}}$ поочередно применяется проецирование на подпространство с базисом из столбцов клеточно-теплицевой матрицы $\overline{B}$. Рекуррентные формулы проецирования описаны в приложении (раздел 6.6).

Замечание 6.2.1. Пусть $m = 0$. Тогда размерности многообразия $\mathcal{B}$ и грамиана $B^\top B$ равны степени многочлена $\det\alpha(s)$ и не зависят от N. Столбцы матрицы B являются фундаментальной системой решений однородного уравнения (6.2.22) с $m = 0$ и вычисляются стандартно (см. раздел 6.4). В следствии теоремы 5.2.2 напрашивается замена

$$I - \overline{B}\left(\overline{B}^\top\overline{B}\right)^{-1}\overline{B}^\top = B\left(B^\top B\right)^{-1}B^\top.$$

Это позволяет обойтись без рекуррентных формул обращения “большой” матрицы $\overline{B}^\top\overline{B}$. Кроме того, выписывается матрица $A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$, и аппроксимация (6.2.19) просто вычисляется по методу наименьших квадратов:

$$\hat{z}_{\mathcal{B}} = Bb, \qquad \hat{z}_{\mathcal{C}} = Cc, \qquad \hat{z} = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = Aa,$$

$$a = \left(A^\top A\right)^{-1} A^\top \check{z}.$$

Это упрощение также может быть применено к примеру 1 раздела 6.2.1.2.

Клеточно-теплицевые матрицы $\overline{B}$ и $\overline{C}$. Пусть базисные функции подпространства $\mathcal{C}$, как и подпространства $\mathcal{B}$, являются решениями разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$z_\mathcal{C} \doteq f = (f[1]; \ldots; f[N]), \qquad f[k] = (f_y[k]; -f_u[k]),$$

$$\psi_q f_y[k+q] + \ldots + \psi_0 f_y[k] = \varrho_q f_u[k+q] + \ldots + \varrho_0 f_u[k], \qquad k \in \overline{1, N-q}, \tag{6.2.24}$$

$$\psi_i \in \mathbb{R}^{l \times r}, \qquad \varrho_i \in \mathbb{R}^{l \times m}.$$

В матричной записи: $\overline{C}^\top f = 0$,

$$\overline{C}^\top = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(N-q) \times nN}, \qquad \varphi_i \doteq \begin{pmatrix} \psi_i & \varrho_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n}.$$

Будем обозначать $\overline{B} \backsim \gamma(s)$ и $\overline{C} \backsim \varphi(s)$,

$$\varphi(s) \doteq \varphi_q s^q + \ldots + \varphi_1 s + \varphi_0.$$

Уравнение (6.2.17) системы наблюдения принимает вид

$$\check{z} = z_\mathcal{B} + z_\mathcal{C} + e,$$

$$\begin{gathered} \check{z} = (\check{z}[1]; \ldots; \check{z}[N]), \qquad \check{z}[k] = (\check{y}[k]; -\check{u}[k]), \\ z_\mathcal{B} = (z_\mathcal{B}[1]; \ldots; z_\mathcal{B}[N]), \qquad z_\mathcal{B}[k] = (y[k]; -u[k]), \\ z_\mathcal{C} = (f[1]; \ldots; f[N]), \qquad f[k] = (f_y[k]; -f_u[k]), \\ e = (e[1]; \ldots; e[N]), \qquad e[k] = (e_y[k]; -e_u[k]), \\ \check{y}[k] = y[k] + f_y[k] + e_y[k], \qquad \check{u}[k] = u[k] + f_u[k] + e_u[k], \end{gathered} \tag{6.2.25}$$

где $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$ — наблюдаемые сигналы, $f_y[k]$, $f_u[k]$ — тренды.

Заметим, что в одном частном случае, когда

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & \zeta(s) \end{pmatrix},$$

уравнение трендов (6.2.24) распадается на два независимых однородных уравнения

$$\tau_q f_y[k+q] + \ldots + \tau_0 f_y[k] = 0, \qquad \zeta_q f_u[k+q] + \ldots + \zeta_0 f_u[k] = 0, \tag{6.2.26}$$

т. е. тренды $f_y[k]$, $f_u[k]$ являются квазимногочленами. Этот частный случай при нулевых возмущениях $e = 0$ рассматривался в предыдущем разделе 6.2.1.

Условие единственности (условие прямой суммы) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$ для случая клеточно-теплицевых матриц $\overline{B}$ и $\overline{C}$ общего вида даны в теореме 6.1.3.

В случае клеточно-теплицевых матриц $\overline{B}$ и $\overline{C}$ общего вида для аппроксимации ряда $\check{z}$ суммой $\hat{z}_{\mathcal{B}} + \hat{z}_{\mathcal{C}}$ применяем теорему 6.2.1. Согласно этой теореме, нужно только один раз (в отличие от теоремы 6.2.2) вычислить проекцию вектора $\check{z}$ на подпространство с базисом из столбцов клеточно-теплицевой матрицы $\overline{A} \backsim \pi(s)$. Алгоритм приведен в приложении (раздел 6.6). Если многочленная матрица $\pi(s)$ квадратная, то вычисления упрощаются согласно замечанию 6.2.1.

Применение теоремы 6.2.1 предполагает, что одна из матриц B или C вычисляется достаточно просто. Это возможно, например, если матрица $\gamma(s)$ (или $\varphi(s)$) квадратная. Тогда согласно замечанию 6.2.1 вычисляется B (или C) и применяется соответственно 2-я или 3-я формула теоремы 6.2.1.

Построение матрицы $\overline{A}$ по матрицам $\overline{B}$ и $\overline{C}$ (т. е. в известном смысле суммирование $\overline{B}$ и $\overline{C}$) описано в разделе 6.1.1.1.

Замечание 6.2.2. Когда нет сведений о матрице $\overline{B}$ (динамика ряда заранее неизвестна, уравнение объекта не дано, и нужно восстановить только тренд ряда — типичная задача для финансовых приложений), приходим к случаю $\overline{A} = \overline{C}$, $\hat{z}_{\mathcal{B}} = 0$. Для вычисления аппроксимации $\hat{z}_{\mathcal{C}} = \hat{z}$ используется первая формула теоремы 6.2.1. Пусть матрица $\overline{A} = \overline{C}$ клеточно-теплицевая: $\overline{C} \backsim \varphi(s)$, $\varphi(s) \in \mathbb{R}^{l \times n}[s]$, $l < n$. Тогда тренд $\hat{z}_{\mathcal{C}}$ для больших N может быть вычислен рекуррентно по алгоритму из приложения. При $l = n$ см. замечание 6.2.1.

Пример. Усложним пример 3 раздела 6.2.1.2, добавив в наблюдения случайные возмущения.

Уравнение системы:

$$y[k+2] + \alpha_1 y[k+1] + \alpha_0 y[k] = \beta_1 u[k+1] + \beta_0 u[k], \qquad k \in \overline{1, N-2}, \tag{6.2.27}$$

$$\alpha_1 = -1.79, \qquad \alpha_0 = 0.94, \qquad \beta_1 = 0.1, \qquad \beta_0 = 0.05.$$

Уравнение (6.2.24) для трендов $f_y[k]$, $f_u[k]$:

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & \zeta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s^2 - 2\cos\omega \cdot s + 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega = 2\pi/10,$$

$$f_y[k+1] - f_y[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-1},$$

$$f_u[k+2] - 2\cos\omega \cdot f_u[k+1] + f_u[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-2}. \tag{6.2.28}$$

Общее решение $f_y[k] = F_y$, $f_u[k] = F_u \cos(\omega k + \varphi_0)$. Конкретный вид функций трендов и сигналов системы, взятых при моделировании, представлен на рис. 1, 2. Использовались значения $F_y = 0.9$, $F_u = 0.5$, $\varphi_0 = 0$. Интервал дискретизации $1\,c$.

В качестве наблюдений брались суммарные сигналы

$$\check{y}[k] = y[k] + f_y[k] + e_y[k], \qquad \check{u}[k] = u[k] + f_u[k] + e_u[k], \qquad k = \overline{1, 50}, \tag{6.2.29}$$

где $e_y[k]$, $e_u[k]$, $e_y[j]$, $e_u[j]$ — эмуляция независимых (при $k \neq j$) случайных возмущений с нормальным распределением $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0.3$, с помощью датчика псевдослучайных чисел (рис. 3).

Исходя из наблюдений (6.2.25), (6.2.29), по формулам (6.2.20) определялись оценки сигналов системы $\hat{y}[k]$, $\hat{u}[k]$, начальная фаза φ_0 и амплитуды F_y, F_u оценок трендов $\hat{f}_y[k]$, $\hat{f}_u[k]$. Результаты представлены на рис. 4, 5.

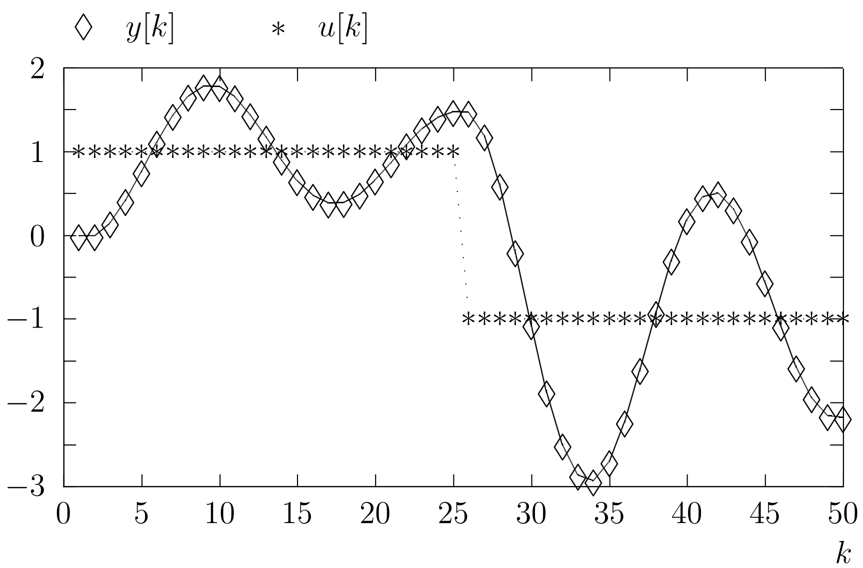


Рис. 1. Сигналы системы.

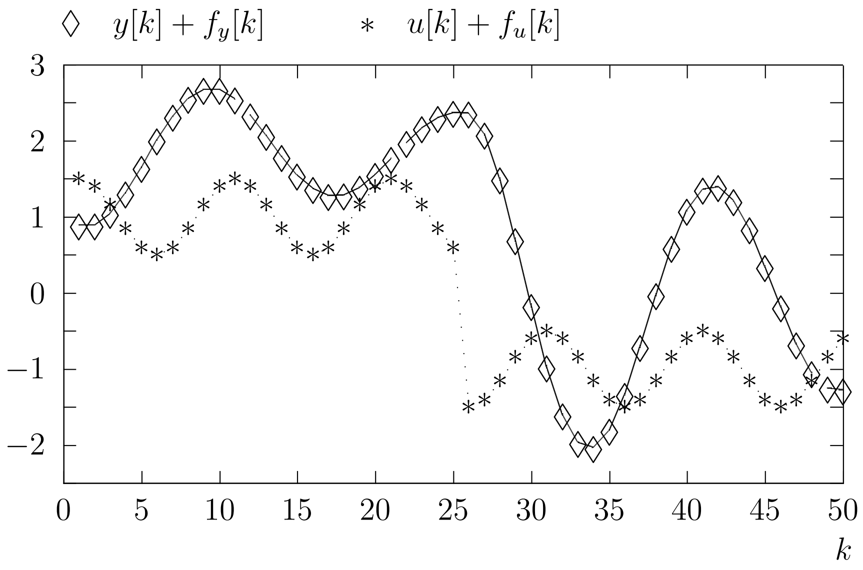


Рис. 2. Сигналы системы с трендами.

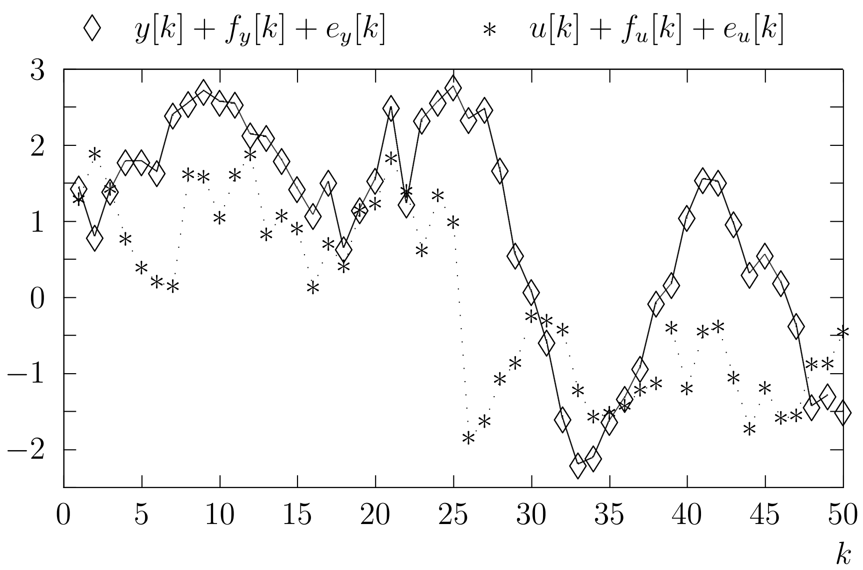


Рис. 3. Массивы наблюдений ($\sigma = 0.3$).

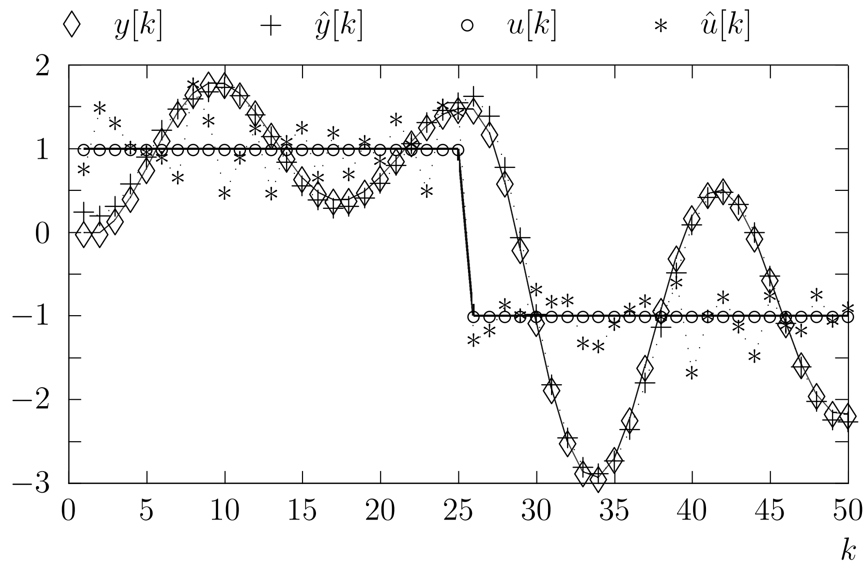


Рис. 4. Оценки сигналов системы.

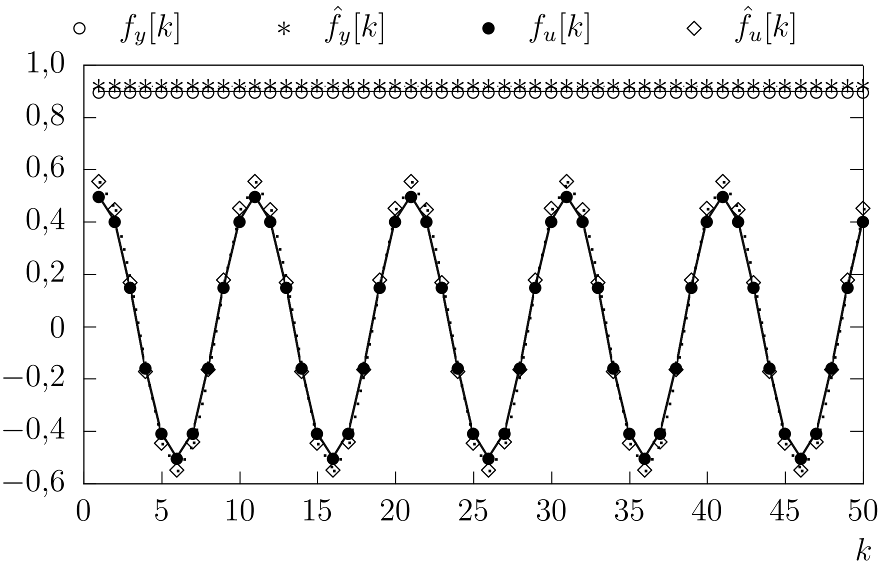


Рис. 5. Оценки трендов.

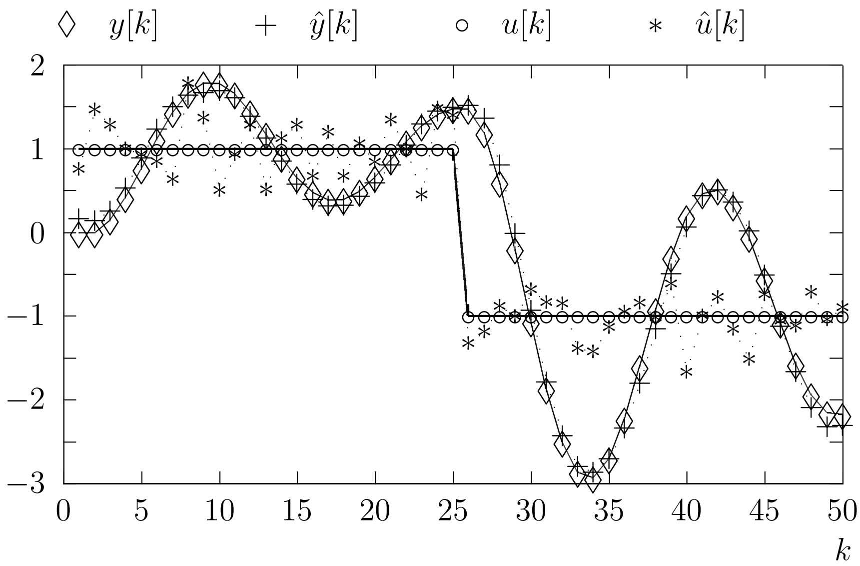


Рис. 6. Оценки сигналов после идентификации коэффициентов системы.

Заметим, что одновременно с оценкой сигналов возможно проведение идентификации элементов матрицы $\overline{A}$ (6.2.30), т. е. коэффициентов многочленов $\alpha(s)$, $\beta(s)$ при известном значении частоты ω, или идентификации частоты тренда ω при известных значениях коэффициентов $\alpha(s)$, $\beta(s)$ (раздел 6.3).

После идентификации коэффициентов многочленов $\alpha(s)$, $\beta(s)$ по массиву наблюдений (6.2.29) вариационным методом (см. разделы 3.3, 6.3) были получены значения

$$\hat{\alpha}_1 = -1.79, \qquad \hat{\alpha}_0 = 0.95, \qquad \hat{\beta}_1 = 0.06, \qquad \hat{\beta}_0 = 0.09.$$

Оценки сигналов системы, полученные по наблюдениям (6.2.29) с подстановкой в формулы (6.2.20) значений $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, представлены на рис. 6. Отличие от оценок, полученных на основе "истинных" значений α_i, β_i (рис. 4), незначительно.

Поясним вычисление оценок сигналов.

Уравнению (6.2.27) соответствует многочленная матрица

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s^2 - 1.36 \cdot s + 0.92 & 0.1 \cdot s + 0.05 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix}.$$

Многочлены $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\tau(s)$, $\zeta(s)$ взаимно просты ($\text{НОД}(\alpha,\beta,\tau,\zeta) = 1$). Кроме того, $\text{НОД}(\alpha,\tau) = 1$, $\text{НОД}(\tau,\zeta) = 1$, $\text{НОД}(\zeta,\beta) = 1$. Это означает, что выполнено условие единственности утверждения (6.1.4), т. е. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$ и все обратные матрицы в формулах (6.2.20), (6.2.21) существуют (следствие утверждения(6.1.3)).

Как отмечено выше, $\overline{A} \backsim \pi(s)$, $\pi(s) = \xi(s)\gamma(s)$, $\xi(s) \doteq \text{НОК}(\tau(s),\zeta(s))$, т. е.

$$\overline{A} \backsim (s-1)(s^2 - 2\cos\omega \cdot s + 1)\begin{pmatrix} (s^2 - 1.36 \cdot s + 0.92) & (0.1 \cdot s + 0.05) \end{pmatrix} \doteq$$

$$\doteq \begin{pmatrix} s^5 + \sigma_{y4}s^4 + \sigma_{y3}s^3 + \sigma_{y2}s^2 + \sigma_{y1}s + \sigma_{y0} & \sigma_{u4}s^4 + \sigma_{u3}s^3 + \sigma_{u2}s^2 + \sigma_{u1}s + \sigma_{u0} \end{pmatrix}.$$

Клеточно-теплицевая матрица $\overline{A}^{\top}$ выписывается аналогично $\overline{B}^{\top}$ (6.2.23). При $N = 7$ с точностью до перестановки столбцов

$$\overline{A}^{\top} \sim \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} \pi_{y0} & \pi_{y1} & \pi_{y2} & \pi_{y3} & \pi_{y4} & 1 & 0 & \pi_{u0} & \pi_{u1} & \pi_{u2} & \pi_{u3} & \pi_{u4} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{y0} & \pi_{y1} & \pi_{y2} & \pi_{y3} & \pi_{y4} & 1 & 0 & \pi_{u0} & \pi_{u1} & \pi_{u2} & \pi_{u3} & \pi_{u4} & 0 \end{array}\right), \qquad (6.2.30)$$

$$\overline{B}^{\top} \sim \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & & 0 & \beta_0 & \beta_1 & & & & 0 & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & & & \beta_0 & \beta_1 & & & & \\ & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & & & \beta_0 & \beta_1 & & & \\ & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & & & & \beta_0 & \beta_1 & & \\ 0 & & & & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & & & & \beta_0 & \beta_1 & 0 \end{array}\right),$$

$$C \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & \sin\omega & \ldots & \sin 5\omega & 0 \\ & 0 & & 1 & \cos\omega & \ldots & \cos 5\omega & 0 \end{array}\right)^{\top}.$$

Оценка суммарного сигнала $\hat{z}$ вычисляется по первой формуле теоремы 6.2.1 (рекуррентные алгоритмы вычислений, актуальные для больших N, приведены в приложении, раздел 6.6). Затем вычисляются оценки тренда $\hat{z}_{\mathcal{C}}$ и сигналов $\hat{z}_{\mathcal{B}} = \hat{z} - \hat{z}_{\mathcal{C}}$.

6.3 Идентификация уравнений слагаемых

В предыдущем разделе были получены формулы оптимального восстановления слагаемых процессов ряда и тренда по наблюдениям суммарного процесса с возмущениями при известных уравнениях ряда и тренда. Здесь рассмотрим случай, когда уравнения ряда и тренда известны с точностью до параметров.

Идентификация неизвестных параметров уравнений при наличии в измерениях процессов неопределенных аддитивных составляющих может проводиться традиционными методами с применением дробно-рациональных фильтров [227]. Однако этот подход при коротких временах наблюдений приводит к ряду проблем, связанных с неизвестными начальными условиями фильтра [227]. Для получения состоятельных оценок параметров необходимо совместно с параметрами оценивать начальные условия процессов ряда и тренда.

Для решения этой задачи возможно использование модификаций фильтра Калмана с расширенным вектором состояния [8, 114]. Идентифицируемая система записывается в форме уравнения 1-го порядка с фазовыми переменными состояния, в число которых включаются оцениваемые параметры. Отмечается, что сходимость алгоритмов такого расширенного фильтра сильно зависит от начального приближения по параметрам [206]. Это становится препятствием для эффективных вычислений в реальном времени в нелабораторных условиях.

Альтернативный подход, рассматриваемый в диссертации, предполагает запись идентифицируемой системы в виде уравнения порядка $p \geqslant 1$ без переменных состояния и затем совместную идентификацию процессов и параметров уравнения вариационными методами (глава 3).

6.3.1 Особенности идентификации систем с трендами

Пусть $z = (z[1]; \ldots ; z[N])$, $z[k] \in \mathbb{R}^n$ — отрезок временного ряда (полезный сигнал), и $f = (f[1]; \ldots ; f[N])$, $f[k] \in \mathbb{R}^n$ — тренд. Наблюдается суммарный процесс

$$\zeta = z + f + \eta \in \mathbb{R}^{nN}, \tag{6.3.1}$$

где $\eta \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I_{nN})$ — стохастические возмущения. Процессы (траектории) z и f описываются разностными уравнениями:

$$\gamma_p z[k+p] + \ldots + \gamma_0 z[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p}, \tag{6.3.2}$$

$$\varphi_q f[k+q] + \ldots + \varphi_0 f[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-q}, \tag{6.3.3}$$

$$\gamma_i \in \mathbb{R}^{r \times n}, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}.$$

С формальной точки зрения процессы z и f рассматриваются равноправно, так что трендом можно считать процесс z, а полезным сигналом — процесс f. На практике уравнение тренда (6.3.3) имеет более простой вид, чем (6.3.2). В качестве тренда могут выступать, например, детерминированные помехи, добавляемые к полезному сигналу в ходе измерений. Начальные условия и параметры уравнения тренда f будут подлежать идентификации совместно с начальными условиями и параметрами уравнения полезного сигнала z.

Перейдем к матричной записи в (6.3.2), (6.3.3):

$$Gz = 0, \qquad Ff = 0. \tag{6.3.4}$$

Здесь G и F — клеточно-теплицевые матрицы размеров соответственно $r(N-p) \times nN$ и $r_1(N-q) \times nN$:

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_q \end{pmatrix}.$$

Матричные коэффициенты γ_i, φ_i зависят от векторного параметра θ в открытой области $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^v$: $G \doteq G_\theta$, $F \doteq F_\theta$. В уравнениях (6.3.2), (6.3.4) значение θ фиксировано. Как и ранее, обозначим $G \backsim \gamma(s)$, $F \backsim \varphi(s)$,

$$\gamma(s) \doteq \gamma_p s^p + \gamma_{p-1} s^{p-1} + \ldots + \gamma_0, \qquad \varphi(s) \doteq \varphi_q s^q + \varphi_{q-1} s^{q-1} + \ldots + \varphi_0.$$

Введем числовые матрицы

$$\gamma_\theta \doteq \begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p\end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r\times n(p+1)},$$

$$\varphi_\theta \doteq \begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_q\end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r_1\times n(q+1)}.$$

Зависимость $\theta \mapsto \gamma_\theta$ подчиним условиям (i') на с. 128, (ii) на с. 91. Тем же условиям подчиним зависимость $\theta \mapsto \varphi_\theta$ (с формальной заменой γ на φ, D на D_1).

Пусть $\mathcal{M}_L \doteq \{\check\varsigma_{(1)}, \dots, \check\varsigma_{(L)}\} \subset \mathbb{R}^{nN}$ — выборка наблюдений случайной величины $\check\varsigma$ 312:

$$\check\varsigma_{(i)} = z_{*(i)} + f_{*(i)} + \eta_{(i)}, \qquad i \in \overline{1, L}, \tag{6.3.5}$$

где $\eta_{(i)} \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I_{nN})$ — независимые одинаково распределенные возмущения. Величины $z_{*(i)}$, $f_{*(i)}$ являются решениями уравнений (6.3.4) с заранее не известными значениями начальных условий и параметров $\theta = \theta_*$: $G_{\theta_*} z_{*(i)} = 0$, $F_{\theta_*} f_{*(i)} = 0$.

Множество наблюдений $\mathcal{M}_L$ считаем полным в смысле утверждения 3.2.1 и определения 3.2.2, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D^\top V^\top(z_{*(i)}) V(z_{*(i)}) D > 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D^\top V^\top(z_{*(i)}) V(z_{*(i)}) D > 0,\\
&\mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D_1^\top V_1^\top(f_{*(i)}) V_1(f_{*(i)}) D_1 > 0, \qquad \lim_{L\to\infty} \mathop{\mathbf{M}}_{i=1}^{L} D_1^\top V_1^\top(f_{*(i)}) V_1(z_{*(i)}) D_1 > 0.
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Задача 1. Построить оценку $\hat\theta(\check\varsigma_{(1)}, \dots, \check\varsigma_{(L)})$ параметра θ_*, состоятельную в смысле сходимости п. н. $\hat\theta \to \theta_*$ при $L \to \infty$.

Задача 2. Пусть $z_{*(1)} = \dots = z_{*(L)} = z_*$, $f_{*(1)} = \dots = f_{*(L)} = f_*$. Построить оценки $\hat\theta$, $\hat z$ и $\hat f$, состоятельные в смысле сходимости п. н. $\hat\theta \to \theta_*$, $\hat z \to z_*$, $\hat f \to f_*$ при $L \to \infty$.

Решение задачи 1. Определим суммарную систему (см. раздел 6.1.1):

$$P_\theta \varsigma = 0, \qquad \varsigma \doteq z + f, \qquad \mathcal{N}(P_\theta) = \mathcal{N}(G_\theta) + \mathcal{N}(F_\theta). \tag{6.3.7}$$

Обозначим $P_\theta \backsim \pi(s) \doteq \pi_l s^l + \pi_{l-1} s^{l-1} + \dots + \pi_0$,

$$\pi_\theta \doteq \begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_l\end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r_2\times n(l+1)}.$$

Суммарная система определяется по матрицам слагаемых не однозначно (предложение 6.1.1). Ввиду того, что строки $\pi(s)$ являются по построению базисом многообразия строк $\mathcal{P}(\pi(s))$, матрица π_θ удовлетворяет условиям (ii) на с. 91 с формальной заменой γ на π (теорема 6.1.2). Условие (i) на с. 91 (однозначности обратного отображения $\pi_\theta \to \theta$) и тем более условие (i') на с. 128 (аффинного вида прямой зависимости $\theta \to \pi_\theta$ с заменой D на D_2) могут выполняться только в частных случаях зависимостей $\theta \to \gamma_\theta$ и $\theta \to \varphi_\theta$, определяющих отображение $\theta \to \pi_\theta$. Эти частные случаи, тем не менее, типичны в приложениях, см. примеры ниже.

Согласно обозначениям, суммарный процесс ς описывается уравнением

$$\pi_l\varsigma[k+l]+\ldots+\pi_0\varsigma[k]=0, \qquad k\in\overline{1,N-l}, \tag{6.3.8}$$

в котором матричные коэффициенты π_i определяются исходя из известных коэффициентов γ_i и φ_i (6.3.2), (6.3.3) (см. раздел 6.1.1.1 с примерами).

При условии различимости (ниже) состоятельные оценки $\hat{\theta}$ параметров уравнений могут быть получены вариационными методами (раздел 3.3). Поиск $\hat{\theta}$ сводится к минимизации целевой функции

$$\hat{\theta}=\arg\min_{\theta} J(\theta), \qquad J(\theta)=L^{-1}\sum_{i=1}^{L} J_{(i)}(\theta), \tag{6.3.9}$$

$$J_{(i)}(\theta)\doteq\left\|\check{\varsigma}_{(i)}-\hat{\varsigma}_{(i)}\right\|^2\doteq\min_{P_\theta\varsigma_{(i)}=0}\left\|\check{\varsigma}_{(i)}-\varsigma_{(i)}\right\|^2.$$

Существенно, что модельное уравнение, которое входит в условие минимизации, является уравнением суммарной системы. Это уравнение строится по матрицам G_θ, F_θ слагаемых систем (6.3.2) и (6.3.3).

Возможны различные варианты упрощения оценок (6.3.9) путем замены их оценками ОР, ОРМ и т. п. с сохранением свойства состоятельности при некотором ухудшении статистических свойств (увеличении асимптотической дисперсии), см. раздел 3.3.

Решение задачи 2. На первом шаге получаем оценку $\hat{\theta}$, решив задачу 1 в частном случае наблюдений единственной траектории $z_{*(i)}=z_*$, $f_{*(i)}=f_*$ (см. раздел 4.2, утверждение 4.2.1):

$$\begin{gathered}\hat{\theta}=\arg\min_{\theta} J(\theta),\\ J(\theta)\doteq\min_{P_\theta\varsigma=0} L^{-1}\sum_{i=1}^{L}\left\|\check{\varsigma}_{(i)}-\varsigma\right\|^2=\min_{P_\theta\varsigma=0}\left\|\tilde{\varsigma}-\varsigma\right\|^2,\\ \tilde{\varsigma}\doteq L^{-1}\sum_{i=1}^{L}\check{\varsigma}_{(i)}.\end{gathered} \tag{6.3.10}$$

Для полученного значения $\hat{\theta}$ вычисляется оценка суммарной траектории $\hat{\varsigma}$:

$$\hat{\varsigma}=\arg\min_{P_{\hat{\theta}}\varsigma=0}\left\|\tilde{\varsigma}-\varsigma\right\|^2. \tag{6.3.11}$$

Решение минимизационной задачи (6.3.11) стандартно:

$$\hat{\varsigma}=\left[I-P_{\hat{\theta}}^{\top}\left(P_{\hat{\theta}}P_{\hat{\theta}}^{\top}\right)^{-1}P_{\hat{\theta}}\right]\tilde{\varsigma}. \tag{6.3.12}$$

Далее из полученной оценки суммы $\hat{\varsigma}=\hat{z}+\hat{f}$ выделяются слагаемые $\hat{z}$ и $\hat{f}$. Единственность на этом шаге имеет место тогда и только тогда, когда уравнения $G_{\hat{\theta}}z=0$ и

$F_{\hat{\theta}} f = 0$ не имеют общих ненулевых решений, т. е.

$$\mathcal{N}\left(G_{\hat{\theta}}\right) \cap \mathcal{N}\left(F_{\hat{\theta}}\right) = \{0\}. \tag{6.3.13}$$

Для проверки условия единственности применяется теорема 6.1.3. Если это условие выполнено, для вычисления $\hat{z}$ и $\hat{f}$ можно использовать формулы косого проецирования $\hat{\varsigma}$ на подпространства $\mathcal{N}\left(G_{\hat{\theta}}\right)$ и $\mathcal{N}\left(F_{\hat{\theta}}\right)$, см. разделы 6.2.1.2 и 6.2.2.1.

Для каждого значения $\hat{\theta}$ получаемые описанным выше способом оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ линейно зависят от наблюдений $\check{\varsigma}_{(1)}, \ldots, \check{\varsigma}_{(L)}$. Поэтому из состоятельности оценки $\hat{\theta}$ (6.3.9) (теорема 3.4.1) следует состоятельность оценок $\hat{z}$ и $\hat{f}$.

Условие единственности (6.3.13), иначе называемое условием нулевого пересечения (раздел 6.1.2), играет роль только при вычислении оценок слагаемых $\hat{z}$ и $\hat{f}$. При оценке параметров θ по полным наблюдениям условия единственности (различимости) формулируются в терминах матрицы P_θ суммарной системы (6.3.7) без использования условия нулевого пересечения. Действительно, в примере 4 раздела 6.2.1.2 пара матриц

$$G = (\alpha(s), \beta(s)) \otimes E, \qquad F_1 = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E$$

приводит к той же суммарной матрице P, что и пара G, $F_2 = \left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{smallmatrix}\right) \otimes E$. В то же время, как показано при описании этого примера, при условиях НОД$(\alpha, \tau) = 1$, НОД$(\beta, \tau) = 1$ пара G, F_1 удовлетворяет условию нулевого пересечения (6.3.13), а пара G, F_2 — не удовлетворяет.

6.3.2 Замечание о методах идентификации 1-го и 2-го рода

Практически во всех методах идентификации оценки параметров θ вычисляются как предельные значения некоторой последовательности оценок $\hat{\theta}_i$, построенных по измерительной выборке растущего объема. Здесь возможны два случая:

1. Объем выборки растет за счет *длины* интервала наблюдения $N \to \infty$ при конечном числе L измеряемых процессов $\check{\varsigma}$ (это так называемый статистический предел *по времени*).

2. Объем выборки растет за счет *числа* измеренных процессов $L \to \infty$ при конечной длине интервала наблюдения N (статистический предел *по ансамблю*).

Мы пердлагаем называть методы идентификации со статистическим пределом *по времени* методами *1-го рода*, а со статистическим пределом *по ансамблю* — методами *2-го рода.* К первому роду, например, относятся методы [22, 46, 120, 195]. Типичными представителями методов 2-го рода являются вариационные (орторегрессионные) методы идентификации [11, 42, 45, 58, 78, 134, 154] (глава 3).

Пусть в системе (6.3.3) выполнено $n_1 = r$, т. е. процесс тренда описывается однородным разностным уравнением. Если корни многочлена $\det\varphi(s)$ лежат внутри единичного круга, то в пределе $N \to \infty$ тренд в среднеквадратическом смысле сходится к нулю:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|f[i]\|^2 = 0.$$

Это делает невозможным*) оценку параметров уравнения тренда любым методом, предполагающим статистический предел по времени $N \to \infty$ (1-го рода). Состоятельные оценки параметров θ в этом случае могут быть получены только в пределе по ансамблю $L \to \infty$ при конечных N. Это приводит к необходимости использовать методы 2-го рода, например, вариационные при аддитивных ошибках в наблюдениях, или линейный метод наименьших квадратов в случае ошибок в невязке уравнения.

Другим случаем, когда применимы методы идентификации только 2-го рода, являются неустойчивые тренды (корни многочлена $\det\varphi(s)$ лежат вне единичного круга).

Такие же замечания можно сделать и в случае однородного уравнения ряда ($n = r$).

6.3.3 Условия различимости параметров суммарной системы

Пусть дано полное в смысле определения 3.2.1 множество $\mathcal{M}_*$ наблюдений сумм ς_*, т. е. $\operatorname{span} \mathcal{M}_* = \mathcal{N}(P_{\theta_*})$. Для полноты $\mathcal{M}_*$ достаточно положительной определенности матриц (6.3.6) (см. предложение 3.2.1). Взаимосвязь терминов различимости и идентифицируемости оговаривалась в замечании 3.2.1. (Различимость есть идентифицируемость по полному множеству наблюдений.)

В общем случае согласно предложению 2.2.1 условие различимости параметров θ суммарной системы с матрицей P_θ имеет вид:

$$\forall\, \xi \in \Theta \quad QP_\theta = P_\xi \quad \Rightarrow \quad Q = I, \quad \xi = \theta. \tag{6.3.14}$$

Нас интересует случай клеточно-теплицевых матриц $P_\theta = \pi_\theta(s) \otimes E$. Для суммарных матриц такого вида по построению (теорема 6.1.2) выполняются условия (ii) на с. 91 с заменой $\gamma_\theta(s)$ на $\pi_\theta(s)$. В этом случае различимость (6.3.14) равносильна следующему условию для многочленных матриц:

$$\forall\, \xi \in \Theta \quad \rho(s)\pi_\theta(s) = \pi_\xi(s) \quad \Rightarrow \quad \rho(s) = I, \quad \xi = \theta \tag{6.3.15}$$

(см. утверждение 2.3.1).

Для получения конструктивных условий различимости используется теорема 2.3.1. Ее применение к суммарным системам $P_\theta \backsim \pi(s)$ затруднено тем, что в общем случае даже при простых "аффинных" зависимостях $\gamma(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ вида (i') на с. 128 элементы матрицы суммарной системы $\pi(\theta)$ зависят от θ квадратичным образом; к тому же

*) В силу невыполнения условия постоянного возбуждения наблюдаемого сигнала, см. [195, гл. 14].

якобиевые матрицы $\partial\pi/\partial\theta$, как правило, оказываются не квадратными, и число фиксированных элементов в $\pi(\theta)$ недостаточно для получения сильных (близких к необходимым) достаточных условий различимости. Тем не менее, для широкого класса систем удается показать, что если *фиксирована* одна из матриц γ или φ, то условия различимости суммарной системы равносильны условиям различимости нефиксированной системы, соответственно φ или γ. Тогда для анализа различимости становятся применимыми все конструктивные утверждения главы 2 (например, теоремы 2.3.1–2.3.4). Точной формулировке и доказательству этого результата и посвящен данный раздел.

Рассмотрим класс суммарных систем, описанный в примерах Г на сс. 274 и 281. А именно, пусть

$$G \backsim \gamma(s) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(s) & \dots & \alpha_{1r}(s) & \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}(s) & \dots & \alpha_{rr}(s) & \beta_{r1}(s) & \dots & \beta_{rm}(s) \end{pmatrix} \doteq \tag{6.3.16}$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s],$$

$$F \backsim \varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau(s) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \tau(s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = \tag{6.3.17}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r \otimes \tau(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+m)}[s], \qquad m \geqslant 1,$$

$$\tau(s) = \tau_{q_1}s^{q_1} + \ldots + \tau_1 s + \tau_0 \in \mathbb{R}[s],$$

при этом $\det\alpha(s) = 0$ не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{R}$ и $\text{НОД}(\tau, \det\alpha) = 1$.

Согласно утверждению 6.1.2 на с. 274, матрица суммарной системы имеет вид

$$\pi(s) = \tau(s)\gamma(s). \tag{6.3.18}$$

Поясним смысл выбора вида матриц G, F. Первое, наличие клетки I_m в $\varphi(s)$ (6.3.17) вызвано необходимостью удовлетворить условиям единственности теоремы 6.1.3. Суммарная система и ее матрица $\pi(s)$ (6.3.18) не изменится, если заменить $\varphi(s)$ (6.3.17) на матрицу $\tilde{\varphi}(s) = I_{r+m} \otimes \tau(s)$ без единиц на диагонали (см. пример 4 на с. на с. 296). Значит, матрицы $\gamma(s)$ (6.3.16), $\varphi(s)$ (6.3.17) описывают ряд z с трендом f,

$$f[k] = \begin{pmatrix} f_1[k]; & \ldots; & f_{r+m}[k] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+m},$$

каждая i-я компонента тренда подчиняется уравнению

$$\tau_{q_1} f_i[k+q_1] + \ldots + \tau_0 f_i[k] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-q_1} \tag{6.3.19}$$

со свободными начальными условиями $f_i[1], \ \ldots, \ f_i[q_1]$. Оптимальные значения начальных условий тренда зависят от предъявленных наблюдений суммарного процесса $\check{\varsigma}_{(1)}, \ldots, \check{\varsigma}_{(L)}$ (6.3.5) и вычисляются по формулам (6.3.12). Таким образом, в рассматриваемом случае тренды являются решениями однородных разностных уравнений (6.3.19) заданного порядка, коэффициенты которых могут быть как известными, так и подлежать идентификации. Для задания такой модели можно использовать как $\varphi(s)$, так и $\tilde{\varphi}(s)$, но последний вариант не удовлетворяет условиям единственности восстановления тренда по наблюдениям суммарного процесса.

Рассмотрим два частных случая зависимости матриц $\gamma(s) = \gamma_\theta(s)$, $\varphi(s) = \begin{pmatrix} I_r \otimes \tau_\theta(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, $\pi(s) = \pi_\theta(s)$ от параметров:

1. параметры уравнения объекта (6.3.2) известны, оцениванию подлежат параметры уравнения тренда (6.3.3); тогда

$$\pi_\theta(s) = \tau_\theta(s)\gamma(s); \tag{6.3.20}$$

2. параметры уравнения тренда известны, оцениванию подлежат параметры уравнения объекта:

$$\pi_\theta(s) = \tau(s)\gamma_\theta(s). \tag{6.3.21}$$

Покажем, что в обоих случаях наличие объекта или тренда с известными фиксированными уравнениями не влияет на условия различимости суммарной системы. Это сразу вытекает из следующих теорем.

Теорема 6.3.1. *Пусть даны два параметрических семейства многочленных матриц* $\{\varphi_\theta(s) : \ \theta \in \Theta\}$, $\{\pi_\theta(s) = \varphi_\theta(s)\gamma(s) : \ \theta \in \Theta\}$, *такие что матрицы* $\varphi_\theta(s)$ *и* $\gamma(s)$ *невертикальные,* $\gamma(s)$ *содержит неособенную подматрицу* $\alpha(s)$ *из столбцов, и для каждой из матриц* $\varphi_\theta(s)$ *и* $\pi_\theta(s)$ *выполнены условия* (i), (ii) (с. 91). *Тогда следующие два утверждения равносильны*:

А1) *суммарная система* (6.3.8) *с матрицей* $\pi_\theta(s)$ *глобально* (*локально*) *различима в точке* θ;

А2) *система* (6.3.3) *с матрицей* $\varphi_\theta(s)$ *глобально* (*локально*) *различима в точке* θ.

Теорема 6.3.2. *Пусть даны два параметрических семейства многочленных матриц* $\{\gamma_\theta(s) : \ \theta \in \Theta\}$, $\{\pi_\theta(s) = \tau(s)\gamma_\theta(s) : \ \theta \in \Theta\}$, *такие что* $\tau(s)$ *есть многочлен и для матриц* $\gamma_\theta(s)$ *и* $\pi_\theta(s)$ *выполнены условия* (i), (ii) (с. 91). *Тогда следующие два утверждения равносильны*:

Б1) *суммарная система* (6.3.8) *с матрицей* $\pi_\theta(s)$ *глобально* (*локально*) *различима в точке* θ;

Б2) *система* (6.3.2) *с матрицей* $\gamma_\theta(s)$ *глобально* (*локально*) *различима в точке* θ.

Доказательство. 1) Покажем, что в условиях теоремы 6.3.1 следующие два утверждения равносильны:

$$\exists\, \xi \in \Theta \quad \pi_\xi(s) = \rho(s)\pi_\theta(s), \tag{1}$$

$$\exists\, \xi \in \Theta \quad \varphi_\xi(s) = \rho(s)\varphi_\theta(s). \tag{2}$$

Отсюда ввиду утверждения 2.3.1 и теоремы 1.5.1 сразу будет следовать равносильность утверждений А1 и А2. Также если установить равносильность утверждений

$$\exists\, \xi \in \Theta \quad \pi_\xi(s) = \rho(s)\pi_\theta(s), \tag{3}$$

$$\exists\, \xi \in \Theta \quad \gamma_\xi(s) = \rho(s)\gamma_\theta(s), \tag{4}$$

то будет доказана равносильность утверждений Б1 и Б2 теоремы 6.3.2.

Действительно, пусть (1), т. е.

$$\varphi_\xi(s)\gamma(s) = \rho(s)\varphi_\theta(s)\gamma(s).$$

Тогда $\varphi_\xi(s)\alpha(s) = \rho(s)\varphi_\theta(s)\alpha(s)$ и получаем $\varphi_\xi(s) = \rho(s)\varphi_\theta(s)$ (2) ввиду неособенности $\alpha(s)$ (равенства понимаются как равенства многочленов, т. е. тождественно по s). Из (2) очевидно следует (1). Равносильность (3) и (4) следует из коммутативности умножения $\gamma_\theta(s)$ на скалярный многочлен $\tau(s)$. Теорема доказана. □

6.3.4 Примеры

1. Рассмотрим для наглядности короткий интервал наблюдения длины $N = 5$. Пусть процесс $z[k] = (y[k]; -u[k])$ соответствует апериодическому звену с уравнением

$$y[k+1] - ay[k] = bu[k], \qquad k = \overline{1,4}. \tag{6.3.22}$$

Здесь $p = 1$, $r = 1$, $n = 2$,

$$G = \begin{pmatrix} -a & -b & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ & & -a & -b & 1 & 0 & & & & \\ & & & & -a & -b & 1 & 0 & & \\ 0 & & & & & & -a & -b & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -a & 1 & & & 0 & -b & & & 0 \\ & -a & 1 & & & & -b & & \\ & & -a & 1 & & & & -b & \\ 0 & & & -a & -1 & 0 & & & -b \end{array}\right) \backsim$$

$$\backsim \gamma(s) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-a & -b \end{pmatrix}.$$

Первое соответствие $\sim$ достигается перестановкой столбцов и удалением нулевого столбца, второе соответствие с многочленными матрицами описано выше в (6.3.16).

Процесс тренда $f[k] = (f_y[k]; f_u[k])$ опишем уравнениями (6.3.4), (6.3.3), (6.3.17) со значениями $q = 1$, $r_1 = 2$, $n = 2$ и матрицами

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & -1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & -1 & 1 & \\ 0 & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -1 & 1 & & & 0 & & & & \\ & -1 & 1 & & & & 0 & & \\ & & -1 & 1 & & & & & \\ 0 & & & -1 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & & & 0 \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & 0 & & & 1 \end{array}\right) \backsim$$

$$\backsim \varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что тренд является константой и присутствует только в компоненте*) y: $f[k] = (f_y[k]; 0)$. Уравнение тренда (6.3.19) в этом примере принимает вид

$$f_y[k+1] - f_y[k] = 0, \qquad k = \overline{1,4},$$

начальное условие (амплитуда тренда) $f_y[1]$ вычисляется из уравнений (6.3.12), (6.2.13) или (6.2.21) с подстановкой $\check{z} = \check{\zeta}$, $\overline{B}^\top = G$,

$$C = F_\perp = (1 \ldots 10 \ldots 0)^\top,$$

$\hat{z}_{\mathcal{C}} = \hat{f}$. Вычисление матрицы $\overline{B}_2^\top = G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} GF_\perp$ и проекции $\hat{z}_{\mathcal{B}} = \hat{z}$ в формуле (6.2.21) можно осуществлять рекуррентно по алгоритмам из раздела 6.6.

Пусть коэффициенты a, b неизвестны. Рассмотрим задачу 2 по полным наблюдениям (6.3.5) с $L = 1$, опустив метку $*$ в индексах величин:

*)В данном примере невозможно вычислить константные тренды неизвестной амплитуды, если они присутствуют сразу в обеих компонентах y, u, поскольку нарушается условие единственности теоремы 6.1.3.

Задача. По наблюдениям $\varsigma = z + f + \eta$ суммарного процесса с возмущениями вычислить оценки $\hat{\theta}$, $\hat{z}$, $\hat{f}$ вектора параметров $\theta = (a; b)$, полезного сигнала z и тренда f.

Решение. Матрица P суммарной системы определяется выражением

$$P \backsim \pi(s) = \tau(s)\begin{pmatrix}\alpha(s) & \beta(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s^2 - (a+1)\,s + a & -bs + b\end{pmatrix} \backsim$$

$$\backsim \left(\begin{array}{cccccc|cccc} a & -(a+1) & 1 & & & 0 & b & -b & & 0 \\ & a & -(a+1) & 1 & & & & b & -b & \\ 0 & & a & & -(a+1) & 1 & 0 & & b & -b \end{array}\right).$$

Для стохастических возмущений $\eta \in \mathbf{M}_2(0, \sigma^2 I)$ параметр $\theta = (a; b)$ состоятельно идентифицируется по наблюдениям ς вариационными методами (раздел 3.3).

Оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ вычисляются по формулам (6.2.13) с подстановкой $\check{z} = \varsigma$ и

$$F_\perp = \begin{pmatrix}1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}^\top.$$

2. Приведем результаты расчетов для предыдущего примера по уравнению (6.3.22) со значениями параметров $a = a^* = 0.8$, $b = b^* = 0.25$, $f_y[1] = f_y^*[1] = 0.5$, $L = 1$. Длина траектории $N = 50$ и $N = 200$. Среднеквадратическое отклонение (СКО) σ помех $\eta[k] = (\eta_y[k]; \eta_u[k])$, моделируемых датчиком нормального шума, задается в % от среднего модуля значений сигналов $y[k]$, $u[k]$ (рис. 1, 2).

Среднее и СКО оценок параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ вычислялись для разного числа M экспериментов с независимыми реализациями шума η. Число реализаций $M = 50$ оказалось достаточным для получения установившихся значений среднего и СКО оценок параметров (рис. 3).

Зависимость среднего и СКО оценок параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ от амплитуды шума σ представлена на рис. 4.

Оценки суммарного сигнала $\hat{\varsigma}[k] = \left(\hat{y}[k] + \hat{f}_y[k]; -\hat{u}[k]\right)$ и тренда $\hat{f}[k] = \left(\hat{f}_y[k]; 0\right)$ вычислены по формулам (6.2.13) со значениями параметров $\hat{a} = 0.8365$ и $\hat{b} = 0.2079$, полученными в результате идентификации по данным рис. 1 ($\sigma = 30\%$, $N = 50$) с одной реализацией шума ($M = 1$). Оценки $\hat{u}[k]$, $\hat{y}[k] + \hat{f}_y[k]$, $\hat{f}_y[k]$ вместе с эталонными значениями $u[k]$, $y[k] + f_y[k]$, $f_y[k]$ представлены на рис. 5.

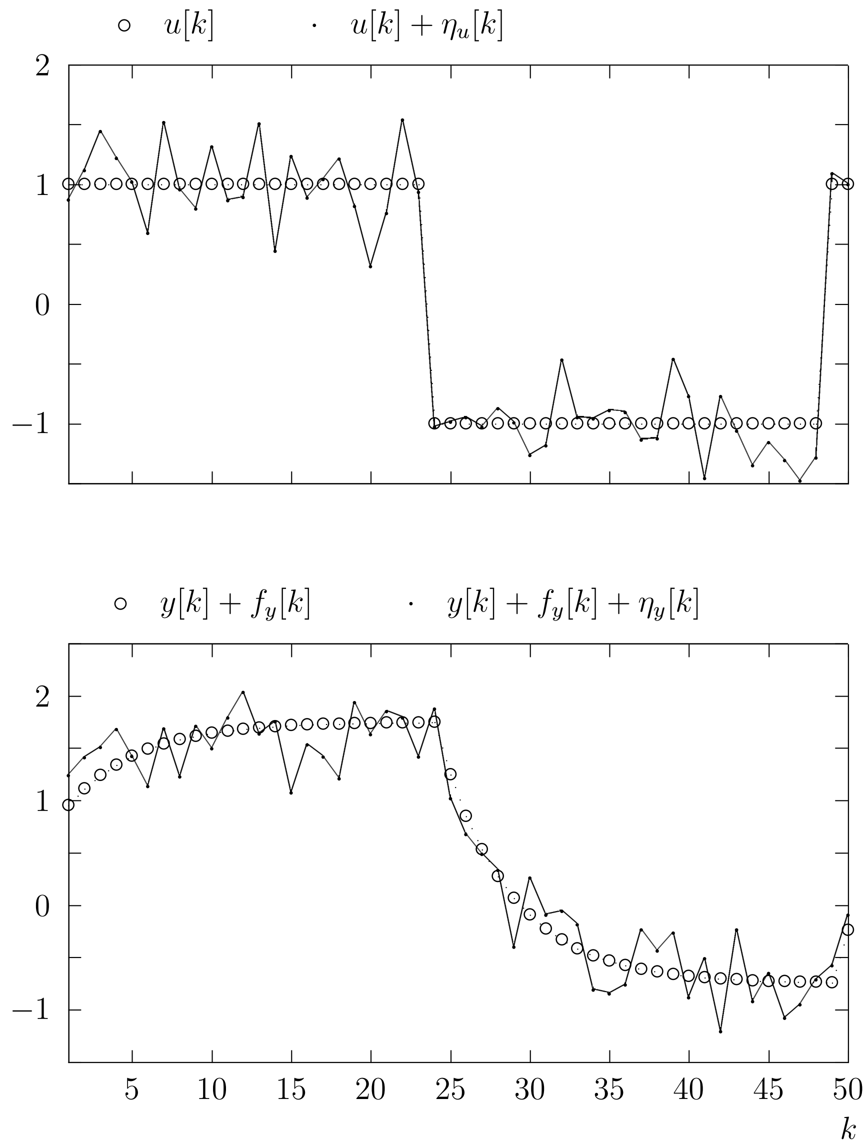


Рис. 1. Массивы наблюдений ($\sigma = 30\%$, $N = 50$).

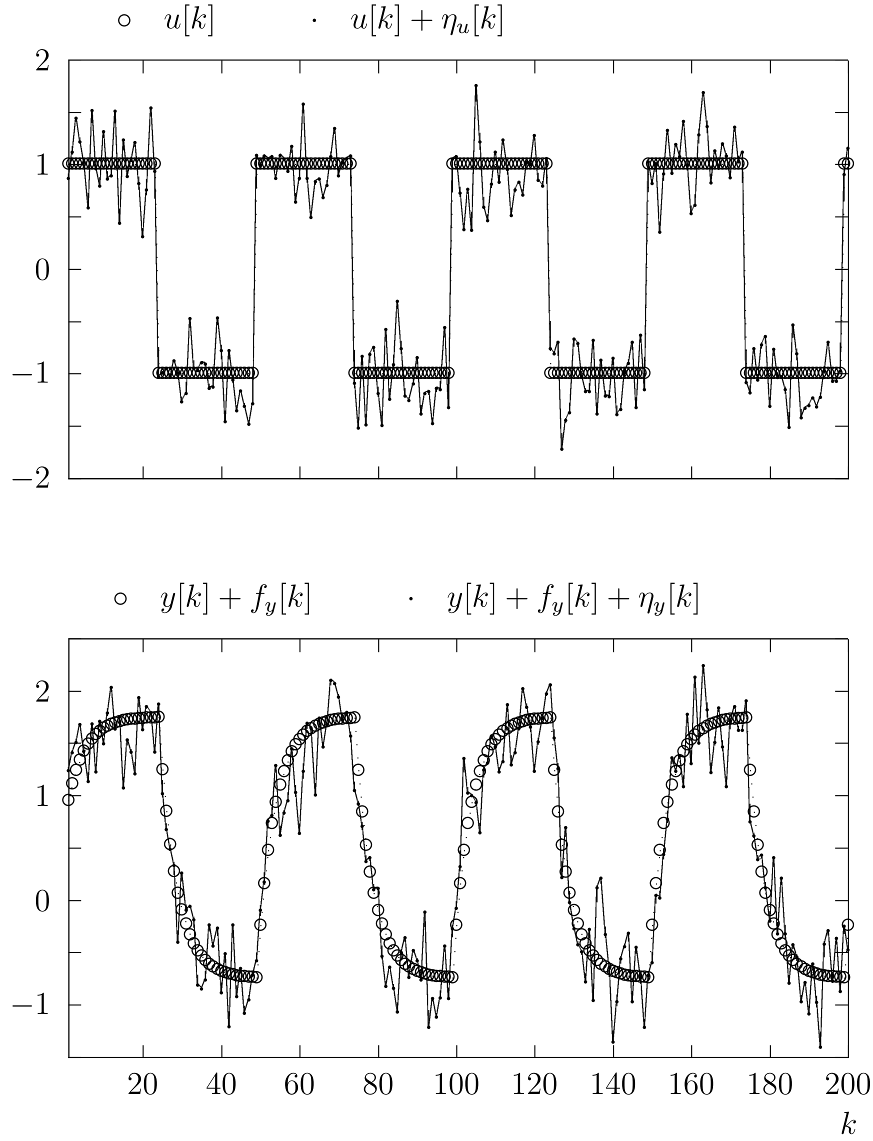


Рис. 2. Массивы наблюдений ($\sigma = 30\%,\ N = 200$).

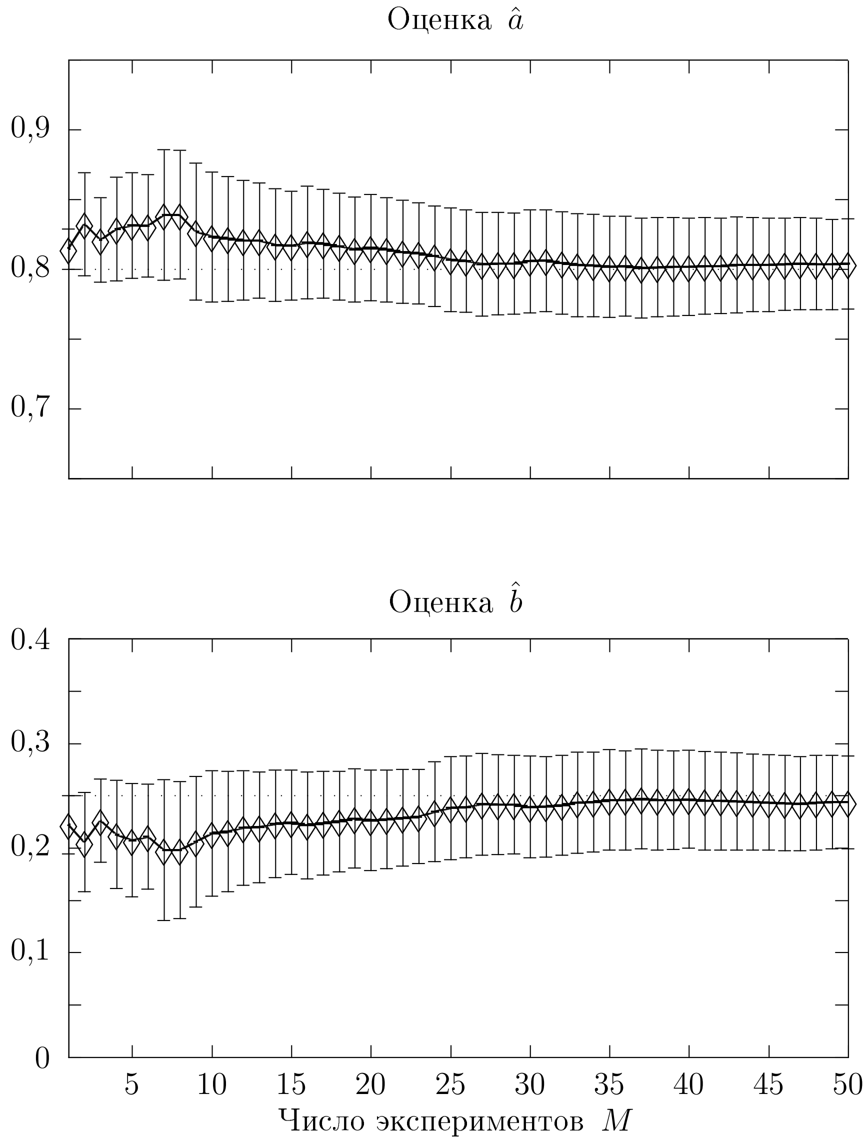


Рис. 3. Среднее и СКО оценок параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ в зависимости от числа экспериментов M с разными реализациями шума ($\sigma = 30\%$, $N = 50$).

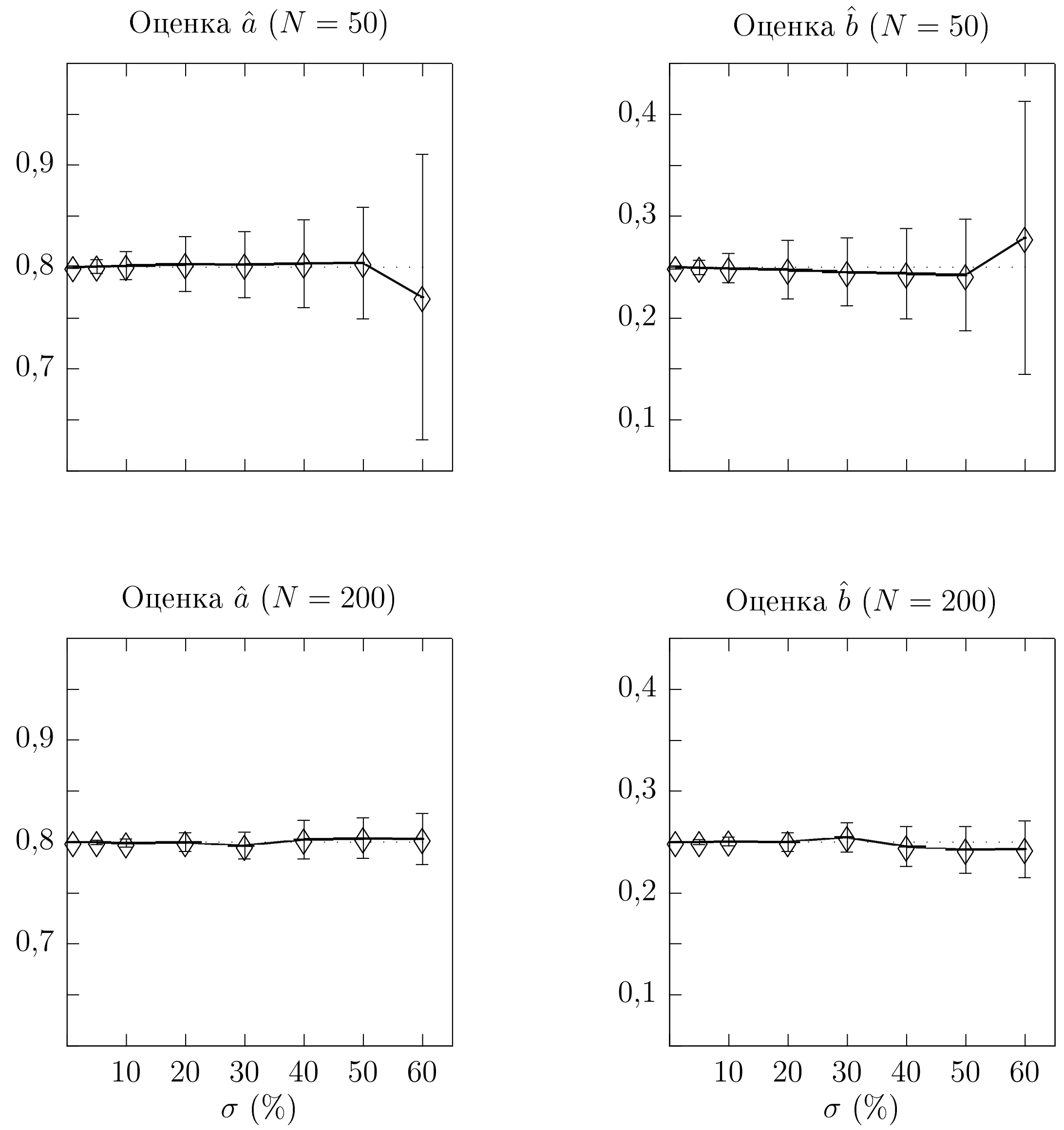


Рис. 4. Среднее и СКО оценок параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ в зависимости от амплитуды шума σ (%) для $N = 50$ и $N = 200$. Число экспериментов $M = 50$.

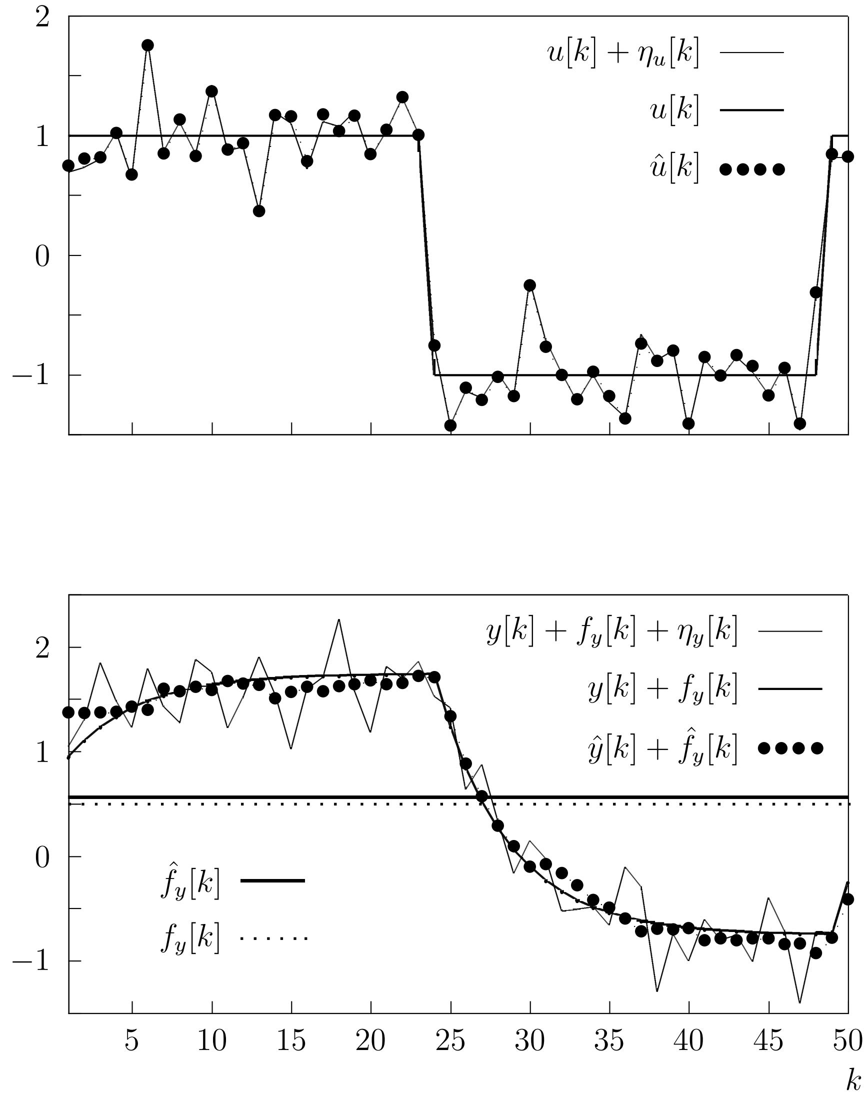


Рис. 5. Оценки сигналов $u[k]$, $y[k] + f_y[k]$ и $f_y[k]$ по одному измерению ($M = 1$), $\sigma = 30\%$, $N = 50$.

3. Предположим, что коэффициенты уравнения (6.3.22) для процесса z известны: $a = 0.8$, $b = 1$. Рассмотрим уравнение тренда (6.3.19) 2-го порядка:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + s^2,$$

$$F \sim \begin{pmatrix} \tau(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} \tau_0 & \tau_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & \tau_0 & \tau_1 & 1 & & & 0 & & \\ 0 & & \tau_0 & \tau_1 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & 0 & & & 1 \end{array}\right).$$

Коэффициенты τ_0, τ_1 уравнения тренда не даны и подлежат идентификации.

Матрица P уравнения суммарного процесса имеет вид:

$$P \sim \pi(s) = \tau(s)\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} = (\tau_0 + \tau_1 s + s^2)\begin{pmatrix} s - 0.8 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.8\tau_0 + (\tau_0 - 0.8\tau_1)s + (\tau_1 - 0.8)s^2 + s^3, & \tau_0 + \tau_1 s + s^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -0.8\tau_0 & \tau_0 - 0.8\tau_1 & \tau_1 - 0.8 & 1 & 0 & \tau_0 & \tau_1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.8\tau_0 & \tau_0 - 0.8\tau_1 & \tau_1 - 0.8 & 1 & 0 & \tau_0 & \tau_1 & 1 \end{array}\right),$$

$$l = 3, \qquad r_2 = 1.$$

Параметр $\theta = (\tau_0; \tau_1)$ состоятельно идентифицируется по наблюдениям $\check{\varsigma}_{(1)}, \ldots \check{\varsigma}_{(L)}$ как и в предыдущем примере. Оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ вычисляются по формулам (6.2.13) с подстановкой $\check{z} = \check{\varsigma}$ и

$$F_\perp = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^\top$$

в случае действительных корней λ, μ многочлена $\hat{\tau}_0 + \hat{\tau}_1 s + s^2$ или

$$F_\perp = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & \rho\sin\omega & \rho^2\sin 2\omega & \rho^3\sin 3\omega & \rho^4\sin 4\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho\cos\omega & \rho^2\cos 2\omega & \rho^3\cos 3\omega & \rho^4\cos 4\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^\top$$

в случае пары комплексных корней $\lambda_{1,2} = \rho\exp(\pm\mathbf{i}\omega)$ (см. раздел 6.4).

Заметим, что здесь все оцениваемые параметры $\theta = (\tau_0; \tau_1)$ сосредоточены в “неуправляемой” части $\tau_\theta(s)$ уравнения (6.3.8) суммарного процесса с матрицей

$$\pi_\theta(s) = \tau_\theta(s)\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix}.$$

6.4 Приложение 1. Многообразия решений однородных систем

Для удобства чтения приведем ряд сведений из монографий [102,126]. Рассмотрим частный случай однородной системы (1.4.1) ($\beta_i = 0$, $m = 0$):

$$\alpha_0 y[k] + \ldots + \alpha_p y[k+p] = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p}, \tag{6.4.1}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — постоянные матричные коэффициенты. Определим многочленную матрицу

$$\alpha(s) \doteq \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p \in \mathbb{R}^{r\times r}[s].$$

Множество решений системы (6.4.1) является многообразием $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{rN}$ векторов вида

$$z \doteq (y[1]; \ldots; y[N]) ,$$

$$y[k] = y_1 P_1 s_1^k + \ldots + y_n P_n s_n^k, \tag{6.4.2}$$

$$n \doteq p_1 + \ldots + p_r = \deg\det\alpha(s),$$

где числа $y_i \in \mathbb{C}$ есть начальные условия краевой задачи, $s_i \in \mathbb{C}$ — корни уравнения $\det\alpha(s) = 0$, векторы $P_i \in \mathbb{R}^r$ вычисляются из уравнений $\alpha(s_i)P_i = 0$ и нормируются каким-либо способом, например, $\|P_i\| = 1$. Если корень s_i имеет кратность $k \geqslant 2$, можно считать, что совпадают корни $s_i = s_{i+1} = \ldots = s_{i+k-1}$, и тогда у соответствующих слагаемых суммы (6.4.2) появляются сомножители — многочлены от t степени от нуля до $k-1$:

$$\left(y_i P_i + y_{i+1} P_{i+1} t + \ldots + y_{i+k-1} P_{i+k-1} t^{k-1}\right) s_i^t \tag{6.4.3}$$

(см., например, [126, гл. 2, пар. 5]).

Слагаемые в правой части уравнения (6.4.2) называются *модами* однородных движений.

В силу того, что уравнение (6.4.1) имеет действительные коэффициенты, комплексные корни появляются в парах сопряженных корней $s_j \doteq a + \mathrm{i}b$, $s_{j+1} \doteq a - \mathrm{i}b$. Поскольку мы ограничиваемся только действительными решениями, начальные условия y_i в линейных комбинациях (6.4.2) и (6.4.3) при действительных корнях s_i должны быть действительные, а при комплексных сопряженных корнях s_j и s_{j+1} — сопряженные: $y_j = \overline{y_{j+1}}$ [102]. В последнем случае два парных слагаемых j и $j+1$ в сумме (6.4.2) дают траекторию

$$A\varrho^t \cos(\omega t + \varphi) ,$$

$$\varrho \doteq \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \omega \doteq \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Эта траектория определена с точностью до чисел $A = A(y_j, y_{j+1})$, $\varphi = \varphi(y_j, y_{j+1})$.

Соответствующая парам сопряженных корней часть многочлена имеет вид

$$(s - s_j)(s - s_{j+1}) = \left(s^2 - 2\rho\cos\omega \cdot s + \rho^2\right).$$

Траектории вида

$$z \doteq (y[1]; \ldots ; y[N]), \qquad y[t] = Ps^t = Pe^{t\ln s}, \qquad P \in \mathbb{R}^r,$$

являются показательными функциями времени t с основанием s или экспонентами с показателем $t\ln s$. Ввиду этого линейные комбинации (6.4.2) можно называть экспоненциальными траекториями. Траектории систем с кратными корнями (6.4.3) называются квазимногочленами [102].

Однородные системы с “вертикальными” матрицами

Рассмотрим обобщение системы (6.4.1) на случай "вертикальных" матриц $\alpha_i \in \mathbb{R}^{q\times r}$: $q > r$. Без потери общности примем, что многочленная матрица

$$\alpha(s) \doteq \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p \in \mathbb{R}^{q\times r}[s] \tag{6.4.4}$$

$\alpha(s)$ имеет полный ранг, то есть все инвариантные многочлены $\alpha(s)$ ненулевые. Обозначим $\pi(s)$ произведение инвариантных многочленов $\alpha(s)$, т. е. наибольший общий делитель миноров порядка r в $\alpha(s)$. Нетрудно увидеть, что многообразие решений $\mathcal{M}$ системы (6.4.1) определяется формулами (6.4.2) или (6.4.3) с заменой $\det\alpha(s)$ на $\pi(s)$.

Предложение 6.4.1. *Система (6.4.1) с "вертикальными" матрицами $\alpha_i \in \mathbb{R}^{q\times r}$, $q \geqslant r$ имеет тривиальное нулевое множество решений тогда и только тогда, когда каноническая форма $\mathrm{Sm}\,\alpha(s)$ не имеет нулевых столбцов и состоит только из нулей и единиц, т. е. когда наибольший общий делитель миноров порядка r в $\alpha(s)$ равен единице.*

Доказательство. Многообразие решений $\mathcal{M}$ системы (6.4.1) есть правое нуль-пространство клеточно-теплицевой матрицы $\alpha(s)\otimes E$ вида (6.1.11). Левые элементарные преобразования матрицы $\alpha(s)$ не изменяют множества решений системы (6.4.1), если степени строк получаемых таким способом матриц не превосходят N. Правые элементарные преобразования $\alpha(s)$ при таком же ограничении степеней строк получаемых матриц приводят к системам, которые имеют нулевое множество решений тогда и только тогда, когда нулевое множество решений имеет исходная система с матрицей $\alpha(s)$. Эти факты становятся очевидными, если заметить, что упомянутые преобразования многочленной матрицы $\alpha(s)$ равносильны левым и правым умножениям числовой матрицы $\alpha(s)\otimes E$ на неособенные матрицы соответствующих размеров. Следовательно, система (6.4.1) с матрицей $\alpha(s)$ имеет нетривиальное (ненулевое) множество решений $\mathcal{M} \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда ненулевое множество решений имеет система (6.4.1) с матрицей канонического вида

$$\operatorname{Sm}\alpha(s) = \left(\begin{array}{ccc} d_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r(s) \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \doteq \left(\begin{array}{c} \widetilde{\alpha}(s) \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

В свою очередь, система с матрицей $\operatorname{Sm}\alpha(s)$ равносильна системе с матрицей $\widetilde{\alpha}(s)$ без нулевых строк:

$$\widetilde{\alpha}(s) \doteq \begin{pmatrix} d_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r(s) \end{pmatrix}.$$

Ввиду известных свойств канонической формы [23, с. 142], каждый предыдущий многочлен на диагонали делит последующий:

$$d_1(s) \vdots d_2(s) \vdots \dots \vdots d_r(s).$$

Решения систем (6.4.1) с квадратными матрицами $\widetilde{\alpha}(s)$ имеют вид (6.4.2), (6.4.3). Эти решения не равны нулю тогда и только тогда, когда степень многочлена $\det\widetilde{\alpha}(s)$ выше нуля, т. е. выше нуля степень многочлена $d_r(s)$. Этот многочлен есть наибольший общий делитель миноров наибольшего порядка r в матрицах $\widetilde{\alpha}(s)$ и $\alpha(s)$. Следовательно, система (6.4.1) с вертикальной матрицей $\alpha(s)$ имеет только тривиальные (нулевые) решения тогда и только тогда, когда каноническая форма $\operatorname{Sm}\alpha(s)$ состоит только из нулей и единиц (и не имеет нулевых столбцов). Предложение доказано. □

Замечание 6.4.1. Ввиду того, что системы с $q > r$ и $q = r$ имеют одинаково устроенные множества решений, уместно называть *однородными* системы с негоризонтальными матрицами $\alpha(s)$ ($q \geqslant r$), а *неоднородными* — системы с горизонтальными матрицами $\alpha(s)$ ($q < r$).

6.5 Приложение 2. Формулы косого проецирования

Выпишем формулы разложения вектора $z \in \mathbb{R}^n$ на непрямую сумму $z = z_A + z_B$, $z_A \in \operatorname{im} A$, $z_B \in \operatorname{im} B$, где A, B — матрицы, столбцы которых образуют базис $\mathbb{R}^n$: $\operatorname{im}(A, B) = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0$.

Выразим проекции z_A, z_B. Обозначим

$$z_A \doteq A\varphi, \quad z_B \doteq B\psi.$$

Ясно, что

$$\overline{A}^\top z = \overline{A}^\top z_B = \overline{A}^\top B\psi, \tag{6.5.1}$$

следовательно,

$$\psi = \left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top z \tag{6.5.2}$$

$$z_B = B\psi = B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top z.$$

Аналогично,

$$z_A = z - z_B = \left[I - B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top\right] z.$$

С другой стороны,

$$z_A = A\varphi = A\left(\overline{B}^\top A\right)^{-1} \overline{B}^\top z.$$

Следовательно, для определенных выше матриц имеем тождества

$$I - B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top \equiv A\left(\overline{B}^\top A\right)^{-1} \overline{B}^\top.$$

$$I - A\left(\overline{B}^\top A\right)^{-1} \overline{B}^\top \equiv B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top.$$

Несложно проверить эти тождества для случая, когда столбцы составной матрицы (A, B) образуют ортогональный базис $\mathbb{R}^n$, то есть $\overline{B} = A$, $\overline{A} = B$ (проверку опускаем).

Таким образом, формулы

$$z_B = B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top z = \left[I - A\left(\overline{B}^\top A\right)^{-1} \overline{B}^\top\right] z,$$

$$z_A = z - z_B = \left[I - B\left(\overline{A}^\top B\right)^{-1} \overline{A}^\top\right] z = A\left(\overline{B}^\top A\right)^{-1} \overline{B}^\top z$$

определяют косое проецирование в $\mathbb{R}^n$ на подпространства $\operatorname{im} B$, $\operatorname{im} A$ для описанных выше матриц A, B.

Пусть теперь A, B — матрицы, столбцы которых *не образуют* базис $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{im}\,(A, B) \subset \mathbb{R}^n, \qquad \dim\operatorname{im}\,(A, B) < n, \qquad \ker\,(A, B) = 0, \qquad \operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0.$$

Матрица $\overline{A}^\top B$ в этом случае не является квадратной, и выражение (6.5.2) теряет смысл. Ввиду (6.1.25),

$$\operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker \overline{A}^\top B = 0.$$

Учитывая, что $\ker \overline{A}^{\top} B = 0$, из (6.5.1) получаем:

$$B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} z = B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} B\psi,$$

$$\psi = \left(B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} B\right)^{-1} B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} z,$$

$$z_B = B\left(B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} B\right)^{-1} B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} z. \tag{6.5.3}$$

Аналогично

$$z_A = A\left(A^{\top}\overline{B}\,\overline{B}^{\top} A\right)^{-1} A^{\top}\overline{B}\,\overline{B}^{\top} z.$$

Используя равенство $z = z_A + z_B$, получаем другую пару соотношений:

$$z_B = z - z_A = \left[I - A\left(A^{\top}\overline{B}\,\overline{B}^{\top} A\right)^{-1} A^{\top}\overline{B}\,\overline{B}^{\top}\right] z,$$

$$z_A = z - z_B = \left[I - B\left(B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top} B\right)^{-1} B^{\top}\overline{A}\,\overline{A}^{\top}\right] z.$$

6.6 Приложение 3. Рекуррентные формулы

Приведем формулы рекуррентного проецирования на подпространство с базисом из столбцов клеточно-теплицевой матрицы [**?**, 42, 45]. Вывод формул для подпространств с однородными базисами приведен в [?] (набор векторов $(x_1;\ldots;x_N)$ называется однородным, если все его элементы связаны степенями унитарного преобразования: $x_i = U^{i-j}x_j$, $U^{-1} = U^*$; в частности, однородными являются наборы строк теплицевых и ганкелевых матриц). Для удобства читателя здесь приводится краткий вывод формул для клеточно-теплицевой матрицы. В их основе лежит алгоритм Дурбина—Левинсона обращения клеточно-теплицевой матрицы, см. С. Марпл (1986) [210, 3.2.1].

Пусть A_N — симметричная клеточно-теплицевая матрица из $N\times N$ $n\times n$-клеток:

$$A_N = \|\alpha_{ij}\|_{j=1,N}^{i=1,N} \in \mathbb{R}^{nN\times nN}, \qquad \alpha_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \alpha = \alpha_{ji}^{\top} \doteq \alpha_{j-i}.$$

Имеют место рекуррентные формулы обращения [20, II.9]:

а) начальные условия:

$$a_1 = \widetilde{a}_1 = A_1^{-1} = \alpha_0^{-1}, \qquad F_1 = \widetilde{F}_1 = I;$$

б) для $k = \overline{2,N}$:

$$\mu_{k-1} = \widetilde{F}_{k-1}^{\top}\begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\\ \vdots \\ \alpha_1\end{pmatrix}, \tag{6.6.1}$$

$$\theta_k = -\widetilde{a}_{k-1}\mu_{k-1}, \qquad \widetilde{\theta}_k = -a_{k-1}\mu_{k-1}^{\top},$$

$$a_k = \left(I - \widetilde{\theta}_k \theta_k\right)^{-1} a_{k-1}, \qquad \widetilde{a}_k = \left(I - \theta_k \widetilde{\theta}_k\right)^{-1} \widetilde{a}_{k-1},$$

$$F_k = \left(\frac{0}{F_{k-1}}\right) + \left(\frac{\widetilde{F}_{k-1}}{0}\right) \theta_k, \qquad \widetilde{F}_k = \left(\frac{\widetilde{F}_{k-1}}{0}\right) + \left(\frac{0}{F_{k-1}}\right) \widetilde{\theta}_k,$$

$$A_k^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + F_k a_k F_k^\top = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{k-1}^{-1} \end{array}\right) + \widetilde{F}_k \widetilde{a}_k \widetilde{F}_k^\top. \tag{6.6.2}$$

Построим алгоритм вычисления проекции $\hat{x} = \overline{B}_N \left(\overline{B}_N^\top \overline{B}_N\right)^{-1} \overline{B}_N^\top x \doteq \Pi_N x$, $x = (x[1]; \ldots; x[N]) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\overline{B}_N \in \mathbb{R}^{nN \times r(N-p)}$ (6.2.23):

$$\overline{B}_N = \left(\begin{array}{c|c} \overline{B}_{N-1} & \begin{matrix} 0 \\ b_{0,p-1} \end{matrix} \\ \hline 0 & b_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} b_0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} b_{1,p} \\ 0 \end{matrix} & \overline{B}_{N-1} \end{array}\right). \tag{6.6.3}$$

Матрица $\overline{B}_N^\top \overline{B}_N \doteq A_N$ симметрична и имеет ленточную клеточно-теплицевую структуру. В формулах (6.6.2) нужно учесть наличие нулевых клеток на удалении от главной диагонали. Из (6.6.2) следует

$$\Pi_k = \overline{B}_k \left[\left(\begin{array}{c|c} A_{k-1}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + F_k a_k F_k^\top\right] \overline{B}_k^\top = \overline{B}_k \left[\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{k-1}^{-1} \end{array}\right) + \widetilde{F}_k \widetilde{a}_k \widetilde{F}_k^\top\right] \overline{B}_k^\top. \tag{6.6.4}$$

Обозначим $f_k \doteq \overline{B}_k F_k$, $\widetilde{f}_k \doteq \overline{B}_k \widetilde{F}_k$. Тогда из (6.6.1) получаем

$$\mu_k = \widetilde{F}_k^\top \overline{B}_k^\top \begin{pmatrix} 0 \\ b_{0,p-1} \end{pmatrix} = \widetilde{f}_k^\top \begin{pmatrix} 0 \\ b_{0,p-1} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (6.6.4) принимают вид:

$$\Pi_k = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + f_k a_k f_k^\top = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Pi_{k-1} \end{array}\right) + \widetilde{f}_k \widetilde{a}_k \widetilde{f}_k^\top. \tag{6.6.5}$$

Из (6.6.2) вытекают рекуррентные соотношения:

а) начальные условия:

$$f_1 = \widetilde{f}_1 = \overline{B}_1 = \begin{pmatrix} b_0^\top & \ldots & b_p^\top \end{pmatrix}^\top,$$

$$a_1 = \widetilde{a}_1 = \left(\overline{B}_1^\top \overline{B}_1\right)^{-1} = \left(f_1^\top f_1\right)^{-1},$$

$$\Pi_1 = f_1 a_1 f_1^\top;$$

б) для $k = \overline{2, N}$:

$$\mu_{k-1} = \widetilde{f}_{k-1}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ b_{0,p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,p}^\top & 0 \end{pmatrix} f_{k-1},$$

$$\theta_k = -\widetilde{a}_{k-1}\mu_{k-1}, \qquad \widetilde{\theta}_k = -a_{k-1}\mu_{k-1}^\top,$$

$$a_k = \left(I - \widetilde{\theta}_k\theta_k\right)^{-1} a_{k-1}, \qquad \widetilde{a}_k = \left(I - \theta_k\widetilde{\theta}_k\right)^{-1} \widetilde{a}_{k-1},$$

$$f_k = \left(\frac{0}{f_{k-1}}\right) + \left(\frac{\widetilde{f}_{k-1}}{0}\right)\theta_k, \qquad \widetilde{f}_k = \left(\frac{\widetilde{f}_{k-1}}{0}\right) + \left(\frac{0}{f_{k-1}}\right)\widetilde{\theta}_k.$$

Рекурсия для проекции $\hat{x}_k = (\hat{x}[1]; \ldots; \hat{x}[k])$ имеет вид:

$$\hat{x}_k = \Pi_k x_k = \left[\left(\begin{array}{c|c} \Pi_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + f_k a_k f_k^\top\right] x_k \doteq \left(\frac{\hat{x}_{k-1}}{0}\right) + f_k a_k \epsilon_k.$$

Учтем равенства:

$$f_k = \overline{B}_k F_k = \left(\begin{array}{c|c} \overline{B}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right)\left(\frac{-A_{k-1}^{-1}\overline{B}_{k-1}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ b_{0,p-1} \end{pmatrix}}{I}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{c|c} \Pi_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\epsilon_k \doteq f_k^\top x_k = \begin{pmatrix} 0 & b^\top \end{pmatrix} x_k - \begin{pmatrix} 0 & b^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= b_p^\top x_k[k] + \sum_{i=0}^{p-1} b_i^\top (x_k[k-i] - \hat{x}_{k-1}[k-i]).$$

Заключение по главе 6

В 6-й главе рассмотрены примеры применения вариационных методов к задачам исследования временных рядов на коротких интервалах наблюдения (не длиннее характерных времен переходных процессов). Предложены новые формулы оптимального вычисления слагаемых процессов (ряда и тренда) по возмущенным наблюдениям сумм при известных уравнениях, а также алгоритмы идентификации неизвестных параметров уравнений ряда и тренда вариационными методами. Показано, что динамические системы, описывающие суммарные процессы «ряд плюс тренд», в типичных случаях неуправляемы. В итоге, вариационные методы оказываются эффективным инструментом для оценки параметров уравнений процессов ряда и тренда.

Заключение

Перечислим результаты диссертационного исследования, выносимые на защиту:

1. Получены не зависящие от метода идентификации конструктивные достаточные условия идентифицируемости параметров многомерных линейных динамических детерминированных и стохастических систем, наиболее близкие к необходимым; на основе анализа сложности условий идентифицируемости предложена новая классификация стохастических систем, отличающаяся от известной классификации Л. Льюнга.

2. Описан новый класс многомерных вариационных оценок параметров линейных динамических систем, включающий в себя основные типы орторегрессионных оценок, встречающиеся в литературе. Доказана состоятельность и исследованы асимптотические свойства оценок этого класса; вычислены информационные матрицы и описаны распределения наблюдений, для которых вариационные оценки являются асимптотически эффективными.

3. Предложен общий подход к сравнению оценок, основанный на линеаризации градиента целевой функции и понятии линейного приближения оценки в случае малых амплитуд возмущений; на основании этого подхода, в частности, показано, что оценки ВМ для широкого класса систем имеют меньшую дисперсию, чем оценки ОР и ОРМ.

4. Получены константы устойчивости вариационных оценок, использующие новые верхние границы для норм 2-х производных неявных вектор-функций векторного аргумента, наилучшие в пределе малых возмущений, установлена их связь с информационными матрицами; на этой основе предложены способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем, в частности, решена проблема К. Ланцоша (1956) анализа устойчивости в задаче идентификации показателей экспонент.

5. В задачах анализа временных рядов с трендами, формулируемых в диссертации как задачи вариационной идентификации линейных систем при наличии в измеряемых процессах неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий, получены условия идентифицируемости как процессов ряда и тренда, так и параметров уравнений, описывающих ряд и тренд.

Выражение благодарности

Пс. 113, 9

В первую очередь хотелось бы выразить благодарность Алексею Олеговичу Егоршину, без идей, энтузиазма, и заразительной увлеченности которого не состоялось бы начало этой работы и не сделаны бы были первые шаги, которые определили дальнейшее направление. Благодарю маму, супругу, сыновей за терпение, поддержку, любовь и сочувствие. Неоценимую заботу и помощь по оформлению рукописи и работе с библиографией мне оказывала Ольга Николаевна Чегодаева. Благодарю коллег по Институту математики им. С. Л. Соболева, с которыми я имею счастье работать; а также начальствующих, коллег и сотрудников Православной гимназии во имя преподобного Сергия Радонежского Новосибирского Академгородка, чью молитвенную поддержку я всегда ощущал в течение работы над диссертацией.

Мне бы хотелось, чтобы имена дорогих мне людей навсегда были связаны с этим скромным трудом.

9(22) мая 2011 г.

Литература

[1] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги // Матем. сб. 1971. Т. 86(128). № 1(9). С. 34-75. Transl.: *Adamyan V.M., Arov D.Z., Krein M.G.* Analytic properties of Schmidt pairs for a hankel operator and the generalized Schur—Takagi problem // Mathematics of the USSR — Sbornik. 1971. V. 15(1). No. 31.

[2] *Авдеенко Т.В.* О планировании модельной структуры в пространстве состояний: анализ структурной идентифицируемости // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4. № 2. 59–72.

[3] *Амбарцумиан В.А.* К вопросу о диффузном отражении света мутной средой // ДАН СССР. 1943. Т. XXXVIII. № 8. С. 257-261.

[4] *Александров А.Г, Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 128-147.

[5] *Алексеев Е.Р., Чеснокова Е.А., Рудченко Е.А.* Scilab: Решение инженерных и математических задач. М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний. 2008. http://docs.altlinux.org/books/2008/altlibrary-scilab-20090409.pdf

[6] *Апарцин С.А.* Неклассические уравнения Вольтерра I-го рода. Новосибирск: Наука, 1999.

[7] *Балонин Н.А.* Теоремы идентифицируемости. СПб.: Политехника, 2010.

[8] *Белоглазов И.Н.* Оптимальные совместные оценивание и идентификация в дискретных линейных системах // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 811-815.

[9] *Бердышев В.И., Петрак Л.В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1999.

[10] *Бодунов Н. А.* Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости. С.-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.

[11] *Бойчук Л.М., Чихрадзе Т.А.* Сравнение моделей, получаемых по методу наименьших квадратов и по ортогональной регрессии // Автоматика. 1985. № 5. С. 57-61.

[12] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1, 2. М.: Мир, 1974.

[13] *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск: Наука; изд-во Ин-та математики, 1997.

[14] *Босинзон Ю.М., Фальковский И.Я.* Об одном методе оценивания параметров временных зависимостей по экспериментальной информации // Автоматика и телемеханика. 1994. № 4. С. 55-59.

[15] *Бунич А.Л.* Быстросходящийся алгоритм идентификации линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 101-107.

[16] *Бунич А.Л.* Идентификация дискретных линейных объектов с большим отношением сигнал/шум // Автоматика и телемеханика. 2001 . № 3. С. 53-62.

[17] *Бунич А.Л., Бахтадзе Н.Н.* Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором. М.: Наука, 2003.

[18] *Виленкин С.Я., Гинсберг К.С.* Интерпретация и некоторые эвристические приемы конструирования оценок типа Стейна—Джеймса // Автоматики и телемеханика. 1991. № 6. С. 56-66.

[19] *Виллемс Я.* От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989. С. 8-191. (Новое в зарубежной науке. Сер. Математика; Т. 44).

[20] *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

[21] *Ворчик Б.Г.* Единственность оценок максимального правдоподобия параметров стохастических систем (проблема локальных экстремумов) // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 47-55.

[22] *Ворчик Б.Г.* Идентифицируемость линейных параметрических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 64-78. № 7. С. 96-109.

[23] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1966.

[24] *Гаусс К.Ф.* (*Gauss C.F.* Theoria combinationis observationu merroribus minimus obnoxiae, 1821.) Русский перевод: см. Избранные геодезические сочинения, т.1, М.: Геодезиздат, 1957, с. 59-87.

[25] *Гнедин А.В., Яралов А.А.* Идентифицируемость систем, зависящих от параметров // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 48-57.

[26] *Годунов С.К.* Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.

[27] *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.

[28] *Данеев А.В., Русанов В.А.* К аксиоматической теории идентификации I, II // Автоматика и телемеханика. 1994. № 8. С. 126-136. № 9. С. 120-133.

[29] *Данеев А.В., Русанов В.А.* Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа // Изв. вузов (математика). 2001. № 10 (473). С. 18-28.

[30] *Демиденко В.Г.* Восстановление параметров однородной линейной модели // Вестник НГУ (Серия: математика, механика, информатика). 2008. Т. 8. Вып. 3. С. 51-59.

[31] *Демиденко В.Г.* Задачи идентификации и методы их решения (краткий обзор) // Неопубликованная рукопись. 2010.

[32] *Демиденко В.Г.* Восстановление коэффициентов систем линейных разностных уравнений // Вестник НГУ (Серия: математика, механика, информатика). 2010. Т. 10. Вып. 2. С. 45-53.

[33] *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.

[34] *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.

[35] *Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области // СибЖИМ. 2003. Т. 6. № 3 (15). С. 70-87.

[36] *Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем в частотной области // СибЖИМ. 2007. Т. 10. № 1 (29). С. 71-90.

[37] *Денисов В.И., Тимофеев В.С.* Исследование влияния грубых ошибок наблюдений на информационную матрицу Фишера // СибЖИМ. 2008. Т. 11, № 2 (34). С. 65-73.

[38] *Джонсон Н., Лион Ф.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. М.: Мир, 1980.

[39] *Дмитриев А.В., Дружинин Э.И.* Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности // Известия РАН ТСУ. 1999. № 3. С. 44-52.

[40] *Егоршин А.О.* Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов // Оптимальные и самонастраивающиеся системы. Новосибирск, 1971. С. 40-53.

[41] *Егоршин А.О., Будянов В.П.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1. С. 78-82.

[42] *Егоршин А.О.* Метод наименьших квадратов и "быстрые" алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. № 1. С. 30-42.

[43] *Егоршин А.О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3. № 2(6). С. 78-93.

[44] *Егоршин А.О.* Вариационная дискретизация и идентификация линейных стационарных дифференциальных уравнений // Труды III Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'04. Москва, 28-30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 1824-1883.

[45] *Егоршин А.О.* Оптимизация параметров стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 29-48.

[46] *Жданов А.И., Кацюба О.А.* Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29-38.

[47] *Зедгинидзе И.Г.* Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М.: Наука, 1976.

[48] *Калман Р.* Идентификация систем с шумами // УМН. 1985. Т. 40. Вып. 4 (244). С. 27-41.

[49] *Касьянова С.Н., Ломов А.А.* Программный комплекс моделирования и идентификации линейных динамических систем на основе вариационного метода // Сб. «Динамика управляемых космических объектов», Красноярск, Вычислительный центр, 1990. С. 113-121.

[50] *Катковник В.Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. Метод локальной аппроксимации. М.: Наука, 1985.

[51] *Кашьяп Р.Л., Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.

[52] *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений. М.: Наука, 1966.

[53] *Кендалл М., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976.

[54] *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941. Т. 5. С. 3-14. (В кн.: Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 255-263.)

[55] *Колмогоров А.Н.* К обоснованию метода наименьших квадратов // УМН. 1946. Т. 1. Вып. 1. С. 57-70. (В кн.: Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. С. 267-283.)

[56] *Колчанов Н.А., Ананько Е.А., Колпаков Ф.А., Подколодная Ф.А., Игнатьева Е.В., Горячковская Т.Н., Степаненко И.Л.* Генные сети // Мол. Биология. 2000. Т. 34. С. 533-544.

[57] *Костин В.И.* О точках экстремума одной функции // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. Т. 24. С. 35-42.

[58] *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.

[59] *Крейн М.Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // ДАН СССР. 1955. Т. 100. № 3. С. 413-416.

[60] *Куржанский А.Б.* Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3-26.

[61] *Кутателадзе С.С.* Сергей Соболев и Лоран Шварц. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Препр. № 121. 2003. http://math.nsc.ru/publishing/Preprints/pr121.pdf

[62] *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.

[63] *Леман Э.* Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.

[64] *Ломов А.А.* Программный комплекс вариационной идентификации и фильтрации "быстрыми" алгоритмами (работа, представленная на IX Конкурс прикладных работ молодых ученых Сибирского отделения АН СССР; диплом 1-й степени по направлению "Пакеты прикладных программ, математическое моделирование") // "Наука в Сибири". 19 мая 1989.

[65] *Ломов А.А.* Условия корректности линейных параметрических моделей // Препринт Института математики СО РАН. 1992. № 21. 30 с.

[66] *Ломов А.А.* Условия корректности линейных параметрических моделей (стационарный динамический случай) // Препринт Института математики СО РАН. 1992. № 27. 50 с.

[67] *Ломов А.А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Т. 28, Модели и методы оптимизации. С. 91-117. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.

[68] *Ломов А.А.* О предельном значении передаточной функции матричного линейного дифференциального уравнения на бесконечности // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 25-30.

[69] *Ломов А.А.* Статистические свойства орторегрессионных методов оценивания параметров и решений систем линейных разностных уравнений // Оптимизация. Управление. Интеллект: Тр. Российской ассоциации математического программирования. Иркутск, 1997. № 2. С. 40-51.

[70] *Ломов А.А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН ТСУ. 1997. № 3. С. 20-26.

[71] *Ломов А.А.* Параметрическая идентифицируемость линейных стохастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Труды Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'2000) Москва, 26-28 сентября 2000 г. С. 1244-1251.

[72] *Ломов А.А.* Параметрическая идентифицируемость линейных стохастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Известия РАН ТСУ. 2002. № 2. С. 53-58.

[73] *Ломов А.А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 261-266.

[74] *Ломов А.А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60-66.

[75] *Ломов А.А.* О статистических свойствах оценок параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Труды III Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'04. Москва, 28-30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 209-224.

[76] *Ломов А.А.* Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // [Электронный ресурс]:

Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 1-86: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/lomov.pdf

[77] *Ломов А.А.* Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 39-47.

[78] *Ломов А.А.* Орторегрессионные оценки параметров систем линейных разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 3(23). С. 102-119.

[79] *Ломов А.А.* Задача отделения трендов в линейных системах // Труды V Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'06. Москва, 30 января - 2 февраля 2006 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. С. 1980-2009.

[80] *Ломов А.А.* Суммарные системы: приложения, построение, управляемость // Труды X Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» им. Е. С. Пятницкого (3–6 июня 2008 г.), Москва, ИПУ РАН. https://docs.google.com/viewer?url=http://www.stab10.ru/08/documents/L-O/Lomov.pdf

[81] *Ломов А.А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами // Автоматика и телемеханика. 2008. №7. С. 29-36.

[82] *Ломов А.А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами (II) // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 82-93.

[83] *Ломов А.А.* Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // Известия РАН ТСУ. 2009. № 1. С. 25-37.

[84] *Ломов А.А.* О количественном априорном показателе идентифицируемости параметров линейной системы // Труды VIII Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'09. Москва, 26-30 янв. 2009 г. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 479-491.

[85] *Ломов А.А.* Априорные оценки погрешности идентификации коэффициентов линейных ОРУ // Материалы Международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии». Улан-Удэ, 24-28 августа 2009 г. С. 236-242.

[86] *Ломов А.А.* Управляемость суммарных линейных систем // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII. № 2(42). С. 79-84.

[87] *Ломов А.А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81-103.

[88] *Ломов А.А.* О количественных априорных показателях идентифицируемости коэффициентов линейных динамических систем // Известия РАН ТСУ. 2011. № 1. С. 3-15.

[89] *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.

[90] *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. СПб.: 1900.

[91] *Марков А.А.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

[92] *Микусинский Я.* Операторное исчисление. М.: Изд.-во иностр. литературы, 1956.

[93] *Николаев Ю.А.* Параметрическая идентифицируемость линейных динамических систем. Детерминированный и стохастический аспекты // ДАН СССР. 1978. Т. 43. № 5. С. 1158-1160.

[94] *Норкин К.Б.* Поисковые методы настройки управляемых моделей в задачах настройки параметров объектов // Автоматика и телемеханика. 1968. № 11. С. 61-67.

[95] *Орлов Ю.Ф.* Структурная идентификация многомерного объекта // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 567-569.

[96] *Острем К., Болин Т.* Цифровая идентификация линейных динамических систем на основе данных о нормальном режиме работы // Теория самонастраивающихся систем управления: Труды II Международного конгресса IFAC. М.: Наука, 1969. С. 99-116.

[97] *Параев Ю.И.* Алгебраические методы в теории линейных систем управления. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.

[98] *Перельман И.И.* Методы состоятельного оценивания параметров линейных динамических объектов и проблематичность их реализации на конечных выборках // Автоматика и телемеханика. 1981. № 3. С. 49-55.

[99] *Перельман И.И.* Оперативная идентификация систем управления. М.: Энергоиздат, 1982.

[100] *Петров Б.Н., Теряев Е.Д., Шамриков Б.М.* Условия параметрической идентифицируемости управляемых обектов в разомкнутых и замкнутых автоматических системах // Известия АН СССР (Техническая кибернетика). 1977. № 2. С. 160-175.

[101] *Позняк А.С., Тихонов С.Н.* Сильная состоятельность рекуррентных нелинейных алгоритмов оценивания параметров линейных разностных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1990. № 6. С. 90-101.

[102] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[103] Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды 15 межд. семинара (Пермь, июнь 1992) / под ред. Золотарева В.М. и др. М.: ТВП (теория вероятностей и применения), 1993.

[104] *Пушков С.Г.* Конечномерные реализации импульсной характеристики // Изв. РАН ТСУ. 2002. № 3. С. 5-11.

[105] *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968.

[106] *Рогов С.Н., Соболев. Л.Г., Хруцкий О.В.* О некоторых методах сглаживания и идентификации экспериментальных трендов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 134-145.

[107] *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981.

[108] *Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э.* Характеристический признак реализации нестационарной дифференциальной системы в банаховом пространстве // ДАН. 2011. Т. 438. № 3. С. 323-325.

[109] *Рутман Р.С., Эпельман М.С.* Параметрическая инвариантность линейных динамических систем // ДАН СССР. 1964. Т. 159. № 4. С. 764-766.

[110] *Сильвестров А.Н., Чинаев П.И.* Идентификация и оптимизация автоматических систем. М.: "Энергоатомиздат", 1987.

[111] *Смагина Е.М.* Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. Томск: ТГУ, 1990.

[112] *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Ленинград: ЛГУ, 1981.

[113] Современные методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.

[114] Справочник по теории автоматического управления / Под. ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.

[115] *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных систем управления. М.: Наука, 1985.

[116] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

[117] *Фишер Ф.* Проблема идентификации в эконометрии. М.: Статистика, 1978.

[118] *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

[119] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1985.

[120] *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.

[121] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипосидов. М.: Наука, 1988.

[122] *Черноруцкий И.Г.* Методы оптимизации в теории управления. СПб.: Питер, 2004.

[123] *Шейнин О.Б.* Математическая обработка наблюдений у А.А. Маркова // Историко-математические исследования. 2009. Вып. 13 (48). С. 110-127.

[124] *Шварц Л.* Анализ I, II. М.: Мир, 1972.

[125] *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.

[126] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

[127] *Abatzoglu T.J., Mendel J.M.* Constrained Total Least Squares // Proc. 1987 IEEE ICASSP (Dallas). 1987. P. 1485-1488.

[128] *Abatzoglu T.J., Mendel J.M., Harada G.A.* The Constrained Total Least Squares Technique and its Applications to Harmonic Superresolution // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. V. SP-39. P. 1070-1087.

[129] *Adcock R.J.* Note on the method of least squares // The Analyst. 1877. V. 4. P. 183-184.

[130] *Adcock R.J.* A problem in least squares // The Analyst. 1878. V. 5. P. 53-54.

[131] *Aguero J.C., Graham G.C.* Identifiability of errors in variables dynamic systems // 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006. P. 196-200.

[132] *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Houston, Texas: Rice University, 2005.

[133] *Aoki M., Yue P.C.* On the Certain Convergence Questions in System Identification // SIAM Journal of Control. 1970. V. 8. No. 2. P. 239-256.

[134] *Aoki M., Yue P.C.* On A Priori Error Estimates of Some Identification Methods // IEEE Trans. on Automat. Control. 1970. V. AC-15. P. 541-548.

[135] *Aoki M.* Introduction to optimization techniques : fundamentals and applications of nonlinear programming. NY: McMillan publishing company, 1971. *Пер.*: *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977.

[136] *Åstrom K.J., Bohlin T., Wensmark S.* Automatic Construction of Linear Stochastic Dynamic Models for Stationary Industrial Processes. Tech. Rep. TR-18-150. IBM Nordic Lab. Lidingo, Sweden, 1965.

[137] *Åstrom K.J., Wittenmark B.* Adaptive Control. 2nd ed. Mineola,NY: Dover Publ. Inc. 2008.

[138] *Bellman R.* On the separation of exponentials // Boll. Unione Matem. Ital. 1960. Ser. III. V. 15. No. 1. P. 38-39.

[139] *Birkhoff G., MacLane S.* A Survey of Modern Algebra. New York: MacMillan, 1965.

[140] *Bjorck A.* Numerical methods for least squares problems. SIAM, Philadelphia, 1996.

[141] *Blomberg H., Ylinen R.* Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems. London: Academic Press, 1983.

[142] *Bohlin T.* On the Problem of Ambiguities in Maximum Likelihood Identification // Automatica. 1971. V. 7. P. 137-146.

[143] *Brockett R.* Finite Dimensional Linear Systems. New York: Wiley, 1970.

[144] *Chen H.-F.* Recursive Identification of EIV ARMA Processes // Proceedings of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea, July 6-11, 2008. P. 1366-1371.

[145] *Cheng C.-L., Van Ness J.W.* Statistical Regression with Measurement Error // Kendall's Library of Statistics, 6, Arnold, London. 1999.

[146] The Control Handbook / Levine W.S., ed. CRC Press, Inc., Boca Raton: 1996.

[147] *Cox M.G., Joyce H.E., Mason J.* Approximation by Sums of Exponentials to Decay Functions Using Piecewise Linear Models // Approximation Theory IX. Vol. 1. Ed. by Chui C.K., Schumaker L.L. Nashville, London:Vanderbilt University Press, 1998. pp. 89-96.

[148] *Crampin E.J.* System identification challenges from systems biology // 4th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006. P 81-93.

[149] *Dupuis P., Sels T., Driesen T., Belmans R.* Exponential Parameters Measurement Using a Modified Prony Method // Proc. Instrumentation and Measurement Technology Conference. Como, Italy, 18–20 May. 2004. P. 1590-1594.

[150] *Durbin J.* The Fitting of Time Series Models // Rev. Inst. Int. Stat. 1960. V 28. P. 233-243.

[151] *Egorshin A.O., Lomov A.A.* Variational Identification and Filtration via Fast Algorithms // Prep.8-th IFAC/IFORS Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Beijing, China, Aug.1988. Pergamon Press, 1988. V. 2. P. 665-671.

[152] *Fellman J.* On the effect of "nuisance" parameters in linear models // Sankhya. The Indian Jornal of Statistics. 1976. V. 38. Ser. A. Pt. 2. P. 197-200.

[153] *Friedlander B., Kailath T., Ljung L.* Scattering Theory and Linear Least Squares Estimation — II: Discrete Time Problems // J. Franklin Inst. 1976. V. 301. No. 1-2. P. 71-82.

[154] *Fuller W.A.* Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987.

[155] *Gallant A.R.* Nonlinear statistical models. New York: Wiley, 1986.

[156] *Gevers M.* System Identification without Lennart Ljung: what would have been different? // Workshop on System Identification in honor of Lennart Ljung. K. U. Leuven, 13 october 2004. http://www.inma.ucl.ac.be/publi/353406.pdf

[157] *Gillard J.* An Overview of Linear Structural Models in Errors in Variables Regression // REVSTAT — Statistical Journal. 2010. V. 8. No. 1. P. 57–80.

[158] *Gleser L.J.* Estimation in a multivariate "errors in variables" regression model: large sample results // The Annals of Statistics. 1981. V. 9. No. 1. P. 24-44.

[159] *Gleser L.J.* Improvements of the Naive Approach to Estimation in Nonlinear Errors-in-Variables Regression Models // Contemporary Mathematics. V. 112. Statistical Analysis of Measurement Error Models and Applications. Providence, Rhode Island: AMS, 1990. P. 99-114.

[160] *Glover K., Willems J.C.* Parameterizations of Linear Dynamical Systems: Canonical Forms and Identifiability // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. V. AC-19. No. 6. P. 640-646.

[161] *Glover K.* All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^{∞}-error bounds // Int. J. Control. 1984. V. 39. No. 6. P. 1115-1193.

[162] *Golub G.H., Van Loan C.F.* An analysis of the total least squares problem //SIAM J. Numer. Anal., v. 17, pp. 883-893, 1980.

[163] *Guo L., Tomizuka M.* Parameter identification with derivative shift operator parametrization // Automatica. 1999. V. 35. P. 1073-1080.

[164] *Hauer J.F.* Initial Results in Prony Analysis of Power System Response Signals // EEE Trans. on Power Systems. 1990. V. 5. No. 1. P. 80-89.

[165] *Hodges S.D., Moore P.G.* Data uncertainties and least squares regression // Applied Statistics, v. 21, 1972, pp. 185-195.

[166] *Householder A.S.* On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival cerves // Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee.

[167] *Kahn M., Mackisack M.S., Osborne M.R., Smyth G.K.* On the consistency of Prony's method and related algorithms // J. Comput. Graph. Statist. 1992. V. 1. P. 329-349.

[168] *Kailath T.* Some Chandrasekhar-type algorithms for quadratic regulators // Proc. IEEE Conference on Detection and Control, New Orleans, LA, Dec. 1972. P. 219-223.

[169] *Kailath T.* Some new algorithms for recursive estimation in constant linear systems // IEEE Trans. Information Theory. 1973. V. IT-19. P. 750-760.

[170] *Kailath T.* Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[171] *Kalman R.E.* Canonical structure of linear dynamical systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. V. 48. 1962. Pp. 596-600.

[172] *Kalman R.E.* Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // SIAM Journal of Control. 1963. Ser. A. V. 1. No. 2. P. 152-192.

[173] *Kalman R.E.* Algebraic Structure of Linear Dynamical Systems, I. The Module of Σ // Mathematics: Proc. Nat. Acad. Sci. USA. V. 54. 1965. P. 1503-1508.

[174] *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in mathematical system theory. New York; San Francisco(Ca); St. Louis(Mo), 1969. Пер.: *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем (пер. с англ. Э.Л. Наппельбаума под ред. Я.З. Цыпкина). М.: "Едиториал УРСС", 2004.

[175] *Kalman R.E.* Identifiability and Modelling in Econometrics // Developments in Statistics / P.R. Krishnaiah, ed. New York: Academic Press, 1983. V. 4.

[176] *Kendall M.* Regression. Structure and functional relationship (I,II) // Biometrica. 1951. V. 38. P. 11-25. 1952. V. 39. P. 96-108.

[177] *Koopmans T.C.* Linear Regression Analysis of Economic Time Series. DeErven F. Bohn, N.V. Haarlem, The Netherlands. 1937.

[178] *Koopmans T.C., Reiersøl O.* The Identification of Structural Characteristics // Annals of Mathematical Statistics, 21, 1950.

[179] *Koopmans T.C., Rubin H., Leipnik R.B.* Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics // Statistical Inference in Dynamic Economic Models. Cowles Commission Monograph 10, New York, John Wiley, 1950.

[180] *Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S.* Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model // Journal of Statistical Planning and Inference. 2005. V. 133. No. 2. P. 315-358.

[181] *Kummel C.H.* Reduction of observed equations which contain more then one observed quantity // The Analyst. 1879. V. 6. P. 97-105.

[182] *Kundu D.* Estimating the parameters of undamped exponential signals // Technometrics. 1993. V. 35. P. 215-218.

[183] *Kung S.Y., Hu Y.H.* Improved Pisarenko's sinusoidal spectrum estimate via SVD subspace approximation methods // 21st IEEE Conference on Decision and Control. 1982. V. 21. P. 1312-1314.

[184] *Lanczos C.* Applied analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1956. Пер.: *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: ФМЛ, 1961.

[185] *Lecourtier Y., Walter E.* Comments on "On parameter and structural identifiability : non unique observability/reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities and new definitions"// IEEE Trans. on Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 800-801.

[186] *Lee R.C.K.* Optimal Estimation, Identification and Control. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1964.

[187] *Lemmerling Ph., Moor De B., VanHuffel S.* On the Equivalence of Constrained Total Least Squares and Structured Total Least Squares // IEEE Trans. on Signal Processing. 1996. V. 44. No. 11. P. 2908-2911.

[188] *Levin M.J.* Estimation of a system pulse transfer function in the presence of noise // IEEE Trans. Automatic Contr. 1964. V. AC-9. P. 229-235.

[189] *Levinson N.* The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. 1946.V. 25. P. 261-278.

[190] *Lindquist A.* Optimal Filtering of Continuous-Time Stationary Processes by Means of the Backward Innovation Process // SIAM J. Control. 1974. V. 12. No. 4. P 747-754.

[191] *Lindquist A.* Linear Least Squares Estimation of Discrete-Time Stationary Processes by Means of the Backward Innovations // Proc. Internat. Symp. on Control Theory, Numer. Methods, Computer Syst. Mod. Rocquencourt, 1974. Lecture Notes Econ. Math. Syst. 1975. V. 107. P. 44-63.

[192] *Ljung L., Kailath T., Friedlander B.* Scattering theory and linear least squares estimation — I: Continuous time problems // Proc. IEEE. Special Issue on Resent Trends in System Theory. 1976. Пер.: *Юнг, Кайлат, Фридландер.* Теория рассеяния и линейное оценивание по методу наименьших квадратов. Часть I. Задача в непрерывном времени // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 1. С. 166-176.

[193] *Ljung L.* Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. V. AC-24. P. 36-50.

[194] *Ljung L., Soderstrom T.* Theory and Practice of Recursive Identification. Cambridge: MIT Press, 1983.

[195] *Ljung L.* System Identification. London: Prentice-Hall, 1987. Пер.: *Льюнг Л. С.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991.

[196] *Ljung L.* Development of System Identification // Proceedings of the 13th World Congress of IFAC, volume G, pages 141-146, San Francisco, California, July 1996. ftp://ftp.control.isy.liu.se/pub/Reports/1996/1910.ps.Z

[197] *Lomov A.A.* The program of variational identification and filtration using fast algorithms // Abstracts. IMACS/IFAC International Workshop on Methods and Software for Automatic Control Systems, Irkutsk, USSR, Sept. 3-5, 1991. P. 57-58.

[198] *Lomov A.A.* Correct Parametrizations of Linear Models // Siberian Advances in Mathematics. 1994. V. 4. P. 95-113.

[199] *Lomov A.A.* Identifiability of ARMAX systems with short operating records // Proc. II Symp. Automat. Control (CIMAF'99). La Habana, 1999. P. 207-221.

[200] *Lomov A.A.* Stochastic Linear Systems Classification Based on Complexity of Identifiability Conditions // La Habana, III Symposio de Control Automatico, 2001. P. 257-265.

[201] *Lomov A.A.* Identifiability of Time-Invariant Linear Models by Transient Signal Observations // Proceedings of the IASTED International Conference on Automation, Control, and Information Technology. Anaheim, Calgary, Zurich. Acta Press, 2002. P. 507-512.

[202] *Lomov A.A.* Orthoregressive estimates for the parameters of systems of linear difference equations // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. V. 1. No. 1. P. 59-76.

[203] *Lomov A.A.* Terms of uniqueness in the inverse problems for disjunctive dynamical systems // 2nd International School-Seminar "Nonlinear Analysis and Extremal Problems". Irkutsk, June 28 - July 4 , 2010.

[204] *Lui K.W.-K., So H.-Ch.* Improved Variant of Pisarenko Harmonic Decomposition for Single Sinusoidal Frequency Estimation // IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences 2007 E90-A(11):2604-2607.

[205] *Mackisack M.S., Osborne M.R., Smyth G.K.* A modified Prony algorithm for estimating sinusoidal frequencies // J. Statist. Comput. Simul. 1994. V. 49. P. 111-124.

[206] *Maine R.E., Iliff K.W.* Formulation and Implementation of a Practical Algorithm for Parameter Estimation with Process and Measurement Noise // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1981. V. 41. No. 3. P. 558-579.

[207] *Markovsky I., Van Huffel S., Kukush A.* On the computation of the multivariate structured total least squares estimator // Numer. Linear Algebra Appl. 2004. V. 11. P. 591-608.

[208] *Markovsky I., Van Huffel S., Pintelon R.* Block-Toeplitz/Hankel Structured Total Least Squares // SIAM. J. Matrix Anal. & Appl. 2005. V. 26. Issue 4. P. 1083-1099.

[209] *Markovsky I., Sima D.M., Van Huffel S.* Total Least Squares Methods // Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. 2010. V. 2. P. 212-217.

[210] *Marple S.L.* Digital spectral analysis: with applications. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA. 1986. Пер.: *Марпл С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.

[211] *Martsynyuk Yu. V.* New multivariate central limit theorems in linear structural and functional error-in-variables models // Electronic Journal of Statistics. 2007. V. 1. P. 347-380.

[212] *Mathew G., Dasgupta S., Reddy V.U.* Improved Newton-type algorithm for adaptive implementation of Pisarenko's harmonic retrieval method and its convergence analysis // IEEE transactions on signal processing. 1994. V. 42. No. 2. P. 434-437.

[213] *Mirsky L.* Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms // Quart. J. Math. Oxford. 1960. V. 11. P. 50-59.

[214] *Moor De B.* Structured total least squares and L_2 approximation problems // Linear Algebra Appl. 1993. V. 188-189. P. 163-207.

[215] *Neyman J.* Remarks on a Paper by E.C. Rhodes // J. Royal Statistical Society. 1937. V. 100. P. 50-57.

[216] *Nguyen V. V., Wood E.F.* Review and Unification of Linear Identifiability Concepts // SIAM Review. 1982. V. 24. P. 34-51.

[217] *Ninness B., Goodwin G.C.* Estimation of Model Quality // Automatica. 1995. V. 31. No. 12. P. 1771-1797.

[218] *Osborne M.R.* A class of nonlinear regression problems // Data Representation / Eds. R. S. Anderssen and M. R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.

[219] *Osborne M.R.* Some special nonlinear least squares problems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12. P. 571-592.

[220] *Osborne M.R., Smyth G.K.* A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1991. V. 12. P. 362-382.

[221] *Osborne M.R., Smyth G.K.* A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting // SIAM Journal of Scientific Computing. 1995. V. 16. P. 119-138.

[222] *Ouibrahim H.* Prony, Pisarenko, and the matrix pensil: a unified presentation // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1989. V. 37. P. 133-134.

[223] *Paris Q.* Robust Estimators of Errors-In-Variables Models // University of California, Davis. Working Paper No. 04-007. 2004. http://www.escholarship.org/uc/item/7x56z5rs.

[224] *Pearson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space // Phil. Mag. 1901. VI. No. 2. P. 559–572.

[225] *Pisarenko V.F.* On the Estimation of Spectra by Means of Non-linear Functions of the Covariance Matrix // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1972. V. 28. P. 511-531.

[226] *Pisarenko V.F.* The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1973. V. 33. P. 347-366.

[227] *Pollock D.S.G.* Trend estimation and de-trending via rational square-wave filters // Journal of Econometrics. 2000. V. 99. No. 2. P. 317-334.

[228] *Popov V.M.* Some Properties of the Control Systems with Irreducible Matrix-Transfer Function // Lecture Notes in Mathematics. V. 144. Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems, II. P. 169-180 / Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[229] *Pratzel-Wolters D.* Canonical Forms for Linear Systems // Linear Algebra and Its Applications. 1983. V. 50. P. 437-473.

[230] *de Prony, Baron Gaspard Riche.* Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // Journal de l'École Polytechnique. 1795. V. 1. Cahier 22, 24-76.

[231] Prony Estimation // StatSci.org (http://www.statsci.org/other/prony.html). 2000.

[232] *Redheffer R.* On the relation of transmission-line theory to scattering and transfer // J. Math. Phys. 1962. V. XLI. P. 1-41.

[233] *Reiersøl O.* Identifiability of a Linear Relation between Variables which are Subject to Error // Econometrica. 1950. V. 18. P. 375-389.

[234] *Rice J.A., Rosenblatt M.* On frequency estimation // Biometrika. 1988. V. 75. P. 477-484.

[235] *Roorda B.* Algorithms for Global Total Least Squares Modelling of Finite Multivariable Time Series // Automatica. 1995. V. 31. No. 3. P. 391-404.

[236] *Roorda B., Heij C.* Global total least squares modelling of multivariable time series // IEEE Trans. on AC 1995. V. AC-40. P. 50-63.

[237] *Rosenbrock H.* State-Space and Multivariable Theory. New York: Wiley, 1970.

[238] *Rothenberg T.J.* Identification in Parametric Models // Econometrica. 1971. V. 39. No. 3. P. 577–591.

[239] *Schneeweiss H., Augustin T.* Some Recent Advances in Measurement Error Models and Methods // Munchen Institut fur Statistik. Paper 452. 2005.

[240] *Sluis van der A., Veltkamp G.* Restoring rank and consistency by orthogonal projection // Linear Algebra Appl. 1979. V. 28. P. 257-278.

[241] *Smyth G.K., Hawkins D.M.* Robust Frequency Estimation Using Elemental Sets // Computing Science and Statistics. 1997. V. 28. P. 659-662.

[242] *Smyth G.K.* Employing Symmetry Constraints for Improved Frequency Estimation by Eigenanalysis Methods // Technometrics. Aug. 2000. V. 42. P. 277-289.

[243] *Söderström T.* On the Uniqueness of Maximum Likelihood Identification // Automatica. 1975. V. 11. P. 193–197.

[244] *Söderström T., Ljung L., Gustavsson I.* Identifiability Conditions for Linear Multivariable Systems Operating Under Feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1976. V. AC-21. No. 6. P. 837-840.

[245] *Söderström T.* Errors-in-variables methods in system identification // 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006. P. 1-19.

[246] *Song T.L., Speyer J.L.* The Modified Gain Extended Kalman Filter and Parameter Identification in Linear Systems // Automatica. 1986. V. 22. No. 1. P. 59-75.

[247] *Sprent P.* Some History of Functional Relationships // Contemporary Mathematics. V. 112. Statistical Analysis of Measurement Error Models and Applications. Providence, Rhode Island: AMS, 1990. P. 3-15.

[248] *Stewart G. W.* On the invariance of perturbed null vectors under column scaling // Numer. Math. 1984. V. 44. P. 61-65.

[249] *Stewart G. W.* Perturbation Theory and Least Squares with Errors in the Variables // Contemporary Mathematics. V. 112. Statistical Analysis of Measurement Error Models and Applications. Providence, Rhode Island: AMS, 1990. P. 171-181.

[250] *Vajda S.* Further Comments on "On Parameter and Structural Identifiability: Nonunique Observability/Reconstructibility for Identifiable Systems, Other Ambiguities, and New Definitions"// IEEE Trans. on Automat. Control. 1982. V. AC-27. P. 1136-1137.

[251] *Vajda S., Rabitz H.* Identifiability and Distinguishability of First-Order Reaction Systems // J. Phys. Chem. 1988. V. 92. P. 701-707.

[252] *Vajda S., Rabitz H.* State Isomorphism Approach to Global Identifiability of Nonlinear Systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1989. V. AC-34. P. 220-223.

[253] *Vajda S., Godfrey K., Rabitz H.* Similarity Transformation Approach to Identifiability Analysis of Nonlinear Compartmental Models // Mathematical Biosciences. 1989. V. 93. P. 217–248.

[254] *Vajda S., Rabitz H.* Identifiability and Distinguishability of General Reaction Systems // J . Phys. Chem. 1994. V. 98. P. 5265-5271.

[255] *Valyi I.* Ellipsoidal approximations in problems of control // Modelling and Adaptive Control, p. 361-384. Berlin: Springer, 1988.

[256] *Vanecek A.* Models: Equivalences, Uses, Extensions // Trends and Progress in System Identification (IFAC Series for Graduates, Research Workers & Practising Engineers) / Ed. P. Eykhoff. Oxford, New York: Pergamon Press, 1981. V. 1. P. 29-66.

[257] *Van Huffel S., Vandewalle J.* Analysis and properties of the generalized total least squares problem $AX \approx B$ when some or all columns in A are subject to error // SIAM J. Matrix Anal. 1989. V. 10. No. 3. P. 294-315.

[258] *Van Huffel S., Vandewalle J.* The total least squares problem. SIAM, Philadelphia, 1991.

[259] *Van Overschee P., De Moor B.* Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[260] *Wald A.* Asymptotic Properties of the Maximum-Likelihood Estimate of an Unknown Parameter of a Discrete Stochastic Process // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19. P. 40-46.

[261] *Wald A.* Note on the consistency of the maximum likelihood estimate // Ann. Math. Statist. 1949. V. 22. P. 595-601.

[262] *Walter E., Lecourtier Y.* Unidentifiable Compartmental Models: What to Do? // Mathematical Biosciences. 1981. V. 56. P. 1-25.

[263] *Walter E.* Identifiability of State Space Models. New York: Springer-Verlag, 1982.

[264] *Walter E., Lecourtier Y., Happel J.* On the structural output distinguishability of parametric models, and its relations with structural identifiability // IEEE Transactions on Automatic Control. 1984. V. 29. Issue 1. P. 56-57.

[265] *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications. NDRC Report to the Services 370, February 1, 1942. Cambridge: MIT Press, 1949.

[266] *Wilkinson J.H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965. Пер.: *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

[267] *Wolovich W.A.* The Determination of State-Space Representations for Linear Multivariable Systems // Automatica. 1973. V. 9. P. 97-106.

[268] *Wolovich W.A.* Linear multivariable systems. New York; Berlin: Springer-Verl., 1974.

[269] *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. New York: Springer-Verlag, 1979. Пер.: *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.

[270] *Yegorshin A.O.* Orthogonalization, factorization, and identification as to the theory of recursive equation in linear algebra // Siberian Electronic Mathematical Reports (http://semr.math.nsc.ru). 2007. V. 4. P. 482-503.

[271] *Zadeh L.A., Desoer C.A.* Linear System Theory, the State Space Approach. New York: McGraw-Hill, 1963. Пер.: Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.