На правах рукописи

ОРЛОВ СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2013

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет» (Министерство образования и науки Российской Федерации)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Фалалеев Михаил Валентинович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент **Казаков Александр Леонидович**, ИДСТУ СО РАН, главный науч. сотр.
	доктор физико-математических наук, профессор **Кадченко Сергей Иванович**, МаГУ, зав. кафедрой;
Ведущая организация:	**Челябинский государственный университет** (г. Челябинск)

Защита состоится 26 декабря 2013 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 25 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Т. В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности решений начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах.

Актуальность темы. Отличительной особенностью изучаемых в работе интегро-дифференциальных уравнений является их нерегулярность (сингулярность, вырождение), которая проявляется в наличии необратимого оператора при старшей производной. Для таких объектов неприменимы теоремы, справедливые в регулярных случаях. Не допускают прямого распространения и методы исследования вырожденных линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Это порождает необходимость разработки аппарата, который, во-первых, позволил бы работать именно с интегро-дифференциальными уравнениями, во-вторых, был согласован с уже известными идеями, развитыми для вырожденных дифференциальных уравнений. С другой стороны, уравнение в абстрактных пространствах зачастую является краткой операторной записью какой-либо содержательной задачи математической физики или даже целого ряда задач. Неразрешенные относительно старшей производной по времени линейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (в иной терминологии уравнения *соболевского* типа) возникают в математической теории термовязкоупругости[1], гидродинамике[2], физике плазмы[3] и многих других областях. Системы линейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей коэффициентов при производной широко используются, например, в электротехнике[4]. Тем самым, помимо исключительно теоретического интереса, рассматриваемые задачи актуальны с точки зрения приложений.

Интерес к вырожденным дифференциально-операторным уравнениям проявляется с середины прошлого века, им посвящена обширная библиография. Наиболее известными в этой области являются работы Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, А. В. Синицына и М. В. Фалалеева[5], Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова[6], Ю. Е. Бояринцева[7], В. Ф. Чистякова и А. А. Щегловой[8], В. К. Иванова,

---

[1] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. Vol. 24. P. 1043–1053.

[2] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта // Труды МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.

[3] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников и др. М.: Физматлит, 2007. 736 с.

[4] Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических систем. Новосибирск: Наука, 1988. 273 с.

[5] Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov [et al.]. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 548 p.

[6] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003. 216 p.

[7] Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. 160 с.

[8] Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003. 320 с.

И. В. Мельниковой и А. И. Филинкова[9], A. Favini и A. Yagi[10], И. С. Егорова, С. Т. Пяткова и С. В. Попова[11], R. Showalter[12], А. И. Кожанова[13], Г. В. Демиденко и С. В. Успенского[14], С. Г. Крейна и Н. И. Чернышева[15] и многих других. В этих работах большое внимание уделяется сингулярным дифференциальным уравнениям и существенно меньшее интегро-дифференциальным. Начальные задачи для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений в разных постановках изучались A. Favini, A. Lorenzi и H. Tanabe[16], C. Lizama и R. Ponce[17], S. Q. Bu и G. Cai[18], В. Е. Федоровым и О. А. Стахеевой[19], Н. А. Сидоровым, М. В. Фалалеевым. Аналитические и численные методы решения систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной разработаны М. В. Булатовым и Е. В. Чистяковой[20]. В упомянутых работах изучаются преимущественно уравнения первого, реже второго порядков. Однако, для приложений требуются также и более высокие порядки дифференциальных частей. Таким уравнениям и посвящена данная работа.

Отметим, что во всех известных работах авторы указывали на неразрешимость в общем случае начальных задач для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений, т. е. для существования гладкого решения требуется согласование входных данных задачи: операторных коэффициентов, ядра интегральной части, свободной функции и начальных данных Коши. Тем самым, первичной проблемой в этих исследованиях является описание множества входных данных, при которых имеет место такая разрешимость. В работах[21,22] уста-

---

[9]Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 384 с.

[10]Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. 313 p.

[11]Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000. 336 с.

[12]Showalter R. E. The Sobolev equations I (II) / R. E. Showalter // Appl. Anal. 1975. V. 5, № 1. P. 15–22 (V. 5, № 2. P. 81–99).

[13]Кожанов А. И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1990. 130 с.

[14]Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы уравнений, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. 438 с.

[15]Крейн С. Г., Чернышев Н. И. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1979. 18 с. (Препринт № 4)

[16]Favini A., Lorenzi A., Tanabe H. Singular Integro-Differential Equations of Parabolic Type // Adv. Diff. Eqs. 2002. Vol. 7. P. 769–798.

[17]Ponce R. Bounded Solutions to Evolution Equations in Banach Spaces // Ph. D. Mathematics. The University of Santiago, Chile (USACH). Santiago, 2011. 87 p.

[18]Bu S. Q., Cai G. Solutions of second order degenerate integro-differential equations in vector-valued function spaces // Sci. China Math. 2013. Vol. 56, № 5. P. 1059–1072.

[19]Федоров В. Е., Стахеева О. А. О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. 2008. Вып. 2, № 27. С. 104–109.

[20]Булатов М. В., Чистякова Е. В. Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1665–1673.

[21]Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщенные решения дифференциального уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.

[22]Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1988. С. 308–318.

новлено, что для существования обобщенного решения дополнительных ограничений уже не требуется, и в результате был сформирован следующий подход: построить решение рассматриваемой задачи в классе распределений, а затем выявить условия, при которых оно окажется классическим. Построение обобщенного решения возможно двумя способами. Одним из них является метод покомпонентного восстановления регулярной и сингулярной составляющих. Но при таком подходе единственность фактически имеет место лишь в "зауженном" классе распределений, определяемом видом самого решения. Этого недостатка лишен другой способ, разработанный М. В. Фалалеевым. Основным инструментом предложенного метода является фундаментальная оператор-функция, соответствующая вырожденному дифференциальному оператору в банаховых пространствах — аналог классического понятия фундаментального решения (функции влияния). Обобщенное решение начальной задачи восстанавливается как свертка фундаментальной оператор-функции с правой частью уравнения, причем доказательство существования и единственности не требует громоздких выкладок. Знание фундаментальной оператор-функции позволяет записать в замкнутой форме единственное обобщенное решение, принадлежащее классу распределений с ограниченным слева носителем, а уже затем легко определить условия существования и явный вид классического решения, не прибегая к его непосредственному построению. Таким образом, вопрос однозначной разрешимости начальных задач в классах распределений и функций конечной гладкости удается изучать комплексно.

Цель работы — исследование однозначной разрешимости начальных задач для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в классах распределений и функций конечной гладкости.

Объектами исследования являются начальные задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, а также допускающие редукцию к ним начально-краевые задачи, которые возникают в математической теории термовязкоупругости.

Методы исследования. В работе используются аналитические и функциональные методы теории интегральных и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, методы теории линейных эллиптических операторов.

Научная новизна полученных в диссертации результатов состоит в том, что для широких классов вырожденных линейных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах построены фундаментальные оператор-функции. На этой основе получены достаточные условия однозначной разрешимости начальных задач в классах распределений и функций конечной гладкости, а также явные формулы для восстановления самих решений. Дифференциальные части рассматриваемых абстрактных интегро-дифференциальных уравнений имеют произвольный порядок N, в отличие от большого числа работ, посвященных уравнениям первого порядка.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обусловлена строгостью доказательств, в которых используются широко известные результаты теории дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа. Все основные утверждения проиллюстрированы примерами.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертационной работе результаты, полученные ранее М. В. Фалалеевым для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, распространены на общий случай уравнений произвольного порядка N. Доказанные теоремы согласуются со случаем, когда интегральная часть обнуляется. С этой точки зрения они являются обобщением полученных ранее аналогичных результатов для дифференциальных уравнений высокого порядка. Также в работе исследован вопрос существования и единственности решений начально-краевых задач математической теории термовязкоупругости с указанием явных формул решений. Рассмотрены задачи о движении вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта, о колебаниях вязко- и термоупругих пластин, о вязкоупруго-динамическом состоянии среды и др.

Материалы диссертации могут быть использованы при разработке спецкурсов для студентов-математиков, а также при написании курсовых и квалификационных дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

Диссертационное исследование выполнялось в рамках следующих программ:

– Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы», тема № 1.1706.2011;

– Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракты № П696 и № 14.B37.21.0365.

Работа поддержана грантами для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-08-104 и тема № 113-11-000. В 2011 году автор был удостоен именной стипендии губернатора Иркутской области (распоряжение Губернатора Иркутской области № 111-р от 22.12.2011).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных и классических решений начальных задач для таких уравнений, а также получены явные формулы самих решений. Абстрактные результаты применены к исследованию начально-краевых задач, возникающих в математической теории термовязкоупругости. Тем самым, область исследования соответствует пункту 8 «Теория дифференциально-операторных уравнений» паспорта специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Апробация. Изложенные в работе результаты были представлены на 30 научных мероприятиях, из них *10 международных конференций*: Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, 2006, Ростов-на-Дону; IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 2007, Иркутск; 3-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 85-летию Л. Д. Кудрявцева, 2008, Москва; Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего, 2009, Москва; Международный Российско-Абхазский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», 2009, Нальчик; VI Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 2009, Томск; Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А. А. Самарского, 2009, Москва; Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 2009, Новосибирск; III Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», 2011; 3-я Сибирская школа молодых ученых по применению математических методов и информационных технологий в рамках в XXVI Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», 2013, Иркутск, Ангарск.

Результаты диссертационных исследований докладывались на исследовательском семинаре отделения нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН под руководством А. А. Щегловой и регулярно на исследовательском семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ИМЭИ ИГУ под руководством Н. А. Сидорова.

Публикации и личный вклад автора. Материалы диссертационного исследования опубликованы в 33 работах, среди которых 20 статей, из них 9 в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций [1-9]. Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 4, 7, 9], третьей — [2, 3], четвертой — [2-6, 8].

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В работах [1-6] М. В. Фалалееву принадлежат постановки исследуемых задач, в [5] А. В. Красником исследовано вырожденное дифференциального уравнения четвертого порядка специального вида и соответствующая ему начально-краевая задача физики плазмы.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 190 страницах, состоит из введения, четырех глав и списка литературы, который содержит 143 библиографических наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** сформулирована цель диссертационного исследования, обоснована его актуальность, представлен обзор литературы в области изучаемой проблематики, приведены краткое содержание диссертации и ее основные результаты.

Первая глава носит преимущественно вспомогательный характер. Здесь изложены сведения о жордановых наборах фредгольмовых и нетеровых операторов, псевдообращении линейных операторов, а также введены некоторые понятия теории обобщенных функций в банаховых пространствах. П. 1.1 посвящен обобщенной жордановой структуре фредгольмовых операторов.

Пусть $E_1,\ E_2$ — вещественные банаховы пространства, B — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = E_1$. Будем предполагать, что B *фредгольмов*, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) < +\infty$. Обозначим $n = \dim N(B)$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — соответствующие им биортогональные системы элементов, т. е. $\langle \varphi_i,\ \gamma_j \rangle = \langle z_i,\ \psi_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$.

Введем проекторы $P : E_1 \to N(B),\ Q : E_2 \to \operatorname{span}\{z_i\}_{i=1}^n$ и ограниченный оператор $\Gamma : E_2 \to D(B)$ (*оператор Треногина–Шмидта*), действующие по формулам

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle \varphi_i,\ Q = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \psi_i \rangle z_i,\ \Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\ \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}.$$

Справедливы следующие равенства

$$\Gamma z_i = \varphi_i,\ \Gamma^* \gamma_i = \psi_i,\ i = 1, \dots, n, \Gamma B = \mathbb{I}_1 - P,\ B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q.$$

Здесь и далее $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в пространствах E_1 и E_2.

Определение 1. *Обобщенной жордановой цепочкой* базисного элемента $\varphi_i \in N(B)$ относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ ($\mathcal{F}(t)$-*жордановой цепочкой*) называется конечный набор элементов $\left\{\varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(2)}, \dots,\ \varphi_i^{(p_i)}\right\} \subset E_1$, удовлетворяющих уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k+1)} = l_k(\varphi_i),\ k = 1, \dots, p_i - 1,$$

которые, в соответствии с альтернативой Фредгольма, разрешимы, если выполнены условия $\langle l_k(\varphi_i),\ \psi_j \rangle = 0,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p_i - 1$. Здесь введено обозначение $l_k(\varphi_i) = \sum\limits_{q=1}^{k} \mathcal{F}^{(k-q)}(0)\varphi_i^{(q)}$. Число $p_i \in \mathbb{N}$ принято называть *длиной* $\mathcal{F}(t)$-жордановой цепочки. Справедливы формулы

$$\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma l_k(\varphi_i),\ k = 1, \dots, p_i - 1.$$

Условие обрыва цепочки присоединенных элементов на p_i-м шаге состоит в том, что не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j \rangle,\ j = 1, \dots, n$ равны нулю, т. е. в неразрешимости относительно $\varphi_i^{(p_i+1)}$ уравнения $B\varphi_i^{(p_i+1)} = l_{p_i}(\varphi_i)$.

Построив для каждого $\varphi_i \in N(B)$ свою $\mathcal{F}(t)$-жорданову цепочку, получим систему элементов $\left\{\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i\right\} \subset E_1$, называемую *обобщенным жордановым набором* фредгольмова оператора B относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ ($\mathcal{F}(t)$-*жордановым набором* фредгольмова оператора B).
Определение 2. Жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ называется *полным*, если выполнено условие $\det \|\langle l_{p_i}(\varphi_i),\ \psi_j\rangle\|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$.

В п. 1.2 оператор B предполагается *нетеровым*, т. е. таким, что $\overline{R(B)} = R(B)$, а $\dim N(B)$ и $\dim N(B^*)$ конечны, но не совпадают. Пусть $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$. Число $\chi = n - m$ называется *индексом* нетерова оператора B. Далее обозначим $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — базис в $N(B^*)$. Наряду с этими вводится в рассмотрение еще одна система элементов

$$\varphi_i^{(k)} = \left(B^+A\right)^{k-1} \varphi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, n,\ k \geq 2,\ \varphi_i^{(1)} = \varphi_i,$$

где A — замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} = E_1$, а B^+ — *псевдообратный* оператор[23] нетерова оператора B.
Определение 3. Пусть элементы $\varphi_i^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$B\varphi_i^{(k+1)} = A\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

и неравенствам

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)},\ i = 1, \ldots, n,$$

причем

$$\operatorname{rang} \left\|\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_k\right\rangle\right\|_{i=1,\ldots,n;\,k=1,\ldots,m} = \min(n, m) = l.$$

В этом случае говорят, что вектора $\varphi_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p_i$, образуют *полный A-жорданов набор* нетерова оператора B.

Элементы теории распределений в банаховых пространствах изложены в п. 1.3. Пусть E — вещественное банахово пространство, E^* — сопряженное к нему банахово пространство.
Определение 4. *Обобщенной функцией (распределением)* $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E называется всякий линейный непрерывный функционал $(f, s(t))$, заданный на $K(E^*)$. Здесь под $K(E^*)$ понимается так называемое *пространство основных функций*, к которому относятся все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*. Множество обобщенных функций со значениями в E обозначим $K'(E)$.
Определение 5. Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если $(f_n, s(t)) \xrightarrow{n\to+\infty} (f, s(t))\ \forall\ s(t) \in K(E^*)$.
Определение 6. Пусть $\mathcal{K}(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, причем $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует почти

[23] Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1976. 1055 p.

при всех $t \in \mathbb{R}$, $h(t) \in \mathscr{D}'$, тогда произведение $\mathcal{K}(t)h(t)$ (формальное выражение) назовем *обобщенной оператор-функцией.*

Определение 7. *Сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)h(t)$, где $h(t) \in \mathscr{D}'_+$, и распределения $f(t) \in K'_+(E_1)$ называется обобщенная функция $\mathcal{K}(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$, определяемая равенством

$$(\mathcal{K}(t)h(t) * f(t),\ s(t)) = (h(t),\ (f(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau)))\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*).$$

Корректность этого определения гарантируется ограниченностью слева носителей функций $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$ и доказывается по схеме, аналогичной применяемой при доказательстве существования свертки в алгебре $\mathscr{D}'_+$.

Отдельный пункт 1.4 посвящен понятию фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора, которое занимает центральное место в работе. Линейному интегро-дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - \ldots -$$
$$- A_1u'(t) - A_0u(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds$$

поставим в соответствие следующую обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A_{N-1}\delta^{(N-1)}(t) - \ldots - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t).$$

Здесь $B,\ A_{N-1}, \ldots, A_1,\ A_0,\ k(t)$ — линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, свойства которых будем уточнять отдельно в каждом конкретном случае.

Определение 8. *Фундаментальной оператор-функцией* интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ назовем обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}_N(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t)\ \forall\ v(t) \in K'_+(E_1),$$
$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * w(t) = w(t)\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Смысл этой конструкции состоит в следующем: если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t))$, то, в силу второго равенства, сверточное уравнение вида

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * u(t) = f(t),$$

где $f(t) \in K'_+(E_2)$, имеет своим решением обобщенную функцию

$$u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) \in K'_+(E_1),$$

причем это решение единственно. Действительно, если существует $v(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $v(t) \neq u(t)$ и $\mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = f(t)$, то, с учетом первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции, получим

$$v(t) = \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t) = u(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения $u(t) = \mathcal{E}_N(t) * f(t)$ исходного сверточного уравнения в классе $K'_+(E_1)$.

Далее описана техника исследования с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции задачи Коши

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots, u^{(N-1)}(0) = u_{N-1} \tag{1}$$

в условиях непрерывной обратимости оператора B.

Во **второй главе** изложены результаты исследования начальной задачи для специального класса интегро-дифференциальных уравнений вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds + f(t), \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{3}$$

где $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — числовая функция, B, A — линейные операторы. Задача Коши (2), (3) принимает вид сверточного уравнения

$$\big(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)\big) * \tilde{u}(t) = f(t)\theta(t) + \\ + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$

единственным решением (*обобщенным* решением задачи Коши (2), (3)) которого является распределение

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * \big(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \ldots + \\ + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)\big),$$

если известен вид $\mathcal{E}_N(t)$ — фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$. В пп. 2.1–2.5 такой вид получен в условиях фредгольмовости (п. 2.1) и нетеровости (п. 2.2) оператора B, а также спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка (пп. 2.3–2.5 соответственно). Далее введем используемые всюду в **главе 2** обозначения для функций

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-1)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$

$$p(t) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\ ,$$

и функциональной последовательности, заданной рекуррентной формулой

$$h_k(t) = h_{k-1}(t) + \int\limits_0^t r(t-s)h_{k-1}(s)ds,\ h_0(t) = f(t) + Ap(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Ap(s)ds,$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$.

Теорема 1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^{k-1}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k \right],$$

где Γ — оператор Треногина–Шмидта, $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A-жорданов набор оператора B, $\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ — полный A^*-жорданов набор оператора B^*, под k-ой степенью обобщенной функции $(\delta(t) + g(t)\theta(t)) \in \mathscr{D}'_+$ понимается ее повторная k-кратная свертка, т. е.

$$(\delta(t) + g(t)\theta(t))^k = \underbrace{(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * \cdots * (\delta(t) + g(t)\theta(t))}_{k \text{ раз}},$$

причем $(\delta(t) + g(t)\theta(t))^0 = \delta(t)$.

Фундаментальная оператор-функция имеет следующий эквивалентный вид:

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + M_N(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \delta^{((k-1)N)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k \right],$$

где $M_N(t)$ — резольвента ядра $A\Gamma \left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} g(s)ds \right)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда задача Коши (2), (3) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p-1)N}(t \geq 0;\ E_2),\ p = \max_{i=1,\ldots,n} p_i,$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \left[p(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} \Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) h_0(s) ds + \right.$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\right]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(k-1)N}\left\langle h_k^{((k-1)N-q)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и*

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\ f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2),\ p=\max_{i=1,\dots,n}p_i,$$

тогда, если

$$\left\langle h_k^{(q-1)}(0),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle=0,$$

$$q=1,\dots,kN,\ k=1,\dots,p_i,\ j=1,\dots,p_i-k+1,\ i=1,\dots,n,$$

то задача Коши (2), (3) имеет единственное классическое решение вида

$$u(t)=p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\Gamma M_N(\tau)(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})h_0(s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle h_k^{((k-1)N)}(t),\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}.$$

В п. 2.2 рассмотрен случай, когда B нетеров, который, в свою очередь, подразделяется еще на два: отрицательного ($n<m$) и положительного ($n>m$) индекса χ оператора B. При $\chi<0$ оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ того же вида, что и в теореме 1, является фундаментальной для $B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t)-Ag(t)\theta(t)$, но не на всем классе $K'_+(E_2)$, а на его специальном подклассе. Этот факт естественным образом отражается на существовании как обобщенного, так и классического решений задачи Коши, которое теперь имеет место при выполнении дополнительных условий на правую часть и начальные данные, причем эти ограничения имеют нелокальный характер. При $\chi>0$ обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$, но уже с $\psi_i^{(1)}=0,\ i=m+1,\dots,n$ и произвольными функционалами $\psi_i^{(j)},\ i=m+1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i$ удовлетворяет только второму равенству из определения 8 фундаментальной оператор-функции, "ответственному" за существование обобщенного решения. Первое равенство из этого определения не выполняется. Свойством единственности построенные ни обобщенное, ни классическое решения не обладают, потому как содержат свободные параметры и произвольные функции.

В пп. 2.3–2.5 начальная задача (2), (3) изучается с точки зрения теории полугрупп операторов с ядрами Г. А. Свиридюка. Рассмотрены случаи относительной спектральной, секториальной и радиальной ограниченности оператора A относительно B (в этих предположениях размерность ядра оператора B или длины A-жордановых цепочек могут быть бесконечными). Ограничимся здесь изложением результатов п. 2.3.

В начале приводится оригинальная терминология. Пусть $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$. Здесь $\mathcal{C}l(E_1, E_2)$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в банаховом пространстве E_1 и действующих в банахово пространство E_2. *B-резольвентным множеством* оператора A называется множество $\rho^B(A) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \ (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\right\}$, а оператор-функции $(\mu B - A)^{-1}$, $R^B_\mu(A) = (\mu B - A)^{-1}B$ и $L^B_\mu(A) = B(\mu B - A)^{-1}$ — соответственно *B-резольвентой*, *правой B-резольвентой* и *левой B-резольвентой* оператора A.
Определение 9. Оператор A называется *спектрально ограниченным* относительно оператора B (или (B, σ)-ограниченным), если $\exists\ a > 0$ такое, что $\{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$.

Пусть $C = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$, тогда пара операторов

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C R^B_\mu(A) d\mu, \ Q = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C L^B_\mu(A) d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения этих пространств в прямые суммы

$$E_1 = E^0_1 \oplus E^1_1 = N(P) \oplus R(P), \ E_2 = E^0_2 \oplus E^1_2 = N(Q) \oplus R(Q).$$

Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : \ E^0_1 \to E^0_2, \ B_1 : \ E^1_1 \to E^1_2$ непрерывно обратимы, $A_1 \ : \ E^1_1 \to E^1_2$ ограничен. Если $\exists\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq \mathbb{O}_1$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} = \mathbb{O}_1$, то бесконечно удаленная точка является *несущественно особой* точкой (либо *устранимой особой* точкой при $p = 0$, либо *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$) B-резольвенты оператора A. В этом случае (B, σ)-ограниченный оператор A называется *(B, p)-ограниченным.*
Теорема 4. *Пусть B, A — линейные операторы, причем $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B необратим и A спектрально ограничен относительно B, тогда интегро-дифференциальный оператор $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (A_1 B_1^{-1})^{k-1} Q(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) -$$

$$-\sum_{q=0}^{+\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

здесь $r(t)$ *— резольвента ядра* $(-g(t))$*, степени обобщенных функций понимаются в смысле операции свертки (см. теорему 2.1.1).*

Если в теореме 4 дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка точка B-резольвенты оператора A, то

$$\mathcal{E}_N(t)=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}Q(\delta(t)+g(t)\theta(t))^{k-1}*\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)-$$
$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1}.$$

Эта обобщенная оператор-функция имеет следующий эквивалентный вид:

$$\mathcal{E}_N(t)=B_1^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}*(\mathbb{I}_2\delta(t)+P_N(t)\theta(t))Q-$$
$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)\delta^{(qN)}(t)*(\delta(t)+r(t)\theta(t))^{q+1},$$

где $P_N(t)$ — резольвента ядра $A_1B_1^{-1}\left(\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}g(s)ds\right)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и* ∞ *является несущественно особой точкой* B*-резольвенты оператора* A*, тогда задача Коши (2), (3) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t)\in C^{pN}(t\geq 0),\ \ f(t)\in C^{pN}(t\geq 0;\ E_2),$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\Bigg[p(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}Qh_0(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}B_1^{-1}P_N(\tau)Qh_0(s)d\tau ds-$$
$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{q+1}^{(qN)}(t)\Bigg]\theta(t)-\sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega_{j-1[q+1]}\delta^{(qN+N-j)}(t),$$

где $\omega_{j-1[q]}=\sum\limits_{k=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(\mathbb{I}_2-Q)h_{k+q+1}^{(kN+j-1)}(0)$, $j=1,\dots,N,\ q=0,\dots,p$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 6, ∞ является несущественно особой точкой B-резольвенты оператора A и*

$$g(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(p+1)N}(t \geq 0;\ E_2),$$

тогда, если

$$\omega_{j-1[q]} = 0,\ j = 1, \ldots, N,\ q = 0, \ldots, p,$$

то задача Коши (2), (3) имеет единственное классическое решение вида

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} Q h_0(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} B_1^{-1} P_N(\tau) Q h_0(s) d\tau ds - \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1} B_0)^q A_0^{-1} (\mathbb{I}_2 - Q) h_{q+1}^{(qN)}(t),$$

где используются обозначения теоремы 5.

Третья глава посвящена исследованию однозначной разрешимости начальной задачи

$$\mathcal{L}_N(u(t)) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1} \tag{1}$$

при условии фредгольмовости оператора B.

Теорема 7. *Пусть $B,\ A_{N-1}, \ldots,\ A_1,\ A_0$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(t \geq 0)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t, причем*

$$\overline{D(B)} = \overline{\bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k)} = E_1,\ D(B) \subseteq \bigcap_{k=1}^{N} D(A_{k-1}) \cap D(k),$$

$k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов и имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции

$$\mathcal{F}_N(t) = A_{N-1} + A_{N-2} t + \cdots + A_1 \frac{t^{N-2}}{(N-2)!} + A_0 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} k(s) ds,$$

тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \theta(t) * (\mathbb{I}_2 \delta(t) + R_N(t) \theta(t)) * (\mathbb{I}_2 \delta(t) + N_N(t) \theta(t)) * G(t),$$

здесь Γ — оператор Треногина–Шмидта, $R_N(t)$ и $N_N(t)$ — резольвенты ядер $\mathcal{F}_N(t)\Gamma$ и $(-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i R_N^{(p_i)}(t))$ соответственно, функция $G(t)$ задается следующим образом:

$$G(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t),$$

$\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ *— полный обобщенный $\mathcal{F}_N^*(t)$-жорданов набор оператора B^*.*

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7, тогда задача Коши (1.4.1) имеет единственное обобщенное решение вида $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$.*

Простой анализ формулы $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$ в условиях теоремы 7 указывает на то, что это распределение представляет собой сумму регулярной и сингулярной составляющих. С помощью метода покомпонентного их восстановления показано, что обобщенное решение задачи Коши (1) имеет вид:

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = v(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]}\varphi_i^{(k)}\delta^{(j-1)}(t),$$

где функция $v(t)$ в случае $\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i-j+1}(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$, принадлежит классу $C(t \geq 0;\ E_1) \cap C^N(t > 0;\ E_1)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}_N(v(t)) = f(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-N}\sum_{k=1}^{p_i-N+1-j} c_{i\ [k+j+N-1]}k^{(j-1)}(t)\varphi_i^{(k)},$$

и начальным условиям

$$v^{(j-1)}(0) = u_{j-1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i-N+j} c_{i\ [k+N-j]}\varphi_i^{(k)},\ j = 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $c_{i\ [j]} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$, определяются единственным образом по формулам

$$c_{i\ [j]} = -\sum_{k=1}^{p_i-j+1} \left\langle h^{(p_i-j-k+1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

здесь $h(t) = f(t) - \mathcal{L}_N(p(t)),\ p(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}$.

Обнаружена связь между построенным обобщенным и классическим решениями, которая позволила сформулировать следующий результат.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы 7 и*

$$\left\langle f(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{p_i-j+1}(t \geq 0),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

тогда, если

$$\sum_{k=1}^{p_i-j+1} \left\langle h^{(p_i-j-k+1)}(0),\ \psi_i^{(k)} \right\rangle = 0,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,p_i,$$

то задача Коши (1) имеет единственное классическое решение.

Приложениям полученных абстрактных результатов посвящена заключительная **четвертая глава**. Здесь рассмотрены задачи, возникающие в математической теории термовязкоупругости. Всего приведено семь начально-краевых задач: о движении вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта, поперечных колебаниях пластины с памятью, вязкоупруго-динамическом состоянии среды, поперечных колебаниях диссипативной пластины, продольных колебаниях упругого стержня с учетом инерции, колебаниях термоупругой пластины, колебаниях термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле, — для каждой из которых сформулированы четыре утверждения об условиях существования и единственности обобщенного и классического решений в регулярном и сингулярном случаях. Получены также формулы для построения этих решений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказаны теоремы о виде фундаментальной оператор-функции интегро-дифференциального оператора специального вида в банаховых пространствах в условиях фредгольмовости и нетеровости главной части, а также спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка. В этих предположениях получены условия существования и единственности обобщенного и классического решений начальной задачи для соответствующего вырожденного интегро-дифференциального уравнения в банаховых пространствах;

2. Построена фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора высокого порядка с фредгольмовым операторным коэффициентом при старшей производной. На этой основе доказана однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши в классах распределений и функций конечной гладкости;

3. Получены условия однозначной разрешимости и формулы решений начально-краевых задач о движении вязкоупругой жидкости, колебаниях пластины с памятью, упругого стержня с учетом инерции, термоупругой пластины в нестационарном тепловом поле.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Фалалеев М. В., Орлов С. С. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 286–297.

[2] Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы высоких порядков в банаховых пространствах и их приложения // Известия вузов. Математика. 2011. № 11. С. 68–79.

[3] Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. ИГУ. Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 118–134.

[4] Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 7, № 4. С. 100–110.

[5] Фалалеев М. В., Красник А. В., Орлов С. С. Вырожденные дифференциальные уравнения высоких порядков специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 3. С. 126–139.

[6] Фалалеев М. В., Орлов С. С. Задача Коши–Дирихле для уравнения колебаний термоупругой плластины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. Т. 26, № 2. С. 138–143.

[7] Орлов С. С. О разрешимости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с фредгольмовым оператором в главной части // Изв. ИГУ. Математика. 2012. Т. 5, № 3. С. 73–93.

[8] Орлов С. С. Начально-краевые задачи для неклассических уравнений математической теории упругости // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2011. Т. 29, № 1. С. 21–29.

[9] Орлов С. С. Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложения // Изв. ИГУ. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 54–60.

Редакционно-издательский отдел
ФГБУН Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
Подписано к печати 22.11.2013
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 7. Тираж 130 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН