На правах рукописи

МАЛЫШЕВ АНТОН ВАЛЕНТИНОВИЧ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Стрекаловский Александр Сергеевич.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Измаилов Алексей Феридович;** доктор физико-математических наук **Лакеев Анатолий Валентинович.**
Ведущая организация:	**Институт математики и механики УрО РАН** (г. Екатеринбург).

Защита состоится **14 июня 2011 г.** в **13 ч. 30 мин.** на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 при Учреждении Российской академии наук Институте динамики систем и теории управления СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИДСТУ СО РАН www.idstu.irk.ru.

Автореферат разослан **13 мая 2011 г.**

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. А.А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию свойств и разработке численных методов решения задач двухуровневой оптимизации или иерархических игр двух лиц.

На протяжении последних десятилетий иерархические задачи оптимизации все больше привлекают внимание специалистов. Такие задачи характеризуются неравноправным положением участников (игроков) и, как правило, возникают при моделировании сложноорганизованных систем управления (социальных, экономических, эколого-экономических и др.)[1]. Неизбежность возникновения иерархической структуры в «достаточно сложных» системах подчеркивал акад. Н.Н. Моисеев в своих работах по теории оптимальных систем[2]. В частности, задачи двухуровневой оптимизации соответствуют двухуровневой иерархии управления. Уже в таких иерархических задачах присутствует неопределенность понятия решения, связанная с возможной неоднозначностью поведения игрока нижнего уровня. Для снятия этой неопределенности общепринятыми являются два подхода: оптимистический (кооперативный) и гарантированный (пессимистический).

Актуальность исследования двухуровневых задач оптимизации объясняется, прежде всего, широким спектром важных практических приложений в различных областях человеческой деятельности, например, при решении задач проектирования дорожных сетей, выбора тарифов телекоммуникационным оператором, определения размеров квот и дотаций производителям сельхозпродукции и т.д.

Впервые задачи двухуровневой оптимизации, насколько известно, были рассмотрены H.F. von Stackelberg[3] при изучении моделей рыночной экономики. В настоящее время исследованию различных классов задач двухуровневой оптимизации посвящено большое количество работ, из которых можно выделить две монографии J.F. Bard[4] и S. Dempe[5], ставшие уже классическими в этой области. В них рассматриваются вопросы существования и устойчивости решений двухуровневых задач, приводятся различные необходимые и достаточные условия оптимальности, предлагаются подходы к решению таких задач и описаны некоторые практические приложения.

В России иерархические задачи исследовались с точки зрения поиска гарантированных решений, начиная с 70-х годов XX века, группой ученых под

[1]Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.

[2]Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.

[3]Stackelberg H.F. Marktform und Gleichgewicht. Berlin (Germany): Springer-Verlag, 1934.

[4]Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Acad. Publ., 1998.

[5]Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Acad. Publ., 2002.

руководством Ю.Б. Гермейера[6] (В.В. Федоров, Д.А. Молодцов, И.А. Ватель, Ф.И. Ерешко, А.Ф. Кононенко, В.А. Горелик и др.). Пионерами исследования иерархических задач оптимизации с дискретными переменными в Сибирском отделении РАН были В.Т. Дементьев, В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, А.А. Колоколов и др.

Необходимо отметить, что в большинстве работ, посвященных разработке численных методов поиска решений в задачах двухуровневой оптимизации, предлагаются методы поиска оптимистических решений (что является более простой задачей), и только в последнее время стали появляться работы, посвященные поиску гарантированных решений[7], где численно решаются лишь иллюстративные примеры очень небольшой размерности.

При поиске оптимистического решения задача двухуровневой оптимизации оказывается эквивалентной (в смысле совпадения глобальных решений) невыпуклой задаче оптимизации, в которой может существовать множество локальных решений, отличных от глобального по значению целевой функции. Поэтому построение метода для нахождения оптимистического решения задачи двухуровневой оптимизации, как правило, начинается с ее редукции к задаче невыпуклой оптимизации или серии таких задач, для решения которых используется один из алгоритмов глобальной оптимизации. При этом размерность решаемых задач обычно является небольшой.

Таким образом, построение эффективных методов и алгоритмов поиска оптимистических решений задач двухуровневой оптимизации высокой размерности является актуальной задачей исследования операций, а разработка эффективных методов поиска гарантированных решений задач двухуровневой оптимизации — новым моментом в современной теории исследования операций.

Целью диссертационной работы является разработка и обоснование эффективных методов поиска оптимистических и гарантированных решений некоторых классов двухуровневых задач.

Предмет и объект исследования. Объектом исследования являются квадратично-линейные задачи двухуровневой оптимизации (с квадратичной целевой функцией на верхнем уровне и линейной — на нижнем) с линейными ограничениями. Предмет исследования — построение эффективных методов поиска оптимистических и гарантированных решений в таких задачах.

Методы исследования. В диссертации поиск оптимистических решений разбивается на два этапа:

[6] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

[7] Tsoukalas A., Wiesemann W., Rustem B. Global Optimization of Pessimistic Bi-Level Problems // Lectures on global optimization / Ed. by P.M. Pardalos, T.F. Coleman. Toronto (Canada), 2009. Vol. 55. P. 215–243.

— сначала осуществляется редукция исходной двухуровневой задачи к эквивалентной ей в определенном смысле серии невыпуклых одноуровневых задач оптимизации;

— затем редуцированные задачи исследуются посредством аппарата выпуклого анализа, современной теории экстремума и методов оптимизации, а также теории глобального поиска, предложенной А.С. Стрекаловским[8].

При поиске гарантированного решения предварительно производится редукция исследуемой двухуровневой задачи к серии задач поиска оптимистических решений в двухуровневых задачах специального вида, взаимосвязи которых с исходной задачей обосновываются. Полученные задачи с оптимистическим решением затем исследуются по описанной выше методике.

Верификация теоретических результатов осуществляется с помощью вычислительных экспериментов.

Научная новизна. Для поиска оптимистических и гарантированных решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах (которые являются невыпуклыми структурами в неявной форме) предложен новый подход, включающий в себя редукцию исходной задачи к серии невыпуклых одноуровневых задач оптимизации с последующим применением теории глобального поиска для отыскания глобальных решений в полученных невыпуклых задачах.

Для квадратично-линейной двухуровневой задачи в оптимистической постановке получены следующие результаты:

а) построен и обоснован специальный метод локального поиска;

б) разработан алгоритм глобального поиска;

в) разработаны и протестированы программы, реализующие предложенные алгоритмы локального и глобального поиска, с помощью которых удалось решить тестовые задачи размерности до 300 (по совокупности переменных верхнего и нижнего уровня), что превосходит результаты тестирования известных методов и пакетов для решения таких задач.

Кроме того, для квадратично-линейной двухуровневой задачи в гарантированной постановке получены следующие результаты:

а) обосновано ее сведение к серии задач двухуровневой оптимизации специального вида в оптимистической постановке;

б) предложен и обоснован специальный метод локального поиска;

в) построен алгоритм глобального поиска;

г) разработан метод генерации тестовых двухуровневых задач произвольной размерности с известными локальными и глобальными гарантированными решениями;

---

[8]Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.

д) разработаны и протестированы программы, реализующие предложенные алгоритмы локального и глобального поиска, которые позволили решить тестовые задачи суммарной размерности до 105.

Отметим, что численный метод поиска гарантированных решений в задачах двухуровневой оптимизации (в которых допустимое множество задачи нижнего уровня зависит от стратегий игрока верхнего уровня) разработан впервые.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена строгостью математических доказательств, использованием апробированных научных методов и средств, полнотой и корректностью исходных посылок и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретические результаты диссертации, в частности редукция задачи поиска гарантированного решения квадратично-линейной задачи двухуровневой оптимизации к семейству задач двухуровневой оптимизации специального вида в оптимистической постановке, могут быть использованы при разработке других численных методов решения двухуровневых задач.

Предложенный в диссертации новый метод генерации тестовых двухуровневых задач с известными гарантированными решениями может быть использован для проверки работоспособности новых методов поиска гарантированных решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах.

Полученные в диссертации методы численного поиска оптимистических и гарантированных решений в задачах двухуровневой оптимизации ориентированы на решение задач повышенной размерности, возникающих на практике, в частности, при моделировании процессов финансового стимулирования производителей сельхозпродукции, проектирования дорожных сетей и др.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов по программам СО РАН: «Поиск глобальных решений в невыпуклых задачах исследования операций и оптимального управления» (№ гос. регистрации 01.2.007 08581) с 2007 г. по 2009 г., «Нелокальные методы в теории управления динамическими системами» (№ гос. регистрации 01201001345) в 2010 г., программа «Теория управления динамическими системами и методы их исследования», а также в рамках комплексного интеграционного проекта СО РАН 1.3 «Исследование задач двухуровневого и равновесного программирования» (2006–2008 гг.) и проекта РФФИ № 05-01-00110-а «Невыпуклые задачи оптимизации, исследования операций и оптимального управления» (2006–2007 гг.).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 05.13.01 в диссертации проведено исследование сложных оптимизационных задач, разработаны методы и специальное математическое и программное обеспечение для их решения (пп. 1, 4, 5 области исследований).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на IX школе-семинаре молодых ученых «Математическое моделирование и информационные технологии» (Иркутск–Ангасолка, 2007), ежегодных конференциях «Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий» в ИДСТУ СО РАН (Иркутск, 2007–2009), XIV Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск–Северобайкальск, 2008), Всероссийской конференции «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (Иркутск, 2009), IV Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2009), XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск–Байкал, 2010), II Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2010), VI Московской международной конференции по исследованию операций (Москва, 2010), XIV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011).

Результаты диссертации обсуждались на семинаре кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ, на семинаре отдела математического программирования ИММ УрО РАН и неоднократно на семинарах ИДСТУ СО РАН.

Публикации и личный вклад автора. По материалам диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата. В число указанных работ входят статьи [1–5], опубликованные в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Из совместных публикаций с А.С. Стрекаловским и А.В. Орловым на защиту выносятся только результаты, полученные автором лично. Постановка исследуемых в работе задач осуществлена А.С. Стрекаловским. А.В. Орлову принадлежит идея о применении последовательной минимизации по группам переменных при разработке алгоритмов локального поиска.

Полученные в диссертации свойства задач двухуровневой оптимизации, в том числе теорема о сведении задачи поиска гарантированного решения в квадратично-линейной задаче двухуровневой оптимизации к поиску оптимистических решений в серии задач, были получены автором самостоятельно.

Разработка и программная реализация новых методов поиска оптимистических и гарантированных решений в задачах двухуровневой оптимизации, а также построение нового метода генерации тестовых задач с известными гарантированными решениями осуществлялись автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 134 наименования. Общий объем диссертации составляет 129 страниц, из которых 115 страниц основного текста, включающего 5 рисунков и 15 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведены постановки различных задач двухуровневой оптимизации, обзор современного состояния научных исследований по теме диссертации, обоснована актуальность исследований, отражена научная новизна работы и приведена информация об апробации результатов.

Первая глава посвящена разработке, обоснованию, а также численному тестированию метода поиска оптимистических решений в квадратично-линейных задачах двухуровневой оптимизации.

В § 1.1 приведена постановка задачи. Далее осуществляется сведение исследуемой двухуровневой задачи к серии невыпуклых одноуровневых задач оптимизации. Пусть $x \in I\!R^m$, $y \in I\!R^n$ — векторы стратегий игроков верхнего и нижнего уровня, а их цели состоят в минимизации критериев $F(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle y, C_1 y\rangle + \langle c_1, y\rangle$ и $G(y) \stackrel{\triangle}{=} \langle d, y\rangle$ соответственно. Рассмотрим задачу двухуровневой оптимизации

$$\left.\begin{array}{c} F(x,y) \downarrow \min\limits_{x,y}, \\ (x,y) \in \{(x,y) \in I\!R^m \times I\!R^n \mid Ax + By \le a, \;\; x \ge 0\}, \\ y \in Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}\limits_{z}\{G(z) \mid \; z \in Y(x)\}, \\ Y(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in I\!R^n \mid A_1 x + B_1 y \le b, \;\; y \ge 0\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP}_o)$$

где $c \in I\!R^m$, $c_1, d \in I\!R^n$, $a \in I\!R^p$, $b \in I\!R^q$, A, B, A_1, B_1, C, C_1 — матрицы соответствующего размера. Матрицы C и C_1 являются неотрицательно определенными ($C \ge 0$, $C_1 \ge 0$).

В $(\mathcal{BP}_o)$ существенным предположением является кооперативность поведения игроков верхнего и нижнего уровня. Предполагается, что в случае неединственности решения задачи нижнего уровня при фиксированной стратегии игрока верхнего уровня игрок нижнего уровня выберет (из множества своих оптимальных стратегий) стратегию, наиболее благоприятствующую игроку верхнего уровня, что и отражено в требовании минимизации целевой функции игрока верхнего уровня по переменным обоих уровней. Поэтому постановка задачи $(\mathcal{BP}_o)$ называется оптимистической, а ее решение — оптимистическим (или кооперативным).

С помощью замены задачи нижнего уровня (или, другими словами, экстремального ограничения $y \in Y_*(x)$) ее необходимыми и достаточными условиями оптимальности типа Каруша–Куна–Таккера и с использованием метода штрафов задача $(\mathcal{BP}_o)$ сводится к μ-параметрическому семейству одноуровневых задач

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} F(x,y) + \mu h(x,y,v) \downarrow \min\limits_{x,y,v},\\ (x,y) \in Z \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y) \mid Ax + By \le a,\ \ A_1x + B_1y \le b,\\ x \ge 0,\ \ y \ge 0\},\\ v \in V = \{v \mid d + vB_1 \ge 0,\ \ v \ge 0\},\end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}(\mu))$$

где v — вектор множителей Лагранжа для задачи нижнего уровня, $h(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \langle d, y\rangle - \langle A_1x - b, v\rangle$ — невязка двойственности для задачи нижнего уровня, $\mu > 0$ — штрафной множитель.

Отметим, что целевая функция задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ при фиксированном значении параметра $\mu > 0$ невыпукла и может быть представлена в виде разности двух выпуклых функций, а допустимое множество выпукло. Таким образом, задача $(\mathcal{P}(\mu))$ является задачей d.c. минимизации[9]. Поиск глобальных решений в задаче $(\mathcal{P}(\mu))$ осуществляется с помощью теории глобального поиска, разработанной А.С. Стрекаловским. В соответствии с этой теорией одним из этапов алгоритма глобального поиска является алгоритм локального поиска, учитывающий специфику задачи, разработке которого посвящен § 1.2.

Заметим, что ограничения в задаче $(\mathcal{P}(\mu))$ накладываются на пару (x,y) и на переменную v отдельно, а целевая функция $\Phi(x,y,v)$ является выпуклой квадратичной по переменным x, y, линейной по переменной v и билинейной по x и v (будем называть такую функцию квадратично-билинейной). Эти факты используются в § 1.2 для построения алгоритма локального поиска в задаче $(\mathcal{P}(\mu))$. А именно, в случае квадратично-билинейной целевой функции адаптируется идея последовательной минимизации по группам разделенных переменных[10]. При фиксированном значении переменной v задача $(\mathcal{P}(\mu))$ становится выпуклой квадратичной задачей оптимизации по переменным x, y, а при фиксированном значении (x,y) — задачей линейного программирования (ЛП) по переменной v. Такие выпуклые задачи могут быть успешно решены с использованием классических методов оптимизации[11] и известных пакетов прикладных программ.

[9]Стрекаловский А.С. О минимизации разности двух выпуклых функций на допустимом множестве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, №3. С. 399–409.

[10]Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007.

[11]Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал-пресс, 2002.

Итак, пусть задана некоторая начальная точка $(x_0, y_0, v_0) \in I\!R^{m+n+q}$, которая не является, вообще говоря, допустимой в задаче $(\mathcal{P}(\mu))$. Тогда осуществляется следующая процедура локального поиска $(\rho_s > 0, s = 0, 1, ...)$, называемая *V-процедурой*:

Шаг 0. Положить $s := 0, \;\; v^s := v_0$.

Шаг 1. Найти приближенное $\dfrac{\rho_s}{2}$-решение (x^{s+1}, y^{s+1}) задачи

$$\Phi(x, y, v^s) \downarrow \min_{(x,y)}, \quad (x, y) \in Z. \qquad (\mathcal{QP}(v^s))$$

Шаг 2. Найти приближенное $\dfrac{\rho_s}{2}$-решение v^{s+1} задачи ЛП

$$\Phi(x^{s+1}, y^{s+1}, v) \downarrow \min_{v}, \quad v \in V. \qquad (\mathcal{LP}(x^{s+1}))$$

Шаг 3. Положить $s := s + 1$ и перейти на шаг 1. #

Отметим, что для начала работы V-процедуры не требуется задание тройки (x_0, y_0, v_0), достаточно лишь задать ее часть v_0, поэтому процедура и носит такое название.

В диссертационной работе доказана следующая теорема сходимости V-процедуры.

Теорема 1. *1. При условии* $\rho_s > 0, \; s = 0, 1, 2, ..., \sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s < +\infty$, *числовая последовательность* $\{\Phi(x^s, y^s, v^s)\}$ *значений функции* $\Phi(\cdot)$, *генерируемая V-процедурой, является сходящейся.*
2. В случае, если $(x^s, y^s, v^s) \to (\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$, *предел* $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) \leq \Phi(x, y, \hat{v}) \quad \forall (x, y) \in Z, \tag{1}$$

$$\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) \leq \Phi(\hat{x}, \hat{y}, v) \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Тройку $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$, удовлетворяющую (с точностью $\delta \geq 0$) неравенствам (1) и (2), будем называть *(приближенно δ-)критической точкой* задачи $(\mathcal{P}(\mu))$. Нетрудно видеть, что критическая точка $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$ является частично глобальным решением задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ по паре (x, y) при фиксированном значении $\hat{v}$ и по переменной v при фиксированных значениях $\hat{x}$, $\hat{y}$. В работе показано, что любое локальное решение задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ является критической точкой этой задачи.

В работе предложены и обоснованы критерии останова V-процедуры, выполнение которых после шага 2 позволяет получить приближенно критическую точку с заданной точностью. Например, при выполнении условия

$$\Phi(x^s, y^s, v^s) - \Phi(x^{s+1}, y^{s+1}, v^s) \leq \tau$$

тройка (x^s, y^s, v^s) является приближенным частично глобальным $\left(\tau + \dfrac{\rho_s}{2}\right)$-решением задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ по (x, y) и приближенным частично глобальным $\left(\tau + \dfrac{\rho_{s-1}}{2} + \dfrac{\rho_s}{2}\right)$-решением по переменной v.

Также в работе предложен и обоснован другой вариант алгоритма локального поиска — XY-процедура, в которой вспомогательные выпуклые задачи оптимизации решаются в обратном порядке. Заметим, что получаемые с помощью XY-процедуры критические точки в некоторых задачах оказываются лучше по значению целевой функции, чем критические точки, найденные с помощью V-процедуры.

В § 1.3 приведены результаты тестирования процедур локального поиска из § 1.2. Автором были составлены программы на C++, реализующие разработанные процедуры локального поиска. Для решения вспомогательных задач квадратичного программирования был запрограммирован метод особых точек[12], а для решения задач ЛП использовался пакет GLPK[13].

Для проверки эффективности процедур локального поиска с помощью известной методики[14] была сгенерирована серия задач небольшой размерности.

Результаты тестирования показали, что при значении штрафного параметра $\mu = 10$ уже с помощью процедур локального поиска удается находить глобальные решения в некоторых сгенерированных задачах. Это значение μ используется в дальнейшем при тестировании алгоритма глобального поиска.

Кроме того, осуществлялось тестирование процедур локального поиска с использованием различных стартовых точек. Для каждой процедуры была выбрана стартовая точка, с помощью которой локальным поиском не удалось найти глобальные решения в наибольшем количестве задач. Такие точки далее использовались для проверки эффективности алгоритма глобального поиска, тем самым создавались наихудшие условия для его работы.

В § 1.4 решение задачи $(\mathcal{P}(\mu))$ с использованием теории глобального поиска в задачах d.c. минимизации разбивается на следующие этапы: локальный поиск, доставляющий критическую точку, и процедуры выхода из текущей критической точки, основанные на условиях глобальной оптимальности[15]. Все этапы общей стратегии глобального поиска в задачах d.c. минимизации конкретизированы для задачи $(\mathcal{P}(\mu))$.

В § 1.5 осуществляется тестирование разработанного алгоритма глобаль-

[12]Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[13]URL: `http://www.gnu.org/software/glpk/`.

[14]Calamai P., Vicente L. Generating Linear and Linear-Quadratic Bilevel Programming Problems // SIAM Journal on Scientific Computing. 1993. Vol. 14, №4. P. 770–782.

[15]Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.

ного поиска на сериях случайно сгенерированных задач, включающих в себя задачи из § 1.3. Автором были написаны два варианта программы на языке C++, реализующей алгоритм глобального поиска из § 1.4. В первом случае на этапе локального поиска вспомогательные выпуклые задачи оптимизации решались с помощью подпрограмм, разработанных в § 1.3. Во втором случае использовался известный пакет Xpress[16].

В результате вычислительного эксперимента с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ за приемлемое время удалось найти (глобальные) оптимистические решения во всех тестовых задачах размерности до 50×50 ($m = 50,\ n = 50$) с использованием первого варианта программы глобального поиска и во всех тестовых задачах размерности до 150×150 — с использованием второго варианта. При этом не потребовалось увеличения выбранного в § 1.3 значения параметра штрафа $\mu = 10$.

Кроме того, было проведено численное сравнение алгоритма глобального поиска (АГП) с известным пакетом KNITRO[17], ориентированным, в частности, на задачи с комплементарными ограничениями, к которым сводятся двухуровневые задачи вида $(\mathcal{BP}_o)$. На серии тестовых задач алгоритм глобального поиска продемонстрировал преимущество над KNITRO как по количеству решенных задач (100% задач решено АГП, 61.1% — пакетом KNITRO), так и по времени решения задач (максимальное время решения задачи размерности до 30×30 с помощью АГП не превысило 5 минут, а решение одной из задач размерности 30×30 с помощью пакета KNITRO заняло более 2 часов).

Результаты главы 1 опубликованы в работах [1–3, 6].

Во **второй главе** диссертационной работы разработан новый метод численного поиска гарантированных решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах.

В § 2.1 приведена постановка пессимистической задачи двухуровневой оптимизации и исследована ее взаимосвязь с задачей поиска оптимистического решения вспомогательной двухуровневой задачи со штрафом на нижнем уровне[18].

Пусть $x \in I\!R^m$, $y \in I\!R^n$ — стратегии игроков верхнего и нижнего уровней, а их цели заключаются в минимизации функций $F(x,y) \triangleq \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, C_1 y\rangle + \langle c_1, y\rangle$ и $G(y) \triangleq \langle d, y\rangle$ соответственно. Рассмотрим следующую задачу двухуровневой оптимизации:

---

[16] URL: `http://www.fico.com/en/Products/DMTools/Pages/FICO-Xpress-Optimization-Suite.aspx`.

[17] URL: `http://www.ziena.com/knitro.htm`.

[18] Молодцов Д.А. О решении одного класса неантагонистических игр // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1976. Т. 16, №6. С. 1451–1456.

$$
\left.
\begin{array}{c}
W(x,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \sup\limits_{y}\{F(x,y) \mid y \in Y_*(x,\varepsilon)\} \downarrow \min\limits_{x}, \\
x \in X \overset{\triangle}{=} \{x \mid Ax \le a, \;\; x \ge 0\}, \\
Y_*(x,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \left\{ y \in Y(x) \;\middle|\; G(y) \le \inf\limits_{z}[G(z) \mid z \in Y(x)] + \varepsilon \right\},
\end{array}
\right\} \qquad (\mathcal{BP}_g(\varepsilon))
$$

где $Y(x) \overset{\triangle}{=} \{y \mid A_1 x + B_1 y \le b, \;\; y \ge 0\}$, $c \in R^m$, $c_1, d \in R^n$, $a \in R^p$, $b \in R^q$, а $Y_*(x,\varepsilon)$ — множество приближенных ε-решений задачи нижнего уровня, $\varepsilon \ge 0$.

Отметим, что в задаче $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$, в отличие от задачи $(\mathcal{BP}_o)$ из главы 1, действия игрока нижнего уровня не согласованы с интересами игрока верхнего уровня. Поэтому целевой функцией здесь является оценка эффективности $W(x,\varepsilon)$ стратегий игрока верхнего уровня.

Наряду с задачей $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$ рассмотрим квадратично-квадратичную двухуровневую задачу в оптимистической постановке, ассоциированную с $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$:

$$
\left.
\begin{array}{c}
F(x,y) \downarrow \min\limits_{x,y}, \quad x \in X, \\
y \in Y_{**}(x,\delta) \overset{\triangle}{=} \Big\{ y \in Y(x) \;\Big| \\
G(y) - \nu F(x,y) \le \inf\limits_{z}[G(z) - \nu F(x,z) \mid z \in Y(x)] + \delta \Big\},
\end{array}
\right\} \qquad (\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))
$$

где $\delta \ge 0$ — точность решения задачи нижнего уровня, $\nu > 0$ — множитель, с которым критерий эффективности игрока верхнего уровня исходной задачи штрафует нижний уровень.

Далее при выполнении предположений:

$$
X \text{ — ограниченное множество,} \tag{3}
$$

$$
\exists Y : Y \supseteq Y(x) \;\; \forall x \in X, \;\; Y \text{ — компакт,} \tag{4}
$$

исследуются взаимосвязи задач $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$ и $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$.

В частности, в работе доказано, что при фиксированном значении $x \in X$ любое приближенное δ-решение задачи нижнего уровня в задаче $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$ является также приближенным решением задачи нижнего уровня в задаче $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$ с точностью $\varepsilon = \delta + \nu F_+$, где $F_+ \overset{\triangle}{=} \max\limits_{x,y}\{F(x,y) \mid x \in X, \;\; y \in Y\} - \min\limits_{x,y}\{F(x,y) \mid x \in X, \;\; y \in Y\}$. Получены оценки на значение целевой функции задачи $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$ в любой ее допустимой точке $(x,y) : x \in X, \;\; y \in Y_{**}(x,\delta)$, значениями целевых функций задач $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$, соответствующих различной точности решения задачи нижнего уровня:

$$
W(x,\varepsilon) - \frac{\varepsilon + \delta}{\nu} \le F(x,y) \le W(x, \delta + \nu F_+). \tag{5}
$$

Из оценок (5) вытекают взаимосвязи значений задач $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$ и $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$ (значений целевых функций задач в их глобальных решениях):

$$\mathcal{V}(\mathcal{BP}_g(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon+\delta}{\nu} \le \mathcal{V}(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu)) \le \mathcal{V}(\mathcal{BP}_g(\delta+\nu F_+)),$$

где $\mathcal{V}(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$ — значение задачи $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$, $\mathcal{V}(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$ — значение задачи $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$.

Кроме того, доказана сходимость $\mathcal{V}(\mathcal{BP}_g(\varepsilon)) \downarrow \mathcal{V}(\mathcal{BP}_g(0))$ при монотонном стремлении ε к нулю ($\varepsilon \downarrow\downarrow 0$). Отметим, что утверждения данного параграфа обобщают результаты Д.А. Молодцова и В.В. Федорова[19] на случай зависимости допустимого множества задачи нижнего уровня от стратегий игрока верхнего уровня ($Y = Y(x)$) для задач $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$, $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$.

В § 2.2 рассматривается задача нижнего уровня задачи $(\mathcal{BP}_g(\varepsilon))$. Исследуются свойства ее решений и значения, а именно, доказывается непрерывность отображений, определяющих зависимости множества решений и значения этой задачи от переменных верхнего уровня.

В § 2.3 с использованием результатов § 2.1 и § 2.2 осуществляется сведение задачи $(\mathcal{BP}_g(0))$ в гарантированной постановке к семейству задач $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* (3), (4) *и последовательности* $\{\delta_k\}$, $\{\nu_k\}$, $\{\tau_k\}$ *таковы, что* $\delta_k \downarrow\downarrow 0$, $\nu_k \downarrow\downarrow 0$, $\dfrac{\delta_k}{\nu_k} \downarrow 0$, $\tau_k \downarrow 0$ *при* $k \to +\infty$. *Пусть далее пара* (x^k, y^k) *является приближенным* τ_k*-решением задачи* $(\mathcal{BP}_o(\delta_k,\nu_k))$, $k = 0,1,2,\ldots$ *Тогда любая предельная точка* (x_g, y_g) *последовательности* $\{(x^k, y^k)\}$ *является решением задачи* $(\mathcal{BP}(0))$.

Более точно, это означает, что $x_g \in X$, $y_g \in Y_*(x_g, 0)$ *и* $F(x_g,y_g) = W(x_g,0) = \mathcal{V}(\mathcal{BP}(0))$.

Далее осуществляется сведение задачи $(\mathcal{BP}_o(\delta,\nu))$ при фиксированных значениях параметров $\delta = 0$, $\nu > 0$ к семейству задач d.c. минимизации (см. § 1.1)

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} F(x,y) + \mu h(x,y,v) \downarrow \min\limits_{x,y,v},\\ Ax \le a,\ \ x \ge 0,\ \ A_1x + B_1y \le b,\ \ y \ge 0,\\ d - \nu c_1 + \nu C_1 y + vB_1 \ge 0,\ \ v \ge 0,\end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}(\mu,\nu))$$

где $h(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \langle d - \nu c_1 + \nu C_1 y, y\rangle + \langle b - A_1x, v\rangle$, $\mu \ge 0$ — штрафной множитель. Для нахождения глобального решения задачи $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ при фиксированных значениях параметров μ,ν используется теория глобального поиска в задачах d.c. минимизации.

[19]Молодцов Д.А., Федоров В.В. Аппроксимация игр двух лиц с передачей информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, №6. С. 1469–1484.

§ 2.4 посвящен одному из важных этапов глобального поиска — локальному поиску. Несмотря на то, что все переменные в задаче $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ связаны, их удается разбить на группы по свойствам целевой функции $\Phi(x,y,v)$. Так, если параметры штрафа удовлетворяют условию $\mu \geq \dfrac{1}{2\nu}$, то функция $\Phi(x,y,v)$ оказывается выпуклой квадратичной по переменным x, y, линейной по переменной v и билинейной по x и v, что позволяет осуществить последовательную минимизацию по группам переменных.

Предложены два варианта алгоритма локального поиска, заключающегося в последовательной минимизации целевой функции $\Phi(x,y,v)$ задачи $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ по паре (x,y) и по переменной v. В отличие от § 1.2 при локальном поиске в задаче $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ допустимые множества вспомогательных выпуклых задач оптимизации изменяются от итерации к итерации в силу связанности переменных. Несмотря на эту трудность, удалось доказать сходимость алгоритма локального поиска к критической точке, являющейся частично глобальным решением по паре (x,y) и по переменной v в отдельности, а также предложить и обосновать критерии останова, позволяющие обнаружить приближенно критическую точку с заданной точностью.

В заключительном § 2.5 представлен алгоритм глобального поиска в задаче $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$, основанный на стратегии глобального поиска, все этапы которой конкретизированы для задачи $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [4, 5, 7–12].

Третья глава диссертационной работы посвящена численному поиску гарантированных решений в задачах двухуровневой оптимизации.

В § 3.1 построен новый метод генерации тестовых квадратично-линейных двухуровневых задач с известным гарантированным решением, основанный на идеях упомянутой выше методики P. Calamai, L. Vicente.

Автором были составлены и решены аналитически задачи-ядра вида

$$\left.\begin{aligned} W(x) = \sup_y \{x^2 - 8x + p_i y_1 - 2y_2^2 \mid y \in Y_*(x)\} \downarrow \min_x,\ x \in [0;6], \\ Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}_y \{-y_1 \mid y_1 + y_2 \leq x,\ \ y_1 \leq 3,\ \ y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0\}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{KP}_i)$$

где значение параметра p_i определяет количество локальных решений, не являющихся глобальными.

Далее объединением задач-ядер $(\mathcal{KP}_i)$ при различных значениях параметров p_i строятся двухуровневые задачи произвольной размерности, к которым затем применяется невырожденное линейное преобразование координат с целью избавиться от сепарабельности. При этом в полученной задаче двухуровневой оптимизации оказываются известными все локальные и глобальные гарантированные решения.

Предложение. *Двухуровневая задача вида* $(\mathcal{BP}(0))$, *в которую входит* r_1 *задач-ядер* $(\mathcal{KP}_i)$ *при* $p_i = 3$, r_2 *задач-ядер* $(\mathcal{KP}_i)$ *при* $p_i = 4$ *и* r_3 *задач-ядер* $(\mathcal{KP}_i)$ *при* $p_i = 6$, *имеет* $2^{r_1+r_2+r_3}$ *локальных решений, из которых* 2^{r_2} *являются ее глобальными решениями.*

В § 3.2 осуществляется тестирование разработанного в § 2.4 алгоритма локального поиска на серии из 20 задач размерности от 2×4 до 20×40, сгенерированной методом, предложенным в § 3.1. При этом при построении невырожденных матриц, задающих указанное линейное преобразование координат, использовался генератор псевдослучайных чисел компилятора C++ из пакета GCC[20]. Возникающие в алгоритме локального поиска вспомогательные выпуклые задачи оптимизации решались при помощи упомянутой выше реализации метода особых точек и пакета GLPK.

На языке C++ были написаны программы, реализующие построенные в § 2.4 процедуры локального поиска. На первом этапе тестирования осуществлялся выбор начальных значений параметров штрафа μ, ν, которые в дальнейшем используются при глобальном поиске. В ходе вычислительного эксперемента были найдены значения параметров μ, ν, при которых уже локальным поиском удалось с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ найти глобальные решения в некоторых сгенерированных задачах.

На втором этапе производилось тестирование процедур локального поиска при старте из трех различных стартовых точек. Были выбраны точки, при старте из которых процедурами локального поиска было найдено глобальное решение в меньшем числе тестовых задач. Таким образом, так же, как и ранее в § 1.3, здесь были выбраны стартовые точки, позволяющие проверить эффективность алгоритма глобального поиска наилучшим образом.

В целом, различными вариантами локального поиска при старте из различных начальных приближений удалось найти глобальное решение в половине из сгенерированных тестовых задач. Впрочем, основную часть таких задач составляют задачи небольшой размерности 2×4.

Наконец, в § 3.3 на серии задач из § 3.2 был протестирован алгоритм глобального поиска, предложенный в § 2.5. При этом для локального поиска применялись подпрограммы, разработанные в § 3.2, а для решения частично линеаризованных задач, возникающих в алгоритме глобального поиска, была использована программная реализация метода особых точек, упомянутая выше.

Кроме того, был написан второй вариант программы глобального поиска с использованием пакета Xpress для решения вспомогательных выпуклых задач оптимизации. Этот вариант программы глобального поиска был

[20]URL: `http://gcc.gnu.org/`.

успешно протестирован на сериях тестовых задач размерности до 35×70.

В результате тестирования алгоритма глобального поиска за приемлемое время удалось найти гарантированное решение во всех сгенерированных задачах размерности до 105 (по совокупности переменных верхнего и нижнего уровня). При этом изменения выбранных в § 3.2 значений параметров штрафа μ, ν не потребовалось.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [5, 10–12].

В **заключении** диссертационной работы сформулированы основные результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Предложены и обоснованы методы локального и глобального поисков оптимистических решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах, основанные на теории глобального поиска. Проведен вычислительный эксперимент, продемонстрировавший эффективность этих методов.
2. Обоснована редукция задачи поиска гарантированного решения квадратично-линейной двухуровневой задачи к серии специальных квадратично-квадратичных двухуровневых задач в оптимистической постановке.
3. Разработаны методы локального и глобального поисков гарантированных решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах, основанные на теории глобального поиска. Проведен вычислительный эксперимент, показавший эффективность этих методов на сериях новых тестовых примеров, построенных разработанным методом генерации тестовых задач.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В. Локальный поиск в квадратично-линейной задаче двухуровневого программирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 75–88.
2. Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В. Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 201–212.
3. Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. On computational search for optimistic solutions in bilevel problems // Journal of Global Optimization. 2010. Vol. 48, № 1. P. 159–172.

4. Малышев А.В., Стрекаловский А.С. О взаимосвязи некоторых задач двухуровневой и нелинейной оптимизации // Известия вузов. Математика. 2011. № 4. С. 99–103.
5. Малышев А.В., Стрекаловский А.С. Глобальный поиск гарантированных решений в квадратично-линейных задачах двухуровневой оптимизации // Известия ИГУ. Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 73–82.
6. Малышев А.В., Орлов А.В. Поиск оптимистических решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах // Материалы IX школы-семинара молодых ученых «Математическое моделирование и информационные технологии» (Иркутск — Ангасолка, 22–27 октября 2007 г.). Иркутск, 2007. С. 107–110.
7. Стрекаловский А.С., Малышев А.В. О поиске гарантированного решения задачи двухуровневого программирования // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2008 г.). Иркутск, 2008. Т. 1. С. 602–608.
8. Стрекаловский А.С., Малышев А.В. О взаимосвязи гарантированного и оптимистического решений задачи двухуровневого программирования // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова (Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 г.). Екатеринбург, 2008. С. 306–307.
9. Малышев А.В. О поиске гарантированного решения в квадратично-линейных двухуровневых задачах // Материалы IV Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 29 июня – 4 июля 2009 г.). Омск, 2009. С. 184.
10. Malyshev A.V., Strekalovsky A.S. Global search for pessimistic solution in bilevel problems // Proceedings of the Toulouse global optimization workshop 2010. Toulouse (France), 2010. P. 77–80.
11. Малышев А.В. Поиск гарантированного решения одного класса задач двухуровневого программирования // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2010: Москва, 19–23 октября 2010 г.). М.: МАКС Пресс, 2010. С. 239–240.
12. Малышев А.В. Численный поиск гарантированного решения в одной задаче двухуровневой оптимизации // Тезисы докладов XIV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 28 февраля – 4 марта 2011 г.). Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 47–48.

Редакционно-издательский отдел
Учреждения Российской академии наук
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
Подписано к печати 3.05.2011
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 9. Тираж 130 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН