ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Серия: «Неклассические задачи динамики и управления»

Выпуск 3

**В.А. Дыхта**

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

Иркутск — 2013

УДК 517.977.5
Рекомендовано к изданию Ученым советом ИДСТУ СО РАН

Серия «Неклассические задачи динамики и управления» основана в 2013 году

Научный редактор серии: д-р физ.-мат. наук, чл.-к. РАН А.А. Толстоногов

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Антипина;
канд. физ.-мат. наук, доц. О.Н. Самсонюк

**Дыхта В.А.** Оптимальное управление. — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. — 84 с. — (Серия «Неклассические задачи динамики и управления»; вып. 3).

В пособии излагается математическая теория управления обыкновенными динамическими системами. Она включает в себя постановки и анализ задач управляемости, достижимости, инвариантности и оптимальности. Изложение основано на систематическом использовании решений квазивариационных неравенств Гамильтона-Якоби, которые интерпретируются как функции типа Ляпунова в широком смысле. Два типа таких функций оказываются основными в данном подходе – сильно и слабо монотонные; они являются решениями соответствующих неравенств Гамильтона-Якоби. Теоретический материал пособия предполагает знание основ теории оптимального управления на уровне принципа максимума Понтрягина для простейшей задачи без фазоограничений. Этот фундаментальный результат анонсируется для задачи оптимального управления с терминальными (общими концевыми) ограничениями и существенно углубляется и расширяется оригинальными результатами как в части необходимых условий оптимальности (принцип минимума с контрстратегиями), так и в части достаточных (обращение принципа максимума Понтрягина, обобщение условий оптимальности Беллмана, Каратеодори, Кротова). Учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей, а также аспирантов и научных работников, интересующихся приложениями неравенств Гамильтона-Якоби к теории оптимального управления. Вторая часть пособия написана совместно с С.П. Сорокиным.

Библиогр. 92 назв.

# Оглавление

# Глава 1

# Принцип максимума и достаточные условия в оптимальном управлении

## 1.1 Постановка канонической задачи оптимального управления

Рассмотрим гладкую классическую задачу оптимального управления с общими концевыми ограничениями – $P$ :

$$J = l_0(b) \to \inf, \quad b := (t_0, x_0 \; ; \; t_1, x_1), \tag{1.1}$$

$$l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \tag{1.2}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U. \tag{1.3}$$

Здесь $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, функции $l_0$, $l$, $k$, $f$ непрерывно дифференцируемы, множество $U \subseteq R^{d(u)}$ произвольно ( $d(u)$ означает размерность вектора $u$ ), векторные ограничения (1.2) понимаются покомпонентно.

Будем рассматривать пары функций $(x(t), u(t))$ , которые удовлетворяют управляемой системе (1.3) на различных отрезках времени $\Delta = [t_0, t_1]$ , поскольку начальный и конечный моменты времени $t_0, t_1$ могут быть подвижными. В связи с этим введем следующее определение.

*Процессом* управляемой системы (1.3) будем называть набор $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ , включающий некоторый отрезок времени $\Delta = [t_0, t_1]$ и функции $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие на $\Delta$ следующим условиям:

1) $u(t)$ является *допустимым управлением*, т.е. представляет собой измеримую ограниченную функцию на отрезке $\Delta$ со значениями на множестве $U$ ;

2) $x(t)$ является *траекторией* системы (1.3), соответствующей управлению $u(t)$ , т.е. представляет собой абсолютно непрерывную функцию на отрезке $\Delta$ , связанную с $u(t)$ равенством $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \;\; \forall\, t \in \Delta$. Все соотношения, содержащие измеримые по Лебегу функции, считаются выполняющимися почти всюду относительно меры Лебега.

Процесс $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta = [t_0, t_1])$ называется *допустимым*, если соответствующий ему концевой (терминальный) вектор $b$ удовлетворяет концевым ограничениям (1.2).

Поясним, что в данной задаче мы не можем считать целевой функционал $J$ зависящим только от управления $u$ (и писать $J(u)$), поскольку, во-первых, $J$ может зависеть от $t_0, t_1$, (хотя бы даже неявно – через значения $x(t_0), x(t_1)$), и, во-вторых, выбор управления $u(t)$ ещё не определяет соответствующей траектории – для этого необходимо выбрать начальное условие $x_0 = x(t_0)$, а оно в нашей задаче *варьируется*, т.е. тоже оптимизируется. Поэтому функционал $J$ в задаче $P$ определяется на множестве допустимых процессов управляемой системы, т.е. $J = J(\sigma)$.

Таким образом, задача оптимального управления заключается в поиске *допустимого* процесса

$$\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid \ t \in \overline{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]),$$

минимизирующего функционал $J(\sigma)$ *на множестве всех допустимых процессов*. Такой процесс назовём *оптимальным*, равно как и образующие его траекторию $\overline{x}(t)$, управление $\overline{u}(t)$ и моменты времени $\overline{t}_0, \overline{t}_1$.

Задачу $P$ называют *канонической*, поскольку она включает в себя другие типы задач оптимального управления, или же последние сводятся к канонической путем стандартных приемов.

Укажем некоторые из таких задач.

*Задача $P_\Delta$ с фиксированным временем*, в которой отрезок времени $\Delta = [t_0, t_1]$ один и тот же для всех допустимых процессов; она получается из задачи   сокращением числа компонент терминального вектора – в ней $b = (x(t_0),\ \ x(t_1))$.

*Задача с фиксированным начальным временем и начальным условием* ($t_0 = \tau_0$ и $x(t_0) = x_0$ заданы) или, иначе, *задача с закрепленным левым концом*; она получается при $b = (t_1, x(t_1))$ (формально еще необходимо добавить ограничения типа равенства $t_0 = \tau_0,\ \ x(t_0) - x_0 = 0$).

*Задача двухточечного быстродействия*, заключающаяся в переводе системы из заданной начальной точки $x_0$ в заданную конечную точку $x_1$ за минимально возможное время; она получается, если положить

$$J(\sigma) = t_1 - t_0 \quad \text{(функционал быстродействия)}$$

и ввести концевые ограничения-равенства

$$x(t_0) - x_0 = 0, \quad x(t_1) - x_1 = 0.$$

*Задача, содержащая в качестве критерия или ограничения функционал с интегральной частью* (так называемый функционал Больца) вида

$$J = G(b) + \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))\, dt;$$

такие задачи сводятся к канонической форме путем введения дополнительной фазовой координаты $x_{n+1}$ , подчиненной следующему дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\dot{x}_{n+1} = F(t,x,u), \quad x_{n+1}(t_0) = 0.$$

Тогда функционал $J$ становится терминальным – $J = G(b) + x_{n+1}(t_1)$ , а фазовым становится расширенный вектор $(x, x_{n+1})$ . При наличии в задаче нескольких функционалов типа $J$ вводятся дополнительные фазовые переменные, соответствующие каждому такому функционалу при описанном сведении.

## 1.2 Принцип максимума Понтрягина, экстремали и биэкстремали задачи

### 1.2.1 Принцип максимума Понтрягина

Анонсируем основное необходимое условие оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в задаче $P$ – *принцип максимума Понтрягина.*

С этой целью определим функцию Понтрягина (понтрягиан)

$$H(t,x,\psi,u) = \langle \psi, f(t,x,u) \rangle \, ,$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, а запись $\langle a, b\rangle$ означает скалярное произведение векторов $a$ и $b$, а также концевую (терминальную) функцию Лагранжа

$$L(b) = \alpha_0 l_0(b) + \langle \alpha, l(b) \rangle + \langle \beta, k(b) \rangle \, .$$

Переменные $\psi$ (далее $\psi(t)$ ), $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta$ являются множителями Лагранжа задачи $P$.

Необходимое условие оптимальности в задаче  дает

**Теорема 2.1** (принцип максимума Понтрягина) *Пусть* $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid \ t \in \overline{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ *— оптимальный процесс в задаче* $P$ *. Тогда найдется такой набор множителей Лагранжа* $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t), q(t))$ *, что выполняются следующие условия:*
*а) неотрицательности*

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \tag{1.4}$$

*и дополняющей нежесткости*

$$\alpha_i l_i(\bar{b}) = 0, \quad i = 1, \dots, d(l), \tag{1.5}$$

*где* $\bar{b} = (\bar{t}_0, \bar{x}(t_0); \bar{t}_1, \bar{x}(t_1))$ *;*
*б) условие нетривиальности* $\lambda \neq 0$ *, которое эквивалентно неравенству*

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{d(l)} \alpha_j + \|\beta\| > 0 \tag{1.6}$$

*( $\|\beta\| = \langle\beta,\beta\rangle^{\frac{1}{2}}$ — евклидовая норма вектора $\beta$ );*
*в) $\psi(t), q(t)$ удовлетворяют п.в. на отрезке $\overline{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ сопряженной системе*

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)), \tag{1.7}$$

$$\dot{q}(t) = -H_t(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)) \tag{1.8}$$

*с условиями трансверсальности по $x$*

$$\psi(\bar{t}_0) = L_{x_0}(\bar{b}), \quad \psi(\bar{t}_1) = -L_{x_1}(\bar{b}), \tag{1.9}$$

*и условиями трансверсальности по $t$*

$$q(\bar{t}_0) = L_{t_0}(\bar{b}), \quad q(\bar{t}_1) = -L_{t_1}(\bar{b}); \tag{1.10}$$

*г) условие максимума по управлению*

$$H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)) + q(t) = 0 \quad \forall\, t \in \overline{\Delta}, \tag{1.11}$$

$$H(t, \bar{x}(t), \psi(t), u) + q(t) \le 0 \quad \forall\, t \in \overline{\Delta},\ \forall\, u \in U. \tag{1.12}$$

Из условий (1.11), (1.12) следуют:
1) условие максимума в явной форме – при п.в. $t \in \overline{\Delta}$ управление $\bar{u}(t)$ максимизирует функцию $H(t, \bar{x}(t), \psi(t), u)$ на множестве $U$, если $U$ – компакт: в противном случае на $\bar{u}$ достигается $\sup\limits_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), \psi(t), u)$;
2) непрерывность и кусочная гладкость функции Понтрягина

$$H(t) = H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)), \quad t \in \overline{\Delta}, \tag{1.13}$$

вычисленной вдоль оптимального процесса.

Действительно, вдоль оптимального процесса она совпадает на $\overline{\Delta}$ с функцией $(-q(t))$ в силу равенства (1.11), а $q(t)$ – кусочно гладкая как решение дифференциального уравнения (1.8) (кстати сказать, элементарного, ибо $q$ не входит в его правую часть).

Из (1.8), (1.11) следует также, что для функции (1.13) п.в. на $(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} H(t) = H_t(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)),$$

т.е. *вдоль оптимального процесса полная производная по $t$ от функции $H$ совпадает с частной.* Отсюда получаем ещё одно следствие ПМ: *в автономных задачах, когда функция $f$ в динамической системе не зависит явно от $t$ (т.е. $f = f(x,u)$ ), понтрягиан постоянен вдоль оптимального процесса*

$$H(t) = H(\bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)) = \text{const} \quad \text{на} \quad \overline{\Delta}.$$

Поскольку двойственная переменная $q(t)$, соответствующая времени $t$, выражается через $H(t)$, то её часто не включают явно в набор множителей $\lambda$ и в формулировку ПМ. Но в задачах с подвижным временем (и не только в них) её введение оказывается полезным для применения ПМ.

Для удобства приведем детализацию ПМ, которая соответствует наиболее распространенным частным вариантам канонической задачи. Она представлена в таблице.

Таблица 1.1:

| Тип задачи | Ограничения,задающие тип задачи | Детализация ПМ |
|---|---|---|
| 1. Задача с фиксированным временем | $t_0, t_1$ заданы (тогда отрезок $\overline{\Delta} = \Delta = [t_0, t_1]$ один для всех допустимых процессов) | Опустить условия трансверсальности по времени (1.10) (т.е. $q(t_0)$, $q(t_1)$ свободны) |
| 2. Задача с закрепленным левым концом | $t_0, x(t_0) = x_0$ заданы, $t_1$ свободно | Опустить первые равенства в условиях трансверсальности (1.9),(1.10) (т.е. $\psi(t_0), q(t_0)$ свободны) |
| 3. Задача двухточечного быстродействия | $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ заданы, целевой функционал $J = t_1 - t_0$ | Опустить условия трансверсальности (1.9) (т.е. $\psi(t_0), \psi(t_1)$ свободны) |

Итак, если $\bar{\sigma}$ – оптимальный процесс, то найдется хотя бы один набор множителей $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t), q(t))$, удовлетворяющий условиям а) – г) ПМ. Важно заметить, что таких существенно различных наборов может оказаться бесчисленное множество и не существует обозримых предположений на задачу, гарантирующих единственность $\lambda$ *при наличии концевых ограничений* (особенно – неравенств). Точнее говоря, здесь следует говорить об единственности $\lambda$ с точностью до постоянного положительного множителя. Чтобы исключить подобную множественность наборов $\lambda$, их можно нормировать, например, условием

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{d(l)} \alpha_j + \|\beta\| = 1, \tag{1.14}$$

вместо неравенства (1.6).

ПМ сформулирован для гладкой канонической задачи. При этом гладкость функции $f$ по управлению несущественна – ничего не изменится, если зависимость $f$ от $u$ является лишь непрерывной. В то же время гладкость по $t$ и $x$ существенна – без нее теряют смысл сопряженные уравнения и условия трансверсальности. В задачах с фиксированным временем можно отказаться от требования гладкости $f$ по $t$, заменив его непрерывностью или даже кусочной непрерывностью (измеримостью) по времени.

При этом из принципа максимума следует исключить сопряженное уравнение (1.8), соответствующее переменной $t$, а условия максимума (1.11), (1.12) записать в явной форме. Однако в задачах с нефиксированным временем отказ от гладкой зависимости по времени влечет нетривиальные изменения в ПМ, связанные, в основном, с правильной формулировкой условий трансверсальности по времени.

Приведем ПМ так называемой гамильтоновой форме. Для этого введем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$\mathcal{H}(t,x,\psi) = \sup_{u\in U} H(t,x,\psi,u) \tag{1.15}$$

и множества

$$\operatorname{dom}\mathcal{H} = \{(t,x,\psi) \mid \text{в (1.15) супремум достигается}\}, \tag{1.16}$$

$$\arg\max \mathcal{H}(t,x,\psi) = \{u\in U \mid H(t,x,\psi,u) = \mathcal{H}(t,x,\psi)\}.$$

Тогда условия (1.7), (1.8), (1.11), (1.12) эквивалентны включениям

$$\begin{aligned} &(t,\bar{x}(t),\psi(t)) \in \operatorname{dom}\mathcal{H} \quad \forall t\in\bar{\Delta},\\ &u(t) \in \arg\max\ \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),\psi(t)) \quad \text{п.в. на} \quad \bar{\Delta} \end{aligned} \tag{1.17}$$

и сопряженному уравнению (1.8).

### 1.2.2 Возможные обобщения принципа максимума

Укажем уточнения, которые следует внести в формулировку принципа максимума, если ослаблять требования к главному атрибуту задачи $P$ – управляемой системе (1.3).

**(a)** Если зависимость функции $f$ от времени измерима, или даже непрерывна, то уравнение (1.8) и условия трансверсальности по времени (1.10) теряют смысл и поэтому переменную $q$ надлежит исключить из формулировки ПМ.

В частном случае задачи $P_\Delta$ с фиксированным отрезком времени $\Delta$ это сделать просто: надо опустить соотношения (1.8),(1.10), а условие максимума (1.11), (1.12) заменить на привычное

$$H(t,\bar{x}(t),\psi(t),\bar{u}(t)) \geq H(t,\bar{x}(t),\psi(t),u) \quad \forall (t,u)\in\Delta\times U \tag{1.18}$$

Гораздо сложнее обстоит дело собственно в случае задачи $P$.

Если функция $f$ непрерывна, а класс допустимых управлений сужен до кусочно непрерывных функций, то, исключая $q$ как описано выше, получим условия трансверсальности по времени в виде

$$H(\bar{t}_i,\bar{x}(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i),\bar{u}(\bar{t}_i)) = (-1)^{i+1}L_{t_i}(\bar{b}), \quad i=0,1, \tag{1.19}$$

а в условии максимума (1.18) полагается $\Delta = \bar{\Delta}$.

В общем случае измеримой зависимости $f$ по $t$ и ограниченности $f$, $f_x$ на ограниченных множествах несколько неожиданным оказалась невозможность получить

ПМ, если не предполагать ограниченности множества $U$, или же функции $f(t,x,u)$ в окрестности графика траектории $\bar{x}$ при $u \in U$. (Точнее сказать, что на данный момент обойти эти условия ограниченности не удалось.) Если предположения ограниченности выполнены, то в уже описанной модификации ПМ следует заменить условия трансверсальности по времени (1.19) на следующие: для $i = 0,1$

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess}\overline{\lim}_{t\to\bar{t}_i}\mathcal{H}(t,\bar{x}(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)) + (-1)^i L_{t_i}(\bar{b}) \geq 0, \\ &\operatorname{ess}\underline{\lim}_{t\to\bar{t}_i}\mathcal{H}(t,\bar{x}(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)) + (-1)^i L_{t_i}(\bar{b}) \leq 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

В этой записи использовано понятие существенных пределов измеримой функции $h(t)$ в точке $t_*$

$$\operatorname{ess}\overline{\lim}\, h(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\operatorname{ess}\sup_{t\in(t_*-\varepsilon,\ t_*+\varepsilon)} h(t),$$

$$\operatorname{ess}\underline{\lim}\, h(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\operatorname{ess}\inf_{t\in(t_*-\varepsilon,\ t_*+\varepsilon)} h(t),$$

Ясно, что при нарушении условий ограниченности неравенства (1.20) теряют смысл в силу определения гамильтониана (1.15), 1.16).

**(б)** Другое ближайшее обобщение ПМ связано с ослаблением предположения гладкости функции $f$ по $x$ в пределах обычного понятия дифференцируемости (без обращения к различным обобщенным производным из негладкого анализа, которое становится неизбеж ным, если зависимость $f$ от $x$ всего лишь липшицевая). Используя пакет игольчатых вариаций с последующим сужением задачи к конечномерной можно получить ПМ для задачи $P_\Delta$ с фиксированным временем, когда функция $f$ удовлетворяет условиям Каратеодори, равномерно ограничена, функция $f(t,\cdot,\bar{u}(t))$ липшицевая в трубке вдоль траектории $\bar{x}$ и дифференцируемая только в точках $x = x(t)$. Формулировка ПМ в этих предположениях не отличается от описанной в микропункте (а) для задачи $P_\Delta$.

### 1.2.3 Экстремали и биэкстремали задачи

Процесс $\bar{\sigma}$, удовлетворяющий ПМ, назовем *экстремалью Понтрягина*, или *понтрягинской экстремалью.*

Пусть определены все наборы множителей Лагранжа $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t), q(t))$, соответствующие $\bar{\sigma}$ в силу ПМ, т.е. удовлетворяющие условиям (1.4)-(1.12). Множество всех таких наборов $\lambda$, нормированных условием (1.14), обозначим через $M$. ПМ равносилен условию: $M \neq \emptyset$.

Экстремаль Понтрягина $\overline{\sigma}$ называют *нормальной*, если для нее $\alpha_0 > 0$ для любого набора $\lambda \in M$, в противном случае $\overline{\sigma}$ – *анормальная экстремаль Понтрягина.*

Если $\lambda \in M$, то тройку функций $\gamma = (\psi(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta})$ назовем *биэкстремалью Понтрягина*, а $\psi(t)$ – её сопряженной компонентой или, кратко, *коэкстремалью.*

Ясно, что понятия понтрягинской экстремали и биэкстремали неразрывно связаны не только с управляемой системой (1.3), но и с задачей $P$ в целом – терминальные функции $l_0, l, k$ влияют на $\psi(t)$ и $q(t)$ через условия трансверсальности (1.9), (1.10). Поэтому назовем их *экстремалями* и *биэкстремалями задачи.*

Основная идея рассматриваемых далее достаточных условий оптимальности в форме ПМ состоит в том, чтобы предельно полно использовать информацию обо всем множестве $M$ наборов Лагранжа и множестве коэкстремалей Понтрягина. Более того – мы расширим понятия экстремали и биэкстремали, связав их только с управляемой системой и лишь частью условий из ПМ – теми из них, что должны выполняться в почти каждый момент времени $t \in \overline{\Delta}$, а не в граничных точках $\bar{t}_0, \bar{t}_1$. Поскольку такие „одномоментные" условия в ПМ — это условия трансверсальности, то можно сказать, что упомянутое расширение будет „игнорировать" именно эти условия.

С этой целью введем следующие определения.

Назовем *биэкстремалью управляемой системы* любую тройку функций $\gamma = (\psi(t), \bar{x}(t),\ \ \bar{u}(t) \mid t \in I)$, определенных на некотором интервале времени $I$ и таких, что:

на $I$ пара функций $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ является процессом управляемой системы (1.3);

$\psi(t)$, соответствующая $\bar{\sigma}$, удовлетворяет на $I$ сопряженной системе (1.7);

выполнено условие максимума (1.11), (1.12) с заменой отрезка $\overline{\Delta}$ на интервал $I$ и функцией $q(t)$, удовлетворяющей на $I$ сопряженному уравнению (1.8).

В этом случае пару функций $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in I)$ назовем *экстремалью системы* (она отличается от экстремали задачи тем, что определена на произвольном интервале, и соответствующие ей коэкстремали не обязаны удовлетворять условиям трансверсальности).

Поскольку в этих определениях опущены условия трансверсальности, то ясно, что понятия *экстремали* и *биэкстремали системы* связаны только с управляемой системой и не зависят от функционала и концевых ограничений задачи, так сказать, от терминального блока задачи. Кроме того, биэкстремаль определяется на некотором интервале времени $I$ и для того, чтобы она имела отношение к задаче $P$, мы всегда считаем $I \supset \overline{\Delta}$ (т.е. процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ и двойственная траектория $\psi(t)$ должны допускать продолжение с отрезка $\overline{\Delta}$ на некоторый интервал). Это обстоятельство связано с нефиксированностью моментов времени $t_0, t_1$ в задаче $P$; в задаче $P_\Delta$ с фиксированным временем следует считать $I = \overline{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$, а в задаче с фиксированным $t_0$ — брать в качестве $I$ некоторый полуинтервал $[t_0, T) \supset \overline{\Delta}$.

Из ПМ следует, что решение задачи Р необходимо искать среди экстремалей системы, точнее, среди их экстремальных компонент, допускающих сужение на отрезок $\overline{\Delta}$ с выполнением концевых ограничений.

Более того, нетрудно понять, что *решение любой канонической задачи оптимального управления системой (1.3) находится среди биэкстремалей этой системы.* Поэтому нахождение биэкстремалей и исследование их свойств – это не только необходимый этап решения индивидуальной задачи $P$, но и *одновременный анализ целой гаммы задач оптимального управления, которые имеет смысл рассматривать в рамках данной управляемой системы.* Каждая такая задача получается конкретизацией целевого функционала и концевых ограниче -ний, т.е. функций $l_0, l, k$.

Это обстоятельство имеет важное значение для задач управления социально-экономическими системами. Дело в том, что в таких системах выбор критерия качества и формирование желательных целей (задание ограничений) зачастую неоднозначны и субъективны. Именно поэтому иногда прибегают к векторной оптимизации – оптимизации по Парето (с несколькими критериями качества). Переход к поиску и исследованию биэкстремалей управляемой системы тоже представляет собой альтернативу „жесткой“ оптимизации с раз и навсегда заданными критерием качества и ограничениями.

В идеале применение ПМ к решению конкретной задачи разумно представлять в два этапа. На первом этапе находятся биэкстремали управляемой системы, а на втором производится отбор среди биэкстремалей нужных для решения данной задачи (для чего начинают использоваться терминальные составляющие задачи – функции $l_0, l, k$). Биэкстремали системы будут играть важную роль в обращении ПМ в достаточное условие оптимальности.

Сделаем еще одно замечание.

Назовем биэкстремаль *нетривиальной*, если для нее $\psi(t) \not\equiv 0$ (и $q(t) \not\equiv 0$) на интервале времени $I$. В противном случае (когда $\psi(t) \equiv 0, q(t) \equiv 0$ на $I$), биэкстремаль назовем *тривиальной.*

Тривиальных биэкстремалей „очень много“ — не меньше, чем процессов управляемой системы: если $(x(t), u(t) \mid t \in I)$ — любой процесс, то набор $(\psi \equiv 0, \quad x(t), \quad u(t) \mid t \in I)$ автоматически является биэкстремалью (с $q \equiv 0$).

## 1.3 Принцип максимума как необходимое условие локальной оптимальности

В приведенной выше формулировке ПМ выступает как необходимое условие, которому должен удовлетворять оптимальный процесс. При этом молчаливо предполагалось, что термин „оптимальный процесс“ означает глобальную оптимальность – выполнение неравенства $J(\bar{\sigma}) \le J(\sigma)$ для всех допустимых процессов. Однако такое понимание ПМ является несколько поверхностным и нуждается в уточнении. Дело в том, что *принципу максимума обязан удовлетворять любой процесс, который является лишь локально оптимальным* в некотором смысле, который мы сейчас уточним.

Но прежде, чем сделать это, отметим еще одно важное обстоятельство, которое вытекает из свойства ПМ как необходимого условия локальной оптимальности: если в некоторой задаче глобально оптимальный процесс не существует, то это не означает, что ПМ в ней не применим — ведь в задаче могут быть локально оптимальные процессы, обязанные удовлетворять ПМ. С его помощью мы найдем экстремали задачи — процессы, подозрительные на локальный экстремум.

Перейдем к разъяснению понятия локальной оптимальности в задачах управления.

Во-первых, оно неоднозначно: задача оптимального управления рассматривается на множестве функций, а на этом множестве можно различным образом вводить понятие близости элементов (т.е. понятие типа расстояния или нормы).

Уже в классическом вариационном исчислении были введены понятия *слабого и сильного экстремума* функционала. Применительно к простейшей задаче КВИ (классического вариационного исчисления)

$$\begin{cases} J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min, \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \end{cases} \tag{1.21}$$

на фиксированном отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$ эти понятия определяются следующим образом.

Пусть $\bar{x}(t)$ – допустимая траектория, тогда:

$\bar{x}(t)$ называется *точкой слабого минимума*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что неравенство $J(\bar{x}) \le J(x)$ выполняется для всех допустимых траекторий $x(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in \Delta;$$

$\bar{x}(t)$ называется *точкой сильного минимума*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что неравенство $J(\bar{x}) \le J(x)$ выполнится для всех допустимых траекторий, удовлетворяющих неравенству

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.22}$$

Таким образом, в слабом экстремуме исследуемая траектория $\bar{x}(t)$ сравнивается (по значению функционала) с другими, равномерно близкими к ней как по своим значениям, так и по значениям производной, а в сильном экстремуме к сравнению допускаются все траектории, равномерно близкие к $\bar{x}(t)$, а близости производных не требуется.

Поэтому ясно, что если $\bar{x}(t)$ — точка сильного минимума, то она и подавно будет точкой слабого, причем обратное заключение в общем случае места не имеет.

В теории оптимального управления также имеются понятия слабого и сильного экстремума. Однако помимо них имеется еще важное понятие *понтрягинского экстремума*. Он занимает промежуточное место между слабым и сильным минимумами. Именно ему соответствует ПМ: он является необходимым условием понтрягинского минимума.

Дадим точные определения всем типам локального экстремума в задачах оптимального управления в порядке их усиления.

Пусть $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ — допустимый оптимальный процесс в задаче $P$. Тогда:

$\bar{\sigma}$ называется *точкой слабого минимума*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого другого допустимого процесса $\sigma$, удовлетворяющего условиям

$$|t_0 - \bar{t}_0| < \varepsilon, \quad |t_1 - \bar{t}_1| < \varepsilon,$$

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \|u(t) - \bar{u}(t)\| < \varepsilon \quad \text{п.в. } t \in \Delta \cap \overline{\Delta}, \tag{1.23}$$

выполняется неравенство

$$J(\bar\sigma) \le J(\sigma); \tag{1.24}$$

$\bar\sigma$ называется *точкой понтрягинского минимума*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого другого допустимого процесса $\sigma$, удовлетворяющего условиям

$$|t_0 - \bar t_0| < \varepsilon, \quad |t_1 - \bar t_1| < \varepsilon, \tag{1.25}$$

$$\|x(t) - \bar x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in \Delta \cap \overline{\Delta}, \tag{1.26}$$

$$\int\limits_{\Delta\cap\overline{\Delta}} \|u(t) - \bar u(t)\|\, dt < \varepsilon, \tag{1.27}$$

выполняется неравенство (1.24);

$\bar\sigma$ называется *точкой сильного экстремума*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого другого допустимого процесса $\sigma$, удовлетворяющего условиям (1.25), (1.26), выполняется неравенство (1.24).

Таким образом, во всех типах локального минимума по моментам времени $t_0$, $t_1$ требуется близость к $\bar t_0, \bar t_1$ в конечномерном пространстве $R^2$, а по траекториям – близость графиков $x(t)$ к графику $\bar x(t)$. При фиксированном времени, т.е. в задаче $P_\Delta$, это свойство сводится к равномерной близости $x(t)$ к $\bar x(t)$ на $\Delta$. Что же касается управлений, то по ним требования близости постепенно ослабляются: в слабом экстремуме она „почти равномерная“ (графики $u(t)$ должны быть близкими к графику $\bar u(t)$), в понтрягинском – она лишь интегральная, а в сильном требование близости по управлениям и вовсе отсутствует.

Данное выше определение сильного минимума можно выразить, используя понятие окрестности графика функции. А именно: $\bar\sigma$ называется точкой сильного минимума, если найдется такое открытое множество $Q$ в пространстве $(t, x)$, содержащее график траектории $\bar x(t)$, что для всех допустимых процессов $\sigma$, траектории которых проходят по $Q$, выполняется неравенство (1.24).

Здесь фраза „траектория $x(t)$ проходит по $Q$“ означает выполнение включения

$$(t, x(t)) \in Q \quad \forall t \in \Delta, \tag{1.28}$$

т.е. график $x(t)$ принадлежит множеству $Q$.

Можно сказать и следующим образом: сильный минимум на процессе $\bar\sigma$ означает существование такого открытого множества $Q \subset R \times R^n$, что в задаче $P$, *дополненной ограничением* (1.28), $\bar\sigma$ доставляет глобальный минимум. Это сужение задачи $P$ на множество $Q$ будем обозначать через $P(Q)$.

Поскольку множество $Q$ можно выбрать сколь угодно близким к графику $\bar x(t)$, то эта версия определения равносильна исходной.

Для теории оптимального управления наиболее важными являются понтрягинский и сильный экстремумы. Слабый экстремум не очень типичен из-за разрывности допустимых управлений: если управление $\bar u(t)$ имеет точки разрыва, то и допускаемые к сравнению с ним управления, удовлетворяющие второму неравенству в (1.23), должны иметь те же точки разрыва (наследовать их от $\bar{u}(t)$ ). Иначе говоря, моменты разрыва в слабом экстремуме не варьируются, и в этом состоит его недостаток.

Уточним определения понтрягинского и сильного экстремума в связи со следующим замечанием: если время в задаче фиксировано, то данное определение понтрягинского минимума становится равносильным понятию локального минимума в смысле следующей нормы на множестве процессов

$$\|\sigma - \bar{\sigma}\| = \max_{t\in\Delta} \|x(t) - \bar{x}(t)\| + \int\limits_{\Delta} \|u(t) - \bar{u}(t)\|\, dt. \tag{1.29}$$

Но в действительности это не совсем так, если множество $U$ неограничено. В этом случае правильно определять понтрягинский минимум не в терминах нормы (окрестностей), а на языке последовательностей. Для общей канонической задачи это делается следующим образом:

процесс $\bar{\sigma}$ называется *точкой понтрягинского минимума*, если не существует допустимой последовательности процессов $\sigma^k = (x^k(t), u^k(t) \mid t \in \Delta^k = [t_0^k, t_1^k])$ , удовлетворяющей условиям:

$$t_0^k \to \bar{t}_0, \quad t_1^k \to \bar{t}_1; \tag{1.30}$$

существует компактное множество $K$ в пространстве $(t, u)$ (зависящее от последовательности $\sigma^k$ ), такое, что

$$\big(t, u^k(t)\big) \in K \quad \forall\, t \in \Delta^k,\ \forall\, k, \tag{1.31}$$

$$\max_{t\in\Delta^k\cap\overline{\Delta}} \big\|x^k(t) - \bar{x}(t)\big\| \to 0, \tag{1.32}$$

$$\int\limits_{\Delta^k\cap\overline{\Delta}} \big\|u^k(t) - \bar{u}(t)\big\|\, dt \to 0 \tag{1.33}$$

и $J(\sigma^k) < J(\bar{\sigma}) \qquad \forall\, k$ (т.е. последовательность $\sigma^k$ нарушает минимум на процессе $\bar{\sigma}$ ).

Именно условие ограниченности (1.31) последовательности управлений здесь существенно; что же касается условий (1.32), (1.33), то они вполне аналогичны неравенствам (1.26), (1.27), но выражены на языке последовательностей.

В задачах с ограниченным множеством $U$ условие (1.31) выполняется автоматически, и понтрягинский минимум можно понимать и в прежнем смысле, а при фиксированном времени – как локальной минимум в смысле нормы (1.29).

Говорят, что *последовательность* $\sigma^k$ *сходится к* $\bar{\sigma}$ *в понтрягинском смысле*, если для нее выполнены условия (1.30)-(1.33). Отметим, что обычно используемые для доказательства ПМ пакеты игольчатых вариаций (параметризованные параметром $\varepsilon > 0$ ) удовлетворяют этим условиям.

Для иллюстрации рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u \geq 0$$

на фиксированном отрезке $[0,1]$ и процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}(t) \equiv 0, \bar{u}(t) \equiv 0)$ . Построим последовательность управлений

$$u^k(t) = \begin{cases} \sqrt{k}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right], \\ 0, & t \in \left(\dfrac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

(сосредоточенную на исчезающей последовательности отрезков длины $1/k$ , что роднит ее с игольчатой вариацией) и соответствующую последовательность траекторий

$$x^k(t) = \begin{cases} \sqrt{k}t, & t \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right], \\ \dfrac{1}{k}, & t \in \left(\dfrac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда условия (1.32), (1.33) выполнены, но требование ограниченности (1.31) нарушено. Следовательно, последовательность $\sigma^k = (x^k(t), u^k(t))$ не сходится к $\bar{\sigma}$ в понтрягинском смысле, но для исследования сильного минимума на $\bar{\sigma}$ ее использовать можно.

Теперь перейдем к уточнению понятия сильного минимума.

Мы уже отмечали, что рассмотрение задач оптимального управления в канонической форме во многих отношениях оказывается удобным. Однако при сведении других задач к канонической фазовые переменные оказываются не вполне равноправными: некоторые из них не входят в правую часть динамической системы и лишь линейно входят в целевой функционал и концевые ограничения; это те координаты, которые дополнительно вводятся при сведении интегральных функционалов и ограничений к концевым. Поэтому в определении сильного минимума требовать близости по таким компонентам траекторий неестественно. Например, задача КВИ (1.21) в канонической форме принимает вид

$$\begin{cases} J(x,y,u) = y(t_1) \to \min, \\ \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \\ \dot{y} = F(t,x,u), \quad y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Фаза $y$ не входит в правую часть системы и линейно входит в „концевой блок“ задачи. Между тем, если в этой задаче рассматривать сильный минимум в смысле данного выше определения, то мы должны требовать малости

$$\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}(t), \bar{y}(t))\| \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

— отклонения от исследуемой траектории по двум компонентам. Однако классическое определение сильного минимума для задачи КВИ не требует близости по $y$ –компоненте траекторий – в исходной постановке задачи она вообще отсутствует.

Чтобы избежать излишней жесткости назовем *несущественными* фазовые координаты, которые не входят в правую часть управляемой системы и линейно входят в функции $l_0, l, k$ концевого блока задачи. Остальные фазовые координаты назовем *существенными* и обозначим через $\tilde{x}$ вектор из существенных фаз.

Дадим теперь следующее уточненное определение:

*$\bar{\sigma}$ называется точкой сильного минимума, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех допустимых процессов $\sigma$, удовлетворяющих условиям*

$$|t_0 - \bar{t}_0| < \varepsilon, \quad |t_1 - \bar{t}_1| < \varepsilon,$$

$$\|\tilde{x}(t) - \bar{\tilde{x}}(t)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \in \Delta \cap \overline{\Delta}, \tag{1.34}$$

*выполняется неравенство $J(\bar{\sigma}) \le J(\sigma)$.*

Отметим, что подобное уточнение бессмысленно вводить в определение понтрягинского минимума и, тем более, слабого: в них близость по всем компонентам траекторий — как существенным, так и несущественным — будет автоматически следовать из указанной близости по управлениям, а также малости $\|\tilde{x}(\bar{t}_0) - \bar{\tilde{x}}(\bar{t}_0)\|$ (т.е. условия, более мягкого чем (1.32)).

Наконец, дополним изложение еще одним вспомогательным понятием:

*$\bar{\sigma}$ называется точкой ограниченно-сильного минимума, если для любого числа $M > 0$ в данной задаче, дополненной ограничением $\|u(t) - \bar{u}(t)\| \le M$, $\bar{\sigma}$ является точкой сильного минимума (в уточненном смысле).*

Легко понять, что ограниченно-сильный минимум (или сильный минимум при ограниченных управлениях) имеет смысл рассматривать, если множество $U$ неограничено; в противном случае он совпадает с сильным минимумом.

Очевидны следующие импликации:

сильный минимум $\Rightarrow$ ограниченно-сильный $\Rightarrow$ понтрягинский $\Rightarrow$ слабый минимум.

Еще раз подчеркнем, что *ПМ является необходимым условием понтрягинского минимума*, а значит, и всех других более глубоких (сильных) типов минимума (включая глобальный).

**Пример 3.1** (*с локально оптимальной экстремалью и неограниченным снизу функционалом*). Рассмотрим следующую элементарную задачу в классе управлений на свободном отрезке времени: минимизировать функционал

$$J(T, u) = \int\limits_0^T \left[2t - t^2 u(t)\right] dt, \quad T \ge 0, \quad u(t) \ge 1. \tag{1.35}$$

Заметим, что хотя первое слагаемое в интеграле не зависит от $x, u$, тем не менее оно дает вклад в функционал, зависящий от выбора $T$ (поэтому это слагаемое нельзя опустить, как это было бы возможно при фиксированном $T$).

Далее проведем изложение по шагам.

1) Покажем, что глобально оптимального процесса в задаче (1.35) не существует в силу неограничености множества управлений $U = \{u \mid u \ge 1\}$.

Очевидно, функционал $J$ неограничен снизу, т.е. существует допустимая последовательность $(T_k, u_k(t))$, на которой

$$J(T_k, u_k) \to -\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{1.36}$$

Более того, существуют последовательности вида

$$\begin{gathered} (T_k, u_k \equiv \widetilde{u}),\ T_k \to \infty,\ \widetilde{u} > 1 \text{ — произвольно,} \\ (T_k = \widetilde{T}, u_k \equiv k),\ \widetilde{T} > 0 \text{ — произвольная,} \end{gathered}$$

для которых выполняется условие неограниченности (1.36).

Таким образом, задача (1.35) не имеет решения как в силу неограниченности возможных значений $T \geq 0$, так и в силу неограниченности множества значений управления $U = \{u \mid u \geq 1\}$. При этом вторая причина для нас является более значимой (от первой можно избавиться введением ограничения типа $T \in [0, T^+]$, где $T^+ > 0$).

2) Покажем теперь, что хотя задача не имеет глобально оптимального решения, тем не менее в ней имеется экстремаль, доставляющая ограниченно-сильный минимум функционалу $J$. А именно, докажем, что пара $(\overline{T} = 0, \bar{u} = 1)$ с вырожденным отрезком времени доставляет локальный минимум функционалу $J$. Более точно, покажем, что при любом $M > 1$ не существует допустимой последовательности $(T_k, u_k(t))$, такой что

$$\begin{cases} T_k \to \overline{T} = 0,\ u_k(t) \in [1, M] \quad \forall\, k,\ \forall\, t \in [0, T_k], \\ J(T_k, u_k) < J(\bar{T}, \bar{u}) = 0 \quad \forall\, k. \end{cases} \tag{1.37}$$

Действительно, фиксируя произвольно $M > 1$, выберем число $T^+ > 0$, так, чтобы неравенство

$$\int\limits_0^{T^+} u(t)dt \leq 1, \tag{1.38}$$

выполнялось для всех управлений $u(t) \in [1, M]$. Ясно, что для этого достаточно выбрать $T^+ \leq 1/M;$ тогда для всех пар $(T, u(t))$ с $T \leq T^+$ будем иметь

$$\begin{aligned} J(T, u) &= \int\limits_0^T (2t - t^2 u(t))\, dt = T^2 - \int\limits_0^T t^2 u(t)\, dt = \\ &= T^2 - T^2 \int\limits_0^T u(t)\, dt + \int\limits_0^T 2t \left( \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau \right)\, dt > 0 = J(\bar{T}, \bar{u}) \end{aligned}$$

в силу неравенства (1.38) и положительности последнего интеграла.

3) Покажем, что таких экстремалей бесконечно много. Все они находятся из классического принципа максимума, так как задача является гладкой по времени.

Прежде всего, сведем задачу (1.35) к канонической:

$$\begin{cases} J(\sigma) = y(T) \to \min \\ \dot{y} = 2t - t^2 u,\ y(0) = 0 \\ u(t) \geq 1,\ T \geq 0, \end{cases} \tag{1.39}$$

где $\sigma = (y(t), u(t) \mid t \in [0,T])$. Из анализа на шаге 2) вытекает, что процесс $\sigma^*$ с $T^* = 0$, $u^* = 1$ доставляет в задаче (1.39) сильный минимум при ограниченных управлениях (хотя глобального минимума в ней не существует). Это позволяет применить ПМ, что дает соотношения:

$$H = \psi(2t - t^2 u),\ L = \alpha_0 y(T) + \alpha_1 T,$$
$$\dot\psi = -H_y = 0,\ \psi(T) = -\alpha_0 \ \Rightarrow\ \psi \equiv -\alpha_0,$$
$$\dot q = -H_t = 2\alpha_0 - 2t\alpha_0 u = 2\alpha_0(1 - tu),\ q(T) = -\alpha_1,$$
$$\alpha_0, \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_0 + \alpha_1 > 0,\ \alpha_1 T = 0,$$
$$H(t) = -\alpha_0(2t - t^2 u(t)) + q(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,T],$$
$$H(t,u) + q(t) \le 0 \ \ \forall t \in [0,T] \ \ \forall u \in U.$$

Сразу заметим, что из предположения $\alpha_0 = 0$ следует, что $\alpha_1 = 0$, т.е. условие нетривиальности нарушено, и можно считать $\alpha_0 = 1$, $\psi \equiv -1$. Если теперь допустить, что $\alpha_1 = 0$, то $q(T) = 0$, и из условия максимума при $t = T > 0$ получаем, что функция $H(T,u) = T^2 u - 2T$ неограничена сверху на $U$. Поэтому необходимо $T = 0$. К этому же выводу приводит случай $\alpha_1 > 0$.

Итак, применение ПМ дало следующий результат: имеется бесконечно много экстремалей, для каждой из которых $T = 0$ в силу произвола в выборе значения $u(T) = u(0)$, не играющего никакой роли при вырожденном отрезке времени. (Это вырождение – явление, хотя и не частое, но всё же встречающееся в приложениях.) На указанных экстремалях функционал постоянен $(J = 0)$, и на каждой из них реализуется локальный минимум (не строгий!). В частности, $\bar\sigma$ – тоже экстремаль с этим свойством.

## 1.4 Неравенство Гамильтона-Якоби и базовые достаточные условия оптимальности

Пусть, $\varphi(t,x)$ – числовая функция, определенная на открытом множестве $D$ в расширенном фазовом пространстве $(t,x)$. Будем говорить, что $\varphi$ *обладает свойством монотонности*, или *является K-функцией управляемой системы*, если она *не возрастает вдоль любой траектории системы (1.3)*. Это означает, что если $x(t)$ – произвольная траектория системы (1.3), соответствующая некоторому управлению $u(t)$, то суперпозиция $\varphi(t, x(t))$ является монотонно неубывающей функцией времени на промежутке определения процесса $(x(t), u(t))$.

Проверить столь общее свойство монотонности без дополнительных предположений очень трудно. Поэтому K-функции ищут среди *гладких функций* $\varphi(t,x)$, т.е. непрерывных вместе с частными производными $\varphi_t(t,x)$, $\quad \varphi_x(t,x) = (\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n})(t,x)$.

Классическое уравнение Гамильтона-Якоби для управляемой системы (1.3) имеет вид

$$\Gamma[\varphi](t,x) := \varphi_t + \mathcal{H}(t,x,\varphi_x) = 0.$$

С учетом определения гамильтониана (1.15), (1.16), это уравнение, вместе с парой соответствующих неравенств Гамильтона-Якоби, запишем в следующем виде

$$\Gamma[\varphi](t,x) = \begin{cases} \le 0, \\ = 0, \\ \ge 0, \end{cases} \tag{1.40}$$

$$(t,x) \in Q, \quad (t,x,\varphi_x) \in \mathrm{dom}\mathcal{H}. \tag{1.41}$$

Здесь, как и ранее, $Q$ – открытое множество, позволяющее рассматривать суженную задачу $P(Q)$.

Чтобы выпукло оттенить идейную сторону обсуждаемых методов, не отвлекаясь на технические детали, в качестве решений неравенств и уравнений из (1.40), (1.41) будем рассматривать функции $\varphi(t,x)$, дифференцируемые и липшицевые на $Q$.

Через $\Phi_-(Q)$, $\Phi_0(Q)$, $\Phi_+(Q)$ обозначим множества решений из указанного класса, отвечающие последовательным случаям в (1.40). Заметим, что $\Phi_0(Q)$ можно считать подмножеством двух других множеств. Функции из этих множеств играют различные роли (и сферы применимости), и мы рассмотрим их в отдельности.

### 1.4.1 Функции из $\Phi_-(Q)$ : оценки функционала снизу и базовые достаточные условия оптимальности

Любая гладкая функция $\varphi \in \Phi_-(Q)$, удовлетворяющая неравенству (1.40), (1.41) обладает свойством *сильной монотонности* на $Q$, т.е. невозрастания суперпозиции $\varphi(t,x(t))$ вдоль всех траекторий системы (1.3), проходящих по $Q$.

Действительно, если $(x(t),u(t) \mid t \in [t_0,t_1])$ – произвольный процесс управляемой системы (1.3), то для полной производной сложной функции $\varphi(t,x(t))$ имеем

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x(t)) = \varphi_x(t,x(t)) \cdot \dot{x}(t) + \varphi_t(t,x(t)) \overset{(1.3)}{=} \varphi_x(t,x(t)) \cdot f(t,x(t),u(t)) + \varphi_t(t,x(t)) \overset{(1.40)}{\le} 0,$$

Отсюда следует монотонное невозрастание функции $\varphi(t,x(t))$, т.е. свойство монотонности.

Обозначим через $R(Q)$ множество пар точек $(t_0,x_0),(t_1,x_1)$ из $Q$, соединимых траекториями управляемой системы (1.3), проходящими по $Q$. Назовем $R(Q)$ *множеством достижимых точек* из $Q$. Пусть $\Phi$ – произвольное множество функций из $\Phi_-(Q)$. Тогда $\forall\varphi \in \Phi$ и для любого допустимого процесса $\sigma$ задачи $P(Q)$ выполняется условие монотонности суперпозиции

$$\Delta\varphi(b) := \varphi(t_1,x(t_1)) - \varphi(t_0,x(t_0)) \le 0.$$

Поэтому имеет место включение

$$R(Q) \subset \{b \mid \Delta\varphi(b) \le 0 \ \ \forall\varphi \in \Phi\}. \tag{1.42}$$

Таким образом, любое множество функций $\varphi \in \Phi_-(Q)$ задает *внешнюю оценку* множества достижимых точек. Этот простой факт подсказывает естественный переход к достаточным условиям оптимальности.

Сопоставим множеству $\Phi$ следующую конечномерную *концевую задачу* $EP(\Phi, Q)$ :

$$l_0(b) \to \inf, \quad l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \tag{1.43}$$

$$b = (t_0, x_0\ ;\ t_1, x_1) \in Q \times Q, \quad \Delta\varphi(b) \le 0 \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{1.44}$$

Из включения (1.42) вытекает *оценка снизу значения задачи* $P(Q)$ :

$$\inf\ J(P(Q)) \ge \inf\ l_0(EP(\Phi, Q)).$$

Сформулируем базовые достаточные условия оптимальности для последовательностей процессов, чтобы охватить некоторые вырожденные задачи, не имеющие решения в рассматриваемом классе допустимых процессов.

**Теорема 4.1.** *Пусть имеются семейство* $K$ *-функций* $\Phi \subset \Phi_-(Q)$ *и последовательность процессов*

$$\{\sigma_n = (x_n(t),\ u_n(t)) \mid t \in [t_{0n}, t_{1n}]\},$$

*траектории которых содержатся в* $Q$. *Если соответствующая последовательность*

$$\{b_n = (t_{0n}, x_n(t_{0n})\ ;\ t_{1n}, x_n(t_{1n}))\}$$

*является минимизирующей в концевой задаче* $EP(\Phi, Q)$, *то* $\{\sigma_n\}$ *– минимизирующая последовательность в задаче* $P(Q)$.

Для «стационарного» случая из теоремы вытекают очевидное

**Следствие 4.1.** *Пусть для допустимого процесса* $\bar\sigma$ *задачи* $P(Q)$ *найдется такое множество функций* $\Phi \subset \Phi_-(Q)$, *что вектор*

$$\bar b = (\bar t_0, \bar x(\bar t_0)\ ;\ \bar t_1, \bar x(\bar t_1))$$

*является точкой глобального минимума в концевой задаче* $EP(\Phi, Q)$. *Тогда* $\overline{\sigma}$ *– глобально оптимальный процесс в задаче* $P(Q)$ *(доставляющий сильный минимум в задаче* $P$*).*

Для пояснения заметим, что если

$$\bar\Phi = \{\varphi \in \Phi \mid \Delta\varphi(b) = 0\} \tag{1.45}$$

– множество, соответствующее активным ограничениям-неравенствам в (1.43),(1.44), – то при $\bar\Phi = \emptyset$ теорема 4.1 может выполниться лишь в исключительном случае, когда дифференциальная связь не играет никакой роли ( $\bar b$ является точкой локального минимума $l_0(b)$ при ограничениях $l(b) \le 0$, $k(b) = 0$ ). Отметим также, что условие экстремума в концевой задаче $EP(\Phi, Q)$ естественно интерпретировать как своеобразно заданные граничные условия для функций $\varphi \in \Phi$. В этой трактовке неравенства (и уравнение) Гамильтона-Якоби (1.40), (1.41) приобретают квазивариационный характер.

Вернемся к обсуждению достаточных условий оптимальности.

Любое семейство функций $\Phi$, удовлетворяющее сформулированным утверждениям (т.е. позволяющее установить оптимальность исследуемой последовательности $\{\sigma_n\}$ или процесса $\overline{\sigma}$ в задаче $P(Q)$ ), назовем *локально разрешающим*, а при $Q$ , совпадающим со всем пространством, – *разрешающим* для задачи $P$.

Достаточные условия теоремы 4.1 содержат еще одно неявное экстремальное условие интегрального характера (помимо концевого, связанного с задачей (1.43),1.44)), которому должны удовлетворять последовательность $\{\sigma_n\}$ и некоторые «существенные» функции семейства $\bar{\Phi}$ . Чтобы убедиться в этом, введем множество «активных индексов» для последовательности $\{\sigma_n\}$ в концевой задаче $EP(\Phi, Q)$, положив

$$\bar{\Phi}(\sigma_n) = \{\varphi \in \bar{\Phi} \mid \exists \lim_{n\to\infty} \Delta\varphi(b_n) = 0\}.$$

Именно случай $\bar{\Phi}(\sigma_n) \neq \emptyset$ является особенно важным. Кроме того, для любой функции $\varphi$ определим интегральный функционал

$$\mathcal{F}^[\varphi](x(\cdot), t_0, t_1) = \int\limits_{\Delta} \Gamma[varphi](t, x(t))dt,$$

где $\Delta = [t_0, t_1]$.

Рассмотрим экстремальную задачу $IP(\Phi, Q)$

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(x(\cdot), t_0, t_1) \to \sup, \\ &(t, x(t)) \in Q \quad \forall t \in \Delta, \end{aligned} \tag{1.46}$$

в которой допустимые функции $x(\cdot) \in AC(\Delta)$, и отрезок $\Delta$ не фиксирован. Ясно, что в силу неравенства (1.40) $\forall\varphi \in \Phi$ значение задачи (1.46) неположительно, причем эта задача тривиальна, если функция $\varphi$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби $\Gamma[\varphi] = 0$ (тогда $\mathcal{F} \equiv 0$ ). Справедливо

**Предложение 4.1.** *Пусть семейство $\Phi \subset \Phi_-(Q)$ и последовательность $\{\sigma_n\}$ удовлетворяют теореме 2.1, причем $\Phi(\sigma_n) \neq \emptyset$. Тогда при любом $\varphi \in \Phi(\sigma_n)$*

$$\mathcal{F}(x_n\cdot), t_{0n}, t_{1n}) \to 0,$$

*т.е. последовательность $\{x_n(\cdot), t_{0n}, t_{1n}\}$ максимизирующая в задаче (1.46).*
*В частности, если $\sigma_n = \overline{\sigma} \quad \forall n$, то $\varphi \in \Phi$ тройка $(\overline{x}(\cdot), \overline{t}_0, \overline{t}_1)$ – решение задачи (1.46) и выполнено условие максимума*

$$\Gamma[\varphi](t, \overline{x}(t)) = \max_{x\in Q(t)} \Gamma[\varphi](t, x) = 0 \text{ на } [\overline{t}_0, \overline{t}_1], \tag{1.47}$$

*где $Q(t)$ – сечение множества $Q$.*

**Доказательство** первого утверждения вытекает из определения множества $\bar{\Phi}(\sigma_n)$ и оценки

$$0 \;\geq\; \int\limits_{\Delta_n} \Gamma[\varphi](t, x_n(t))dt \;\geq\; \int\limits_{\Delta_n} \dot{\varphi}(t, x_n(t))dt = \Delta\varphi(b_n) \to 0,$$

а второе утверждение очевидно, поскольку $\varphi(t,\overline{x}(t)) = \text{const}$ на $\overline{\Delta}$ $\forall\varphi \in \bar{\Phi}$.

Если достаточные условия теоремы 4.1 можно рассматривать как проверочные для подозрительной на оптимальность последовательности $\{\sigma_n\}$ (так как задача «восстановления» $\{x_n, u_n\}$ по последовательности $\{b_n\}$ нетривиальна), то дополненные предложением 4.1 они могут служить конструктивной основой поиска решения задачи.

При данном семействе $\Phi$ задачи $EP$ и $IP$ представляются элементарными. Поэтому основные трудности в приложениях теоремы 2.1 связаны с поиском разрешающего семейства и интерпретацией множества $\Phi$. Результаты следующего раздела дают частичный ответ к этим задачам.

**Замечание 4.1.** Как уже говорилось, во введении, нам хотелось бы оставаться в рамках гладкого анализа. Но даже при такой установке рассматриваемый класс вспомогательных функций слишком узок. Например, определенный интерес представляет анализ возможностей семейства линейных функций вида $\varphi =< \psi(t), x >$, где $\psi(t)$ – сопряженная компонента некоторой экстремали [47, 81], т.е. липшицевое решение сопряженной системы. Но такие функции не обладают всюду дифференцируемостью по $t$. Поэтому минимальное расширение класса вспомогательных функций мы получим, если потребуем абсолютную непрерывность функций $\varphi(\cdot, x)$ (с сохранением липшицевости по $(t,x)$ и дифференцируемости по $x$ на $Q$ ) и справедливости обычной формулы восстановления функции по ее полной производной:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\varphi_t(t,x(t)) + < \varphi_x(t,x(t)), \dot{x}(t) >]dt =$$

$$= \varphi(t_1, x_1(t_1)) - \varphi(t_0, x_0(t_0))$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x(t)$ с графиком из $Q$.

**Замечание 4.2.** Укажем простой способ получения решения неравенства Гамильтона–Якоби, связанный с экстремальной задачей $IP$ и условием максимума (1.47).

Предположим, что для некоторой функции $\varphi(t,x)$ из допустимого класса на $Q$ функция

$$m(t) = \sup_{x \in Q(t)} \Gamma[\varphi](t,x)$$

оказалась интегрируемой на интервале $(\tau_0, \tau_1) = \mathrm{pr}_t\, Q$ (здесь справа стоит проекция множества $Q$ на ось $t$ ). Тогда легко проверить, что функция

$$\tilde{\varphi}(t,x) = \varphi(t,x) - \int_{\tau_0}^{t} m(\tau)d\tau$$

будет решением неравенства (1.40), 1.41) на $Q$.

Таким образом, с формальной точки зрения задача нахождения решения неравенства Гамильтона-Якоби представляется проще, чем поиск решения соответствующего уравнения.

**Замечание 4.3.** Чтобы учесть наличие инвариантных многообразий, возможность преобразования управляемой системы (или задачи в целом), а также расширить сферу применимости гладких вспомогательных функций, часто оказывается полезным использовать функции расширенного числа аргументов – в виде суперпозиции

$$\varphi = \varphi(t, x, \eta(t, x, w), w),$$

где $\eta(t, x, w)$ – некоторая гладкая функция, а $\dot{w} = u, \quad w(t_0) = 0$ Имея ввиду известное нелинейное преобразование Гоха [27], условимся называть $w$ гоховской переменной.

Неравенство Гамильтона-Якоби и экстремальные задачи $IP$, $EP$ трансформируются при этом естественным образом. Легко понять, что этот прием соответствует дополнению системы (1.3) уравнениями

$$\dot{y} = \eta_t(t, x, w) + \eta_x(t, x, w) f(t, x, u) + \eta_w(t, x, w) u,$$

$$\dot{w} = u, \quad w(t_0) = 0, \quad y = \eta(t, x, w).$$

В частности, дальнейшее использование функций вида $\varphi(t, y, w)$ соответствует преобразованию системы (1.3) к этой системе уравнений. Если оно сопровождается параллельным преобразованием задачи $P$, то знание разрешающего семейства функций для преобразованной задачи позволяет получить его и для исходной задачи в виде суперпозиции. Именно так обстоит дело применительно к некоторым задачам с линейным неограниченным или импульсным управлением.

### 1.4.2 Множество $\Phi$ и связь с принципом максимума

Можно поставить естественный вопрос об «идентификации» множества $K$-функций из $\Phi$ в рассматриваемых достаточных условиях. Заметим, что с неформальной точки зрения появление этого множества естественно, поскольку мы используем дифференциальное неравенство Гамильтона–Якоби без каких-либо граничных условий. Поэтому произвол в выборе $\Phi$ может носить функциональный характер. Ниже вскрывается одна из возможных интерпретаций множества $\Phi$, связанная с понятием экстремали и неединственностью наборов множителей Лагранжа, обеспечивающих выполнение ПМ для данного процесса.

Установим связь достаточных условий следствия 4.1 с необходимым условием оптимальности (теоремой 2.1).

Пусть $Q$ – окрестность графика траектории $\overline{x}(t)$, семейство $K$-функций $\Phi \subset \Phi_-(Q)$ и процесс $\overline{\sigma}$ удовлетворяют достаточным условиям следствия 4.1. Кроме того, для простоты предположим, что функции данного семейства дважды гладкие на $Q$. Положим $\forall \varphi \in \Phi_-(Q)$

$$(\psi_x(t), q(t)) = (\varphi_x(t, \overline{x}(t)),\ \varphi_t(t, \overline{x}(t))), \quad t \in \overline{\Delta}. \tag{1.48}$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда $\overline{\Phi} \neq \emptyset$, и именно семейство $\overline{\Phi}$ является разрешающим в задаче $P(Q)$.

Функции $\psi(t)$, $q(t)$ липшицевые на $\overline{\Delta}$. Заметим, что из свойства суперпозиционной монотонности функций $\varphi$ и определения множества $\overline{\Phi}$ следует равенство $\dot{\varphi}(t,\overline{x}(t))=0$, отсюда получаем

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\overline{\Phi}\quad & H(t,\overline{x}(t),\psi_x(t),\overline{u}(t))+q(t)=\\ & \qquad =\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\psi(t))+q(t)=0\mid\overline{\Delta},\end{aligned}\tag{1.49}$$

а из неравенства Гамильтона-Якоби – очевидное неравенство

$$\forall\varphi\in\overline{\Phi}\quad H(t,\overline{x}(t),\psi(t),u)+q(t)\ \le 0\mid\overline{\Delta}\times U\tag{1.50}$$

(запись $R(\ldots)\mid C$ означает выполнение свойства $R(\ldots)$ на множестве $C$ ).

Далее, поскольку

$$H(t,x,\varphi_x,\overline{u}(t))+\varphi_t\ \le\mathcal{H}(t,x,\varphi_x)+\varphi_t\le 0\mid Q,$$

то сравнение с равенством (1.49) показывает, что для $\forall\varphi\in\overline{\Phi}$ $\overline{x}(t)$ максимизирует на $\overline{\Delta}$ функцию, стоящую в левой части последнего неравенства (т.е. выполнено условие максимума (1.47)). Приравняв к нулю ее производную по $x$ вдоль $\overline{x}(t)$, получим сопряженное уравнение для $\psi(t)$ :

$$\forall\varphi\in\overline{\Phi}\quad \dot{\psi}(t)=-H_x(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t))\mid\overline{\Delta}.\tag{1.51}$$

Из условия максимума $H$ по $u\in U$, вытекающего из (1.49), (1.50), стандартным образом (см. [47]) устанавливается абсолютная непрерывность функции $H(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t))$ на $\overline{\Delta}$ $\forall\varphi\in\overline{\Phi}$; отсюда дифференцированием по $t$ левой части равенства (1.49) получаем сопряженное уравнение для $q(t)$ :

$$\forall\varphi\in\overline{\Phi}\quad \dot{q}(t)=-H_t(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t))\mid\overline{\Delta}.\tag{1.52}$$

Итак, из анализа свойств функций $\varphi$, отвечающих «активным индексам» из $\overline{\Phi}$, следуют условия (1.48)-(1.52). Они показывают, что градиент $\psi(t)$ любой такой функции вдоль локально оптимальной траектории (по следствию 4.1) является сопряженной компонентой некоторой экстремали $\gamma=(\psi(t),\overline{x}(t),\overline{u}(t)\mid t\in\overline{\Delta})$.

Перейдем к исследованию концевой задачи $EP(\Phi,Q)$, считая, что $\overline{\Phi}$ – некоторый конечномерный компакт.

Заметим сначала, что если $\overline{\Phi}=\emptyset$, то точка $\bar{b}$ должна быть стационарной в конечномерной задаче

$$l_0(b)\to\min,\quad l(b)\le 0,\quad k(b)=0,$$

т.е. существует набор $\omega=(\alpha_0,\alpha,\beta)$ такой, что

$$\alpha_0\ge 0,\quad \alpha\ge 0,\quad <\alpha,l(\bar{b})>=0,$$

$$\alpha_0+|\alpha|+|\beta|\ >0,\quad L_b(\bar{b})=0.$$

Полагая в этом случае $\psi(t) \equiv 0$ для каждого такого набора $\omega$, получим множитель $\lambda = (\omega, \psi(t))$, с которым $\overline{\sigma}$ вырожденным образом удовлетворяет принципу максимума. Этот случай тривиальной экстремали мало интересен.

Пусть теперь $\overline{\Phi} \neq \emptyset$. Тогда необходимые условия локального минимума в точке $\overline{b}$ в задаче $EP(\Phi, Q)$ состоят в следующем (используется уравнение Эйлера в смысле Дубовицкого-Милютина [35, 39] или принцип Лагранжа для задач с континиумом ограничений из [48], теорема 5.1):

$$\begin{aligned} &\exists \ \ \mu = (\alpha_0, \alpha, \beta, c, \gamma_1, \ldots, \gamma_N), \\ &\exists \ \ a_i \in \overline{\mathcal{A}}, \quad i = \overline{1, N}, \quad N \leq \dim b + 1, \end{aligned}$$

такие, что

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad < \alpha, l(\overline{b}) >= 0, \\ &c \geq 0, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum \gamma_i = 1, \\ &\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + c \ > 0, \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{cases} L_{x_k}(\overline{b}) - (-1)^k c \displaystyle\sum_1^N \gamma_i \varphi_x(\overline{t}_k, \overline{x}_k) = 0, \quad k = 0, 1, \\ \\ L_{t_k}(\overline{b}) - (-1)^k c \displaystyle\sum_1^N \gamma_i \varphi_t(\overline{t}_k, \overline{x}_k) = 0, \quad k = 0, 1. \end{cases} \tag{1.54}$$

Тогда $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженной системе (1.53) (в силу ее линейности) и условиям максимума (1.54) (в силу их линейности по $\psi$ и неотрицательности $c$, $\gamma_i$ ). Если в (1.53), (1.54) $c = 0$ или $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| \ = 0$, то $\psi(t) \equiv 0$ , причем во втором случае набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t)) = 0$ вообще не имеет отношения к принципу максимума. Если же $c > 0$ и $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$, то соотношения (1.53)-(1.54) позволяют построить множитель $\lambda \in M$.

Более точно, обозначим через $\Omega(\overline{\Phi})$ множество всех наборов $\omega = (\mu, a_1, \ldots, a_N, \psi(t))$, удовлетворяющих указанным выше условиям (1.53)-(1.54), и положим

$$\Omega_+(\overline{\Phi}) = \{\omega \in \Omega(\overline{\Phi}) \mid \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0\},$$

$$M(\overline{\Phi}) = \mathrm{pr}_\lambda \ \Omega_+(\overline{\Phi}), \quad \Psi(\overline{\Phi}) = \mathrm{pr}_{\psi(t)} \ M(\overline{\Phi})$$

(два последних множества являются образами отображений $\omega \in \Omega_+(\overline{\Phi}) \to \lambda$ и $\lambda \in M(\overline{\Phi}) \to \psi(t)$).

Из проведенного анализа вытекает

**Предложение 4.2.** *а) Для любой функции $\varphi \in \overline{\Phi}$ функция $\psi(t)$ является сопряженной траекторией некоторой экстремали $\gamma$, соответствующей $\overline{\sigma}$;*

*б) если множество $\overline{\Phi}$ является конечномерным компактом, то*

$$\Psi(\overline{\Phi}) \subset con\{\psi(t) \mid a \in \overline{\Phi}\}, \quad M(\overline{\Phi}) \subset M. \tag{1.55}$$

*(здесь $\mathrm{con}\, C$ – коническая оболочка множества $C$ ).*

Наиболее важным представляется второе включение в (1.55).

Во-первых, из него следует, что анализируемые достаточные условия могут быть эффективными, если множество $M$ состоит более чем из одной точки (при естественной нормировке $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$ ). Как уже говорилось выше, в этой ситуации нельзя рассчитывать на существование гладких функций Кротова и Беллмана (см. пример 4.1 в п.4).

Во-вторых, оно показывает, что разрешающее семейство функций $\Phi$ можно пытаться получать, подбирая их так, чтобы вдоль исследуемого процесса $\overline{\sigma}$ градиенты $(\varphi_x, \ \varphi_t)$ совпадали с $\psi$-компонентами наборов $\lambda \in M$ . Но каждая такая компонента однозначно определяется заданием соответствующего набора множителей $(\alpha_0, \alpha, \beta)$, который можно нормировать. Следовательно, множество $\Phi$ можно отождествить с проекцией $M_{\alpha_0,\alpha,\beta} = \mathrm{pr}_{\alpha_0,\alpha,\beta}\, M,$ а множество $\overline{\Phi}$ – с некоторым его компактным подмножеством. Именно такая трактовка «множества индексов» используется в исследуемых ниже примерах.

Конечно, данная интерпретация не является единственно возможной (сомнительно, что таковая вообще существует) и примеры из [80,81] (см. также п.4.3) являются ярким тому подтверждением. Тем не менее, она оказывается полезной.

Закончим этот пункт следующим замечанием, касающимся использования негладких функций. Положим

$$\varphi(t,x) = \max\{\varphi(t,x) \mid \ \varphi \in \overline{\Phi}\}.$$

Тогда $\varphi(t,x)$ является убывающей функцией вдоль траекторий системы (1.3), так как этим свойством обладают $\varphi(t,x),$ и ее верхняя правая производная Дини [49] $D^{+}\varphi(t,x) \le 0,$ а квазидифференциал вдоль $\overline{\sigma}$ (см. [34, 48])

$$\partial\varphi(t,\overline{x}(t)) = \mathrm{co}\ \{\psi(t) \mid \ \varphi \in \overline{\Phi}\}.$$

Отсюда и из [89] следует, что достаточные условия следствия 4 .1 можно эквивалентным образом сформулировать в терминах одной негладкой функции (если $\overline{\Phi}$ – компакт). В качественной теории динамических систем применение негладких функций типа максимума (даже разрывных по $t$ ) и производных Дини давно является традиционным [49].

### 1.4.3 Примеры

Рассмотрим простые примеры, в которых достаточные условия в приведенной версии «срабатывают», а в традиционной оказываются неэффективными. Всюду используется глобальный вариант следствия 4.1 и обозначения $\psi_i = \psi_{x_i}$.

**Пример 4.1**. $\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \le 1$
$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad J = x_2(1).$
В этой линейной задаче имеется единственный допустимый (а значит и оптимальный)

процесс $\overline{\sigma} = (\overline{x}(t) = (t,0),\ \overline{u}(t) = (1,0))$, который является анормальной экстремалью. Вследствие этого даже липшицевой локальной функции Беллмана не существует [36].

Каждый нормированный набор $\lambda \in M$ для $\overline{\sigma}$ характеризуется условиями

$$\psi_1 \equiv -\beta \geq 0, \quad \psi_2 \equiv -\alpha_0 \leq 0, \quad \alpha_0 - \beta = 1$$

(при $\beta = -1 \quad \alpha_0 = 0$, что и указывает на анормальность $\overline{\sigma}$). Вновь следуя интерпретации множества $\Phi$, возьмем функции

$$\varphi(t,x) = -\beta x_1 - \alpha_0 x_2 + \beta t,$$

где $\alpha_0 \geq 0, \quad \beta \leq 0, \quad \alpha_0 - \beta > 0$ (даже без нормировки). Все они являются решением неравенства Гамильтона–Якоби, $\overline{\Phi} = \Phi$, максимум в задаче $IP$ (нестрогий) достигается на любой траектории (а максимум полной производной $\dot{\varphi}$ – на управлении $\overline{u}(t)$), причем задача $EP$ тривиальна:

$$x_2(1) \to \min, \quad -\alpha_0 x_2(1) \leq 0 \ \ \forall \alpha_0 \geq 0.$$

Отсюда $\overline{x}_2(1) = 0$ и процесс $\overline{\sigma}$ глобально оптимален.

**Пример 4.2**. $\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = x_1 u, \quad x_1(0) = 0, \quad |u| \leq 1,$
$J = x_2(0) x_2(1) \to \min$.

В этом примере липшицевой функции Кротова не существует из-за наличия инвариантного многообразия $\{x|\, x_1 = 0\}$ и специфики функционала. Очевидно, что уравнение Гамильтона–Якоби

$$|x_1 \varphi_{x_2}| + \varphi_t = 0 \tag{1.56}$$

имеет два гладких решения $\varphi^{1,2} = \pm x_1$ (поскольку в него не входит производная $\varphi_{x_1}$).

Покажем, что имеется также пара обобщенных, липшицевых решений

$$\varphi^{3,4} = \pm x_2 - t|x_1|, \tag{1.57}$$

понимаемых в смысле [36, 87]. Пользуясь определением модуля в уравнении (1.56), рассмотрим два случая:

1) при выполнении условия

$$x_1 \varphi_{x_2} \geq 0 \tag{1.58}$$

уравнение (1.56) имеет первый интеграл $x_2 - x_1 t = C$, где $C$ – поизвольная постоянная. С учетом условия (1.58), функция $\varphi$ в зависимости от знака переменной $x_1$ может как возрастать по $x_2$, так и убывать. Следовательно, решение уравнения в рассмотренном случае таково:

$$\varphi_{1,2}(t,x) = \pm x_2 \mp x_1 t;$$

2) при выполнении условия

$$x_1 \varphi_{x_2} < 0 \tag{1.59}$$

уравнение (1.56) имеет первый интеграл $x_2+x_1t=C$, где $C$ – поизвольная постоянная. Рассуждая далее по аналогии со случаем 1), получим еще два решения уравнения (1.56):

$$\varphi_{3,4}(t,x)=\pm x_2\pm x_1t.$$

Таким образом, полученные решения $\varphi_i$, $i=\overline{1,4}$ уравнения Гамильтона-Якоби выражаются формулой (1.57).

Из глобальной концевой задачи $EP$, соответствующей семейству $\varphi\in\Phi$, легко получить $\overline{x}_1(1)=\overline{x}_2(1)=\overline{x}_2(0)=0$, так что процесс $\overline{x}(t)\equiv 0$, $\overline{u}(t)$ – любое допустимое управление глобально оптимален, а $\Phi$ – разрешающее семейство.

Но тот же результат можно получить в рамках гладких вспомогательных функций, если воспользоваться замечанием 4.3 (см. конец п.4). В данном случае достаточно ограничиться функциями вида $\varphi(t,x,w)$, где $w$ – гоховская переменная. Тогда уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$|x_1\varphi_{x_1}+\varphi_w|+\varphi_t=0.$$

Гладким функциям $\varphi^{1,2}=\pm x_1$ и $\varphi^{3,4}=\pm(x_2-x_1w)$ соответствует концевая задача

$$x_2(0)x_2(1)\to\min,\quad \pm x_1(1)\le 0,\quad \pm(x_2(1)-x_1(1)w(1)-x_2(0))\le 0$$

с очевидным решением $\overline{x}_1(1)=\overline{x}_2(1)=\overline{x}_2(0)=0$. Следовательно, эти функции также образуют разрешающее семейство. (Предъявленные функции получаются совершенно естественным образом, если применить к данному примеру нелинейное преобразование Гоха [26]).

**Пример 4.3**.

Рассмотрим динамическую модель оптимального распределения ресурсов между факторами производства [32]. Экономическая производственная система использует $n$ факторов и распределяет инвестиции $u$ в их накопление из получаемой прибыли. Эта модель имеет следующее описание:

прибыль системы – $\Pi(x)=\Pi(x_1,\dots,x_n)=f(x)$, где $x$ - вектор затрат факторов, $f(x)$ - известная функция, аналогичная по своим свойствам производственным функциям;

динамика факторов производства описывается системой

$$\dot{x}_i=f(x)u_i, u_i\ge 0, \sum_i u_i=1, i=\overline{1,n}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x}=f(x)u, u(t)\in U=\{u\in R^n_+|\sum_i u_i=1\}. \tag{1.60}$$

В [32] детально описан оптимальный синтез в этой модели для широкого класса целевых функционалов терминального вида и, в частности, установлены магистральные свойства оптимальных траекторий. Мы ограничимся более скромной задачей описания биэкстремалей системы (1.60), удовлетворяющих усиленному условию максимума и, следовательно, с весьма высокой вероятностью порождающих оптимальные процессы в возможных задачах оптимизации системы (1.60). Положим

$$m(\psi) = \max_{u \in U} \langle \psi, u \rangle (\psi \in R^n).$$

В силу компактности этот максимум действительно достигается (возможно, в неединственной точке симплекса $U$ ), причем максимизирующее $\tilde{u}(\psi)$ выбирается по правилу: если $I(\psi)$ - множество индексов $i_1, \ldots, i_k$ из набора $\{1, \ldots, n\}$, для которых

$$\psi_{i_1} = \psi_{i_2} = \ldots = \psi_{i_k} = \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i,$$

то $\tilde{u}_i(\psi) = 0$ при $i \notin I(\psi)$, а для $i \in I(\psi)$ выполняются условия

$$u_i(\psi) \geq 0, \sum_{I(\psi)} u_i(\psi) = 1.$$

Поскольку для системы (1.60) понтрягиан

$$H(x, \psi, u) = f(x) \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i = f(x) \langle \psi, u \rangle, \tag{1.61}$$

то условие максимума $H$ приводит к описанному правилу выбора $\tilde{u}(\psi)$ и гамильтониану

$$\mathcal{H}(x, \psi) = \max_{u \in U} H(x, \psi, u) = f(x) m(\psi). \tag{1.62}$$

Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и вогнута (как любая производственная функция). Тогда из равенств (1.61), (1.62) следует, что усиленные условия МН и М$\mathcal{H}$ выполняются тогда и только тогда, когда

$$\langle \psi, u \rangle \geq 0 \ \ \forall u \in U, \ \text{ т.е. } \ m(\psi) \geq 0. \tag{1.63}$$

Ясно, что это равносильно неравенству $\psi \geq 0$. Кроме того, из постоянства $H$ вдоль любой биэкстремали и из равенства (1.62) следует, что если $f(x) > 0$ при $x > 0$ (последнее следует из неравенства $x_0 > 0$ ), то функция $m(\psi(t))$ не может менять знак, причем условие $m(\psi(t_*)) = 0$ для некоторого $t_*$ влечет равенство $m(\psi(t)) \equiv 0$. Таким образом, все биэкстремали системы (1.60) делятся на три типа: для которых

$$1) \ \ m(\psi(t)) \equiv 0; \ \ 2) \ \ m(\psi(t)) > 0; \ \ 3) \ \ m(\psi(t)) < 0.$$

С учетом условия (1.63) заключаем, что биэкстремали первых двух типов удовлетворяют усиленному условию максимума (или условию вогнутости гамильтониана).

### 1.4.4 Функции из $\Phi_+(Q)$ : оценки функционала сверху и улучшение процессов

Неравенство $\Gamma[\varphi](t,x) \geq 0$ на $Q$, характеризующее функции данного типа, показывает, что замкнутые множества надуровня $\mathcal{L}^+_c(\varphi) = \{(t,x) \mid \varphi(t,x) \geq c\}$ такой функции «почти наверное» будут иметь проходящие по ним траектории, вдоль которых $\varphi$ не убывает. Такие траектории называют *выживающими*, а функцию $\varphi$ – *слабо возрастающей*.

Будем рассматривать задачу $P_0(Q)$ с фиксированной позицией $b_0 := (t_0, x_0) \in Q$ и терминальным ограничением общего вида $b = (t_1, x(t_1)) \in C$ (целевое множество $C$ не обязательно задано функционально, как в (1.2)).

Пусть функция $\varphi \in \Phi_+(Q)$ и удовлетворяет краевому неравенству

$$\varphi(b) \geq -l_0(b) \quad \forall\, b \in C \cap Q. \tag{1.64}$$

Предположим, что имеется траектория $x(\cdot)$, допустимая в задаче $P_0(Q)$, вдоль которой $\varphi$ возрастает, т.е. $\varphi(t_1, x(t_1)) \geq \varphi(t_0, x(t_0)) = \varphi(b_0)$. Тогда для соответствующего допустимого процесса задачи $P_0(Q)$ получаем оценку

$$J(\sigma) = l(t_1, x(t_1)) \geq -\varphi(b_0), \tag{1.65}$$

и, следовательно,

$$\inf J(P_0(Q)) \geq -\varphi(b_0). \tag{1.66}$$

Вопрос заключается в построении такой «выживающей» траектории. Схематично его можно представить следующим образом. Для каждой точки $(t,x) \in Q$ найдем любое

$$u^*(t,x) \in \mathrm{argmax}\mathcal{H}(t,x,\varphi_x) \tag{1.67}$$

и определим траекторию $x^*(\cdot)$ из задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x,u^*(t,x)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.68}$$

Тогда траектория $x(\cdot) = x^*(\cdot)$ будет удовлетворять неравенству (**??**) если только она окажется допустимой по $Q$ и терминальному ограничению.

Более того, если $x^*$ и $\sigma^* = (x^*, u^*)$ допускает продолжение на промежуток времени $I = \mathrm{pr}_t Q$, то для любого другого допустимого процесса $\sigma$ задачи $P_0(Q)$ будем иметь следующую оценку приращения функционала:

$$\Delta J(\sigma^*) = J(\sigma) - J(\sigma^*) \leq \int\limits_{\Delta} [\dot{\varphi}(t, x(t)) - \dot{\varphi}(t, x^*(t))]dt + \int\limits_{I\setminus\Delta} \dot{\varphi}(t, x^*(t))dt - (\varphi(b^*) + l_0(b^*)) \leq 0,$$

причем эта оценка становится более точной, если в краевом условии (1.64) взять равенство.

## 1.5 Достаточные условия в форме ПМ.

Возвращаясь к задаче $P$ изложим наиболее общую из известных версию обращения ПМ в достаточное условие сильного или глобального минимума.

Пусть $\overline{\sigma}$ – допустимый процесс задачи $P$, и найдется такое открытое множество $Q \subset R \times R^n$, содержащее график $\overline{x}$, что $\overline{\sigma}$ является экстремалью системы на интервале $I = \mathrm{pr}_t Q$. Таким образом, $\overline{\sigma}$ допускает продолжение на $I \supset \overline{\Delta}$ и существует соответствующее $\overline{\sigma}$ решение сопряженной системы $\psi(t) \mid t \in I$, такое, что $\gamma = (\psi(t), \overline{\sigma})$ – биэкстремаль системы на $I$.

Для таких $\overline{\sigma}$, $Q$ и $\psi$ определим следующие эквивалентные между собой *расширенные условия максимума* функций $H$ и $\mathcal{H}$:

Условие $MH(\psi, Q)$. Почти всюду на $I$ $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ есть решение задачи

$$H(t, x, \psi(t), u) + \langle \dot{\psi}(t), x \rangle \to \max, \quad x \in Q(t), u \in U. \tag{1.69}$$

Условие $M\mathcal{H}(\psi, Q)$. Почти всюду на $I$ $(\bar{x}(t)$ есть решение задачи

$$\mathcal{H}(t, x, \psi(t)) + \langle \dot{\psi}(t), x \rangle \to \max, \quad x \in Q(t). \tag{1.70}$$

Здесь $Q(t)$ – сечение множества $Q$, и решение понимается в глобальном смысле.

Обозначим через $\Psi_+(Q)$ множество коэкстремалей, соответствующих $\overline{\sigma}$ и удовлетворяющих любому из условий $MH(\psi, Q)$ или $M\mathcal{H}(\psi, Q)$. Если $\Psi_+(Q) \neq \emptyset$, то назовем его *порождающим множеством коэкстремалей* на $Q$ и сопоставим ему множество линейных функций $x \to \varphi^\psi(t, x)$, положив (при $(t, x) \in Q$)

$$\varphi^\psi(t, x) = \langle \psi(t), x - \bar{x}(t) \rangle, \quad \psi \in \Psi_+(Q). \tag{1.71}$$

Легко проверяется, что функции $\varphi^\psi$ обладают свойством сильной монотонности. Тогда обращение ПМ можно сформулировать следующим образом (напомним, что через $P(Q)$ обозначается сужение задачи $P$ на множество $Q$).

**Теорема 5.1.** *Пусть для процесса $\overline{\sigma}$ найдется открытое множество $Q \subset R \times R^n$ и порождающее семейство коэкстремалей $\Psi_+(Q)$, такие, что вектор $\overline{b}$ является точкой глобального минимума в следующей концевой задаче $EP(\Psi_+(Q))$ :*

$$\begin{gathered} l_0(b) \to \min, \quad l(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \\ b \in Q \times Q, \quad \varphi^\psi(t_1, x_1) - \varphi^\psi(t_0, x_0) \le 0 \quad \forall \psi \in \Psi_+(Q) \quad (b = (t_0, x_0, t_1, x_1)). \end{gathered} \tag{1.72}$$

*Тогда $\overline{\sigma}$ – глобально оптимальный процесс в задаче $P(Q)$ (и сильный минимум в задаче $P$).*

Прокомментируем эти достаточные условия.

1) Введение множества $Q$ имеет двоякую цель. С одной стороны, если $Q$ – все пространство (или априорно известная оценка возможных значений $(t, x)$), то теорема 5.1 дает условия глобальной оптимальности; в противном случае мы получаем условия

сильного минимума. С другой – глобально (по $x$ ) условия максимума (1.69), (1.70) могут не выполняться и введение $Q$ придает бóльшую гибкость достаточным условиям, которые становятся локальными. В задаче $P_\Delta$ в качестве $Q$ выступает трубка вдоль $\bar{x}$.

2) Помимо очевидной связи теоремы 5.1 с ПМ, вытекающей из определений биэкстремали и расширенных условий максимума, отметим, что любой набор множителей Лагранжа для точки $\bar{b}$ в задаче (1.72) порождает некоторое $\lambda \in M$.

3) Расширенные условия максимума можно заменить на более жесткие *условия вогнутости* понтрягиана $H(t, x, \psi(t), u)$ и гамильтониана $\mathcal{H}(t, x, \psi(t))$ на $\mathrm{co}(Q(t) \times U)$ и $\mathrm{co}(Q(t)$ соответственно. Они часто выполняются в моделях экономики. Например, в известной модели распределения инвестиций между факторами производства

$$\dot{x}_i = F(x)u_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad U = \{u \in R^n_+ \mid \sum_1^n u_i = 1\},$$

где $F \geq 0$ – вогнутая при $x = (x_i) \geq 0$ производственная функция, обсуждаемые условия вогнутости выполнены при любой $\psi(t) \geq 0$. А это типично для содержательных задач в данной модели.

4) Главное достоинство достаточных условий теоремы 5.1. в сравнении с другими известными вариантами обращения ПМ состоит в отсутствии априорных предположений единственности нормированного набора Лагранжа $\lambda$, соответствующего $\overline{\sigma}$, нормальности данного процесса (т.е. свойства $\alpha_0 > 0 \ \ \forall \lambda \in M$ ) и управляемости. Отметим, что даже в линейно-выпуклых задачах (например, ляпуновского типа), достаточность ПМ формулируется с единственным набором $\lambda$ при $\alpha_0 > 0$.

# Глава 2

# Бипозиционные решения неравенств Гамильтона-Якоби в задачах оптимального управления

## 2.1 Монотонные $L$-функции: определения и критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби

Монотонные $L$-функции (функции типа Ляпунова) играют фундаментальную роль в теории управления; систематизированное представление о их многообразных приложениях дает книга [84]. В современной теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби сильно и слабо монотонные $L$-функции играют роль полурешений этого уравнения — суб- и суперрешений соответственно.

В теории оптимального управления широкое применение нашли сильно монотонные $L$-функции. Это связано с тем, что в достаточных условиях К. Каратеодори для задач вариационного исчисления [66], Р. Беллмана [11, 67] и В.Ф. Кротова [38, 77] для задач оптимального управления использовались именно сильно монотонные $L$-функции (под разными названиями — проверочные функции, функции Беллмана, функции Кротова, $K$-функции и т.д.). Они же доминируют в многочисленных работах по обоснованию этих достаточных условий и различным модификациям [3, 16, 21, 36, 51, 53, 55, 56, 58, 63, 64, 68, 72, 77, 88, 89, 92].

Слабо монотонные $L$-функции используются в теории оптимального управления значительно реже, хотя играют важную роль в задачах инвариантности, управляемости и достижимости [17, 33, 50, 55, 60, 84]. При определенных граничных условиях они обладают двумя важными взаимосвязанными свойствами: во-первых, они дают оценку сверху значения задачи [51, 84] и, следовательно, позволяют идентифицировать некоторые неоптимальные процессы; во-вторых, они порождают внутреннюю оценку множества достижимости управляемой системы. Оба эти свойства используются для вывода необходимых условий оптимальности, ассиметричных к канонической теории достаточных условий. Отметим работы [55, 56, 92], в которых слабо и сильно монотонные $L$-функции использовались параллельно и последовательно.

Приведем необходимые нам понятия монотонности $L$-функций, подходящим образом адаптируя определения и критерии в форме неравенств Гамильтона-Якоби из [75, 84, 89] к рассматриваемым далее задачам.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u(t) \in U, \tag{S}$$

где множество $U \subset R^m$ замкнуто, а вектор-функция $f(t,x,u) : R \times R^n \times U \to R^n$ непрерывна; эти предположения на систему назовем *предварительными*.

Для части излагаемых далее критериев предварительных предположений недостаточно, поэтому введем следующие *стандартные предположения*:

(H1) функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных и локально липшицева по $x$ равномерно по $(t,u) \in R \times U$;

(H2) существует действительное число $c > 0$, такое что $|f(t,x,u)| \leq c(1+|x|)$ на $R^{n+1} \times U$;

(H3) множество $f(t,x,U)$ выпукло $\forall\,(t,x) \in R^{n+1}$;

(H4) множество $U$ компактно.

Через $\sigma$ обозначим любой *процесс управляемой системы* $(S)$, состоящий из пары функций $\big(x(t),u(t) \mid t \in \Delta\big)$, определенных на некотором отрезке времени $\Delta = [t_0,t_1]$ (зависящем от $\sigma$), и таких, что траектория $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а управление $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на $\Delta$, причем соотношения $(S)$ выполнены почти всюду на $\Delta$. Считаем, что $\dim x = n$, $\dim u = m$. Таким образом, любой процесс системы $(S)$ записывается в виде $\sigma = \big(x(t),u(t) \mid t \in \Delta\big)$ (отрезок $\Delta$ не фиксирован и зависит от $\sigma$).

Обозначим через $\mathcal{T}_\Delta(x_0)$ множество траекторий системы $(S)$ на $\Delta$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, а через $\mathcal{T}_\Delta^-(t_1,x_1)$ — множество траекторий системы $(S)$ на $\Delta$ с граничным условием $x(t_1) = x_1$ (левосторонние решения $(S)$ в обратном времени).

Введем функцию Понтрягина

$$H(t,x,\psi,u) = \psi \cdot f(t,x,u)$$

(запись $a \cdot b$ обозначает скалярное произведение векторов $a$ и $b$), нижний гамильтониан

$$h(t,x,\psi) = \min_{u \in U} H(t,x,\psi,u)$$

и расширенный нижний гамильтониан

$$\bar{h}(t,x,p) = p_t + h(t,x,p_x),$$

где $p=(p_t,p_x)\in R\times R^n$.

Для произвольной гладкой функции $\varphi(t,x):R\times R^n\to R$ через

$$\dot\varphi(t,x,u)=\varphi_t(t,x)+H\big(t,x,\varphi_x(t,x),u\big)$$

обозначим её *полную производную в силу системы* $(S)$. Заметим, что для локально липшицевых функций полная производная определена почти всюду, а

$$\varphi_t(t,x)+\min_U H\big(t,x,\varphi_x(t,x),u\big)=\bar h\big(t,x,\nabla\varphi(t,x)\big),\quad \nabla\varphi=(\varphi_t,\varphi_x)$$

— запись классического оператора Гамильтона-Якоби. Зачастую используются верхний гамильтониан и операция $\max$ вместе $\min$, что несущественно; как правило, мы будем использовать нижний гамильтониан.

## Некоторые производные негладких функций

Напомним некоторые понятия негладкого анализа [36, 75, 84, 89].

Пусть даны функция $g:R^n\to R$, точка $y\in R^n$, в которой $g$ конечна, и вектор $w\in R^n$. Предел

$$D_+g(y)(w)=\limsup_{\eta\to0+,\ v\to w}\frac{g(y+\eta v)-g(y)}{\eta}$$

называется *верхней производной Дини функции* $g$ *в точке* $y$ *по направлению* $w$. Нижнюю производную Дини можно определить формулой

$$D_-g(y)(w)=-D_+\big(-g(y)\big)(w).$$

Заметим, что если $g$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $y$, то

$$D_+g(y)(w)=\limsup_{\eta\to0+}\frac{g(y+\eta w)-g(y)}{\eta}.$$

Вектор $\xi\in R^n$ называется *проксимальным субградиентом* функции $g$ в точке $y$, если существует окрестность $\Omega$ точки $y$ и константа $c\ge0$, такие что

$$g(z)\ge g(y)+\xi\cdot(z-y)-c|z-y|^2\quad\forall z\in\Omega.$$

Множество всех проксимальных субградиентов в точке $y$ обозначается $\partial_P g(y)$ и называется *проксимальным субдифференциалом.* Это множество может оказаться пустым (например, для функции $g(y)=-|y|$ множество $\partial_P g(0)=\varnothing$). Если функция $g$ дифференцируема в точке $y$, то $\partial_P g(y)\subset\{g'(y)\}$; равенство выполняется, если функция $g$ дважды непрерывно дифференцируема в $y$. Существование проксимального градиента $\xi$ в точке $y$ означает возможность локальной аппроксимации снизу функции $g$ квадратичной функцией: точка $\big(y,g(y)\big)$ есть точка касания графика функции $g$ и минорирующей параболы крутизны $\xi$.

*Проксимальный супердифференциал* $\partial^P g(y)$ функции $g$ в точке $y$ может быть определен следующим образом:

$$\partial^P g(y) = -\partial_P\big(-g(y)\big).$$

Свойство $\partial^P g(y) \neq \varnothing$ означает, что в точке $y$ функция $g$ может быть локально аппроксимирована сверху квадратичной с касанием графиков в точке $\big(y, g(y)\big)$.

## Сильно и слабо монотонные $L$-функции

Пусть $I = (a, b)$ — некоторый интервал времени, а $G_I = I \times R^n$ — соответствующий цилиндр.

**Определение 1.** Непрерывную функцию $\varphi : G_I \to R$ назовем:

а) *сильно возрастающей* на $G_I$ (в прямом времени), если

$$\big(\forall\, (t_0, x_0) \in G_I\big)\big(\forall\, t_1 \in I, t_1 \geq t_0\big)\big(\forall\, x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0)\big)$$

$$\varphi\big(t, x(t)\big) \text{ возрастает на } [t_0, t_1]\ ^1;$$

б) *слабо возрастающей* на $G_I$ (в прямом времени), если

$$\big(\forall\, (t_0, x_0) \in G_I\big)\big(\forall\, t_1 \in I, t_1 \geq t_0\big)\big(\exists\, x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0)\big) :$$

$$\varphi\big(t, x(t)\big) \text{ возрастает на } [t_0, t_1].$$

Как видно из определения, сильно и слабо возрастающие $L$-функции отличаются друг от друга тем, что первые возрастают вдоль *всех траекторий* системы $(S)$, проходящих по $G_I$, а слабо монотонные — лишь вдоль *некоторых* (хотя бы одной). Свойства сильной и слабой монотонности очевидным образом распространяются на убывающие $L$-функции, а также могут рассматриваться в обратном времени (относительно системы $(-S)$). Дополним определение 1 некоторыми типами монотонных $L$-функций, используемыми в дальнейшем.

**Определение 2.** Непрерывную функцию $\varphi : G_I \to R$ назовем:

в) *слабо убывающей* на $G_I$ (в прямом времени), если

$$\big(\forall\, (t_0, x_0) \in G_I\big)\big(\forall\, t_1 \in I, t_1 \geq t_0\big)\big(\exists\, x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0)\big) :$$

$$\varphi\big(t, x(t)\big) \text{ убывает на } [t_0, t_1];$$

[1]Неубывающие функции мы называем возрастающими, а невозрастающие — убывающими, т.е. возрастание (убывание) трактуется в нестрогом смысле.

г) *сильно убывающей на $G_I$ в обратном времени*, если

$$\big(\forall\,(t_1,x_1)\in G_I\big)\big(\forall\,t_0\in I, t_0\le t_1\big)\big(\forall\,x(\cdot)\in \mathcal{T}^-_{[t_0,t_1]}(x_1)\big)$$
$$\varphi\big(t,x(t)\big) \text{ убывает в обратном времени на } [t_0,t_1];$$

д) *слабо возрастающей на $G_I$ в обратном времени*, если

$$\big(\forall\,(t_1,x_1)\in G_I\big)\big(\forall\,t_0\in I, t_0\le t_1\big)\big(\exists\,x(\cdot)\in \mathcal{T}^-_{[t_0,t_1]}(x_1)\big):$$
$$\varphi\big(t,x(t)\big) \text{ возрастает в обратном времени на } [t_0,t_1].$$

Множества всех функций, удовлетворяющих условиям а), в), г), д), последовательно обозначим через $L_{s\uparrow}(G_I)$, $L_{w\downarrow}(G_I)$, $L^-_{s\downarrow}(G_I)$ и $L^-_{w\uparrow}(G_I)$, где верхний индекс « $-$ » указывает на обратную направленность времени. Если множество $G_I$ совпадает с расширенным фазовым пространством $R\times R^n$ системы $(S)$, то будем опускать указание области в этих обозначениях.

## Критерии сильной и слабой монотонности

Для конструктивной проверки свойств монотонности и разработки методов нахождения $L$-функций с этими свойствами используются соответствующие инфинитезимальные (дифференциальные) критерии типа неравенств Гамильтона-Якоби [75, 84, 89]. Мы приведем их краткий обзор для различных классов $L$-функций и предположений относительно свойств управляемой системы.

*Пусть выполнены стандартные предположения* (H1)–(H4). *Тогда включение $\varphi\in L_{s\uparrow}(G_I)$ эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:*

$$\dot\varphi(t,x,u)\ge 0\quad \forall\,u\in U,\quad \mathring{\forall}\,(t,x)\in G_I, \tag{2.1}$$

$$\bar h\big(t,x,\nabla\varphi(t,x)\big)\ge 0\quad \mathring{\forall}\,(t,x)\in G_I, \tag{2.2}$$

*когда $\varphi$ локально липшицева; и*

$$\inf_{u\in U} D_+\big(-\varphi(t,x)\big)\big(-1,-f(t,x,u)\big)\ge 0\quad \forall(t,x)\in G_I, \tag{2.3}$$

$$\bar h(t,x,p)\ge 0\quad \forall\,p=(p_t,p_x)\in\partial_P\varphi(t,x),\quad \forall\,(t,x)\in G_I, \tag{2.4}$$

*когда $\varphi$ непрерывна.*

Заметим, что множества $L_{s\uparrow}(G_I)$ и $L^-_{s\downarrow}(G_I)$ совпадают даже в классе непрерывных $L$-функций.

Примечательно, что неравенства (2.1), (2.2) гарантируют сильную монотонность локально липшицевой функции даже при предварительных предположениях на систему $(S)$ (неравенство (2.2) должно быть дополнено условием достижимости функцией $H(t,x,\varphi_x(t,x),\cdot)$ своей точной нижней грани на $U$ при почти всех $(t,x)\in G_I$).

Теперь укажем инфинитезимальные критерии для слабо монотонных функций в предположениях (H1)–(H4).

*Включение* $\varphi \in L_{w\downarrow}(G_I)$ *эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:*

$$\forall\,(t,x)\in G_I \quad \exists\, u\in U: \quad \dot\varphi(t,x,u)\le 0,$$
$$\bar h\big(t,x,\nabla\varphi(t,x)\big)\le 0 \quad \forall\,(t,x)\in G_I, \tag{2.5}$$

*когда* $\varphi$ *гладкая; и*

$$\inf_{u\in U} D_-\varphi(t,x)\big(1,f(t,x,u)\big)\le 0 \quad \forall (t,x)\in G_I,$$
$$\bar h(t,x,p)\le 0 \quad \forall\, p=(p_t,p_x)\in\partial_P\varphi(t,x), \quad \forall\,(t,x)\in G_I, \tag{2.6}$$

*когда* $\varphi$ *непрерывна.*

Заметим, что в стандартных предположениях подмножества гладких функций из $L_{w\downarrow}(G_I)$ и $L^-_{w\uparrow}(G_I)$ совпадают; однако уже для класса липшицевых функций это не так (см. ниже пример 1).

*Для непрерывной функции* $\varphi$ *включение* $\varphi\in L^-_{w\uparrow}(G_I)$ *эквивалентно выполнению любого из следующих неравенств:*

$$\inf_{u\in U} D_-\big(-\varphi(t,x)\big)\big(-1,-f(t,x,u)\big)\le 0 \quad \forall (t,x)\in G_I,$$
$$\bar h(t,x,p)\le 0 \quad \forall\, p=(p_t,p_x)\in\partial^P\varphi(t,x), \quad \forall\,(t,x)\in G_I. \tag{2.7}$$

Наконец, отметим, что критерии с обобщенными производными справедливы и для полунепрерывной снизу $\varphi$ [2].

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\dot x = u, \quad u\in[-1,1], \quad G_I = R\times R,$$

для которой расширенный нижний гамильтониан имеет вид

$$\bar h(t,x,p) = p_t - |p_x|, \quad p=(p_t,p_x)\in R^2.$$

Возьмем вогнутую липшицевую функцию $\varphi(t,x)=t-|x|$ и воспользуемся проксимальными критериями. Выпишем для $\varphi$ проксимальные суб- и супердифференциалы:

$$\partial_P\varphi(t,x) = \begin{cases} \{(1,1)\}, & x<0,\\ \varnothing, & x=0,\\ \{(1,-1)\}, & x>0;\end{cases}$$

$$\partial^P\varphi(t,x) = \begin{cases} \{(1,1)\}, & x<0,\\ \{(1,d)\mid d\in[-1,1]\}, & x=0,\\ \{(1,-1)\}, & x>0.\end{cases}$$

[2] Для полунепрерывной снизу функции $\varphi$ сильное возрастание на $G_I$ означает, что $\forall\,(t_0,x_0)\in G_I$, $\forall\, t_1\in I$, $t_1\ge t_0$, $\forall\, x(\cdot)\in\mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0)$ неравенство $\varphi\big(t,x(t)\big)\ge\varphi(t_0,x_0)$ выполняется при всех $t\in[t_0,t_1]$. Остальные свойства монотонности определяются подобным образом.

Очевидно, что $\varphi$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби в субдифференциальной форме —

$$\bar{h}(t,x,p)=0, \quad \forall\, p=(p_t,p_x)\in\partial_P\varphi(t,x), \quad \forall\,(t,x)\in R^2$$

— и поэтому является слабо убывающей в прямом времени в силу (2.6) (и, одновременно, сильно возрастающей в силу (2.4)) . Но она не удовлетворяет супердифференциальному условию слабого возрастания в обратном времени (2.7). Действительно, для $(1,0)\in\partial^P\varphi(t,0)$ выполняется неравенство

$$\bar{h}\big(t,0,(1,0)\big)=1>0 \text{ при всех } t\in R.$$

В данном примере наличие свойства слабого убывания в прямом времени и отсутствие слабого возрастания в обратном времени можно установить без использования инфинитизимальных критериев следующим образом. Возьмем произвольную точку $(t_0,x_0)$, $x_0\geq 0$. Выберем процесс $\tilde{\sigma}$ управляемой системы с траекторией $\tilde{x}(t)=t-t_0+x_0$.

$$\Rightarrow \quad \forall\, t\geq t_0 \quad \varphi\big(t,\tilde{x}(t)\big)=t-|t-t_0+x_0|=t_0-x_0 \quad (=const).$$

Если $x_0<0$, то выбирать следует процесс с траекторией $\tilde{x}(t)=-t+t_0+x_0$. Значит $\varphi$ слабо убывает на $R\times R$ в прямом времени.

Теперь покажем, что $\varphi$ не является слабо возрастающей на $R\times R$ в обратном времени, т.е.

$$\exists\,(t_1,x_1): \quad \forall\, x(\cdot)\in\mathcal{T}^-_{[t_0,t_1]}(x_1) \quad \exists\, t_*\leq t_1 \quad \varphi\big(t_*,x(t_*)\big)<\varphi(t_1,x_1).$$

В качестве $(t_1,x_1)$ возьмем $(0,0)$. Очевидно, что

$$\forall\, t<0 \qquad \max_{x(\cdot)\in\mathcal{T}^-_{[t_0,0]}(0)}\varphi\big(t,x(t)\big)=t$$

достигается при $\tilde{x}(t)\equiv 0$, но функция $\varphi\big(t,\tilde{x}(t)\big)=t$ строго убывает в обратном времени, и при $t_*<t_1=0$ имеем $\varphi\big(t_*,\tilde{x}(t_*)\big)<0$.

Обратную ситуацию иллюстрирует функция $\hat{\varphi}(t,x)=t+|x|$, слабо возрастающая в обратном времени, но не обладающая свойством слабого убывания в прямом времени.

Отметим, что обе функции $\varphi$ и $\hat{\varphi}$ удовлетворяют п. в. классическому уравнению Гамильтона-Якоби, соответствующему равенству в (2.5), но при этом не обладают ожидаемыми свойствами слабой монотонности. □

Свойства монотонности могут быть установлены и другими критериями, использующими, например, суб- и супердифференциалы, обобщенный дифференциал Кларка, конусы касательных направлений и другие конструкции негладкого анализа [36,51,59–62, 89], а также специальные предположения полувогнутости функции $\varphi$ [3,55,56,63,65,75], однако, мы ограничимся представленными.

Отметим, что неравенства Гамильтона-Якоби для $L$-функций приведены без каких-либо краевых условий. Однако в дальнейшем будет показано, что они носят *квазивариационный характер*: краевые условия неявно задаются через конечномерную концевую задачу.

**Замечание 1.** В дальнейшем выполнение свойств монотонности будет требоваться не только на цилиндрических множествах вида $G_I$, но и на некоторых произвольных связных множествах $G \subset R \times R^n$ (необязательно открытых). В качестве таких множеств будут выступать области, на которых рассматриваются задачи, оценки интегральных воронок управляемых систем или окрестности траекторий исследуемых на оптимальность процессов. Критерии монотонности в этих случаях должны выполняться в точках множеств $G$.

## Управления, экстремальные относительно $L$-функций

В методе неравенств Гамильтона-Якоби и динамическом программировании приходится иметь дело с разрывными позиционными управлениями (стратегиями), соответствующими им решениями управляемой системы и стратегиями, экстремальными по отношению к решению неравенства Гамильтона-Якоби того или иного типа. Опишем кратко подход к этим задачам.

а) Пусть $\bar{G}_\Delta = [t_0, t_1] \times R^n$ и $v(t,x) : \bar{G}_\Delta \to U$ — некоторое позиционное управление, определенное всюду на указанном множестве, а в остальном — произвольная (как правило разрывная) функция. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f\big(t, x, v(t,x)\big), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

для системы $(S)$, замкнутой позиционным (синтезирующим) управлением $v$. Поскольку (2.8) — система с разрывной правой частью, то необходимо указать, что понимается под её решением.

Мы примем концепцию Красовского–Субботина [37, 76] (см. также [53, 54]) как конструктивную и весьма универсальную.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка времени $\Delta = [t_0, t_1]$:

$$\rho = \{t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N+1} = t_1\}.$$

Этому разбиению и заданному начальному условию поставим в соответствие *ломаную Эйлера* $x_\rho(\cdot)$ как решение системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_\rho(t) = f\big(t, x_\rho(t), u(\theta_i, x_\rho(\theta_i))\big), \quad x(t_0) = x_0, \\ &t \in [\theta_i, \theta_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, N \end{aligned}$$

с кусочно постоянным управлением. Тогда *решение Эйлера* разрывной системы (2.8) определяется как любой равномерный предел некоторой последовательности ломаных $\{x_{\rho_k}\}$ при $|\rho_k| \to 0$, где

$$|\rho_k| = \mathrm{diam}(\rho_k) := \max\{\theta_{i+1} - \theta_i \mid 0 \le i \le N\}.$$

Таким образом, системе (2.8) сопоставляется множество решений Эйлера.

б) Пусть $\varphi$ — классическое (гладкое) решение неравенства Гамильтона-Якоби (2.2) на $\bar{G}_\Delta = \Delta \times R^n$. Определим *$\varphi$-экстремальное многозначное отображение*

$$U_\varphi(t,x) = \operatorname*{Argmin}_{u\in U} H(t,x,\varphi_x,u) \tag{2.9}$$

При стандартных предположениях оно имеет непустые, замкнутые образы и полунепрерывно сверху. Любой селектор этого отображения — функцию $\varphi : \bar{G}_\Delta \to U$ назовем *$\varphi$-экстремальным позиционным управлением.* Соответствующие ему решения описаны в п. а).

## 2.2 Канонические достаточные условия оптимальности. Сравнение с альтернативными подходами

Рассматривается следующая задача оптимального управления (задача $(P)$):

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad u(t) \in U, \tag{S}$$

$$q \in Q, \tag{2.10}$$

$$J[\sigma] = l(q) \to \min. \tag{2.11}$$

Здесь через $\sigma$ обозначается любой *процесс управляемой системы* $(S)$, состоящий из пары функций $\big(x(t), u(t) \mid t \in \Delta\big)$, определенных на некотором отрезке времени $\Delta = [t_0, t_1]$ (зависящем от $\sigma$), и таких, что траектория $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а управление $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на $\Delta$, причем соотношения $(S)$ выполнены почти всюду на $\Delta$. Считаем, что $\dim x = n$, $\dim u = m$. Таким образом, любой процесс описывается равенством $\sigma = \big(x(t), u(t) \mid t \in \Delta\big)$. Далее, через $q$ обозначается *концевой вектор*, соответствующий любому процессу, т.е. $q = q(\sigma) = \big(t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)\big)$. Функции $f$, $l$ и множества $U$, $Q$ заданы.

Процесс $\sigma$ назовем *допустимым*, если его компоненты удовлетворяют ограничению (2.10). Пусть $\Sigma$ — непустое множество всех допустимых процессов задачи $(P)$. Ставится задача поиска *оптимального процесса* на множестве $\Sigma$, т.е. пары функций

$$\bar{\sigma} = \big(\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \bar{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]\big) \in \Sigma,$$

для которой

$$J[\bar{\sigma}] \le J[\sigma] \quad \forall\, \sigma \in \Sigma.$$

Заметим, что здесь и далее $J[\bar{\sigma}] = l(\bar{q})$, где $\bar{q} = q(\bar{\sigma}) = \big(\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0); \bar{t}_1, \bar{x}(\bar{t}_1)\big)$.

Сформулированная задача является общей задачей оптимального управления в форме Майера без поточечных фазовых и смешанных ограничений. Её общность состоит в не разделенной зависимости концевого ограничения (2.10) и целевого функционала (2.11) от начальной и конечной позиции $\big(t_0, x(t_0)\big)$, $\big(t_1, x(t_1)\big)$. Как известно, другие типы задач оптимального управления без поточечных фазовых и смешанных ограничений приводятся к данной *стандартной форме* путем элементарных приемов. В частности, задача $(P_\Delta)$ *с фиксированным отрезком времени* $\Delta = [t_0, t_1]$ получается из $(P)$ исключением моментов $t_0$, $t_1$ из концевых векторов $q$ ( $q = \big(x(t_0), x(t_1)\big)$ ), из аргументов функции $l$ и включением концевого множества $Q$ в пространство $R^{2n} = R^n \times R^n$. А задача $(P_0)$ *с фиксированным левым концом* $x(t_0) = x_0$ — исключением подвектора начальных позиций $q_0 = \big(t_0, x(t_0)\big)$ из $q$, фиксацией соответствующих аргументов функции $l$ и рассмотрением вместо множества $Q$ его сечения — $Q_1 = \{(t_1, x_1) \mid (t_0, x_0; t_1, x_1) \in Q\}$.

Для ясности мы ограничиваемся задачей на минимум (а не на инфимум) целевого функционала $J$, хотя многие результаты без труда переносятся и на случай минимизирующих последовательностей $\{\sigma^k\} \subset \Sigma$. Часть таких ситуаций охватывается соответствующими замечаниями.

Далее, помимо условий глобальной оптимальности исследуемого процесса $\bar{\sigma}$ нас будут интересовать и условия *сильного минимума* на этом процессе. Для задачи $(P)$ это понятие формализуется следующим образом [21, 80].

Пусть $G$ — открытое множество в пространстве переменных $t$, $x$, содержащее график исследуемой траектории $\bar{x}(\cdot)$. Обозначим через $(P(G))$ сужение задачи $(P)$ на множество $G$, т.е. задачу $(P)$, дополненную ограничением

$$\big(t, x(t)\big) \in G \quad \forall\, t \in \bar{\Delta}.$$

Тогда процесс $\bar{\sigma}$ *доставляет сильный минимум* в задаче $(P)$, если найдется такое открытое множество $G \subset R \times R^n$, $\big(t, \bar{x}(t)\big) \in G \ \ \forall\, t \in \bar{\Delta}$, что $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче $(P(G))$.

Для задач с фиксированным временем это определение сводится к традиционному понятию сильного минимума в смысле полунормы $||\sigma|| = ||x(\cdot)||_{C(\Delta)} = \max\limits_{\Delta} |x(t)|$.

Описанное сужение задачи $(P)$ и переход к локальной оптимальности оказываются полезными с точки зрения развиваемых методов, поскольку расширяют сферу их применимости. Например, к ним естественно обращаться, если подходящие решения неравенств типа Гамильтона-Якоби не существуют глобально.

Всюду в дальнейшем предполагается, что функции $f$, $l$ непрерывны, а множества $U$, $Q$ замкнуты. Эти *предварительные предположения* будут уточняться по ходу изложения.

Приведем базовую, прединфинитезимальную версию достаточных условий канонической теории с семейством негладких традиционных $L$-функций [3, 19, 21, 71, 80, 81]. На этом же уровне общности рассмотрим методологически близкие модификации достаточных условий оптимальности Кротова [23, 77], Каратеодори [66, 68, 84, 87, 89, 90] и проведем их сравнение с $K$-достаточными условиями.

### 2.2.1 Базовые $K$-достаточные условия оптимальности

**Определение 2.2.1.** Множество

$$\mathcal{R} = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \exists\, x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0) : x(t_1) = x_1\}$$

назовем *множеством соединимых точек* системы $(S)$.

Очевидно, что имеет место равенство

$$\min(P) = \min\{l(q) \mid q \in \mathcal{R} \cap Q\},$$

где для краткости принято обозначение $\min(P) := \min\{J[\sigma] \mid \sigma \in \Sigma\}$ [3].

Пусть $\Phi = \{\varphi^\alpha(t,x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset L_{s\uparrow}$ — произвольное семейство сильно возрастающих $L$-функций. Введем множество

$$E(\Phi) = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \varphi^\alpha(t_1, x_1) - \varphi^\alpha(t_0, x_0) \geq 0 \;\forall\, \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{R} \subset E(\Phi)$; поэтому назовем $E(\Phi)$ *внешней оценкой* множества $\mathcal{R}$.

Рассмотрим следующую конечномерную задачу $(EP(\Phi))$, которую будем называть *концевой*:

$$l(q) \to \inf; \quad q \in E(\Phi) \cap Q.$$

Очевидно, что имеет место оценка

$$\inf(EP(\Phi)) \leq \min(P),$$

откуда вытекают достаточные условия глобальной оптимальности канонической теории для задачи $(P)$.

**Теорема 2.2.1.** *Пусть для процесса $\bar\sigma \in \Sigma$ существует такое семейство $\Phi = \{\varphi^\alpha(t,x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset L_{s\uparrow}$, что концевой вектор $\bar q$ является точкой глобального минимума в задаче $(EP(\Phi))$. Тогда процесс $\bar\sigma$ доставляет глобальный минимум в задаче $(P)$.*

Любое множество функций $\Phi$, удовлетворяющее условиям теоремы 2.2.1 вместе с процессом $\bar\sigma$, будем называть *разрешающим* для задачи $(P)$ и процесса $\bar\sigma$ (в смысле канонической теории оптимальности) или, кратко, $K$-разрешающим. Очевидно, что множество $\Phi$ является разрешающим для задачи $(P)$ и $\bar\sigma$ тогда и только тогда, когда

$$J[\bar\sigma] = \min(EP(\Phi)).$$

Ясно, что множество $\Phi$, разрешающее для некоторого $\bar\sigma$, позволяет установить оптимальность всех глобально оптимальных процессов задачи $(P)$, и поэтому называется разрешающим ($K$-разрешающим) для задачи $(P)$.

[3] В дальнейшем используются подобные обозначения для значений других рассматриваемых оптимизационных задач.

**Замечание 2.1.** Требование сильного возрастания функций $\varphi \in \Phi$ в теореме 2.2.1 можно ослабить, если априори известно некоторое множество $W \subset R^{n+1}$, сильно инвариантное для системы $(S)$ [17, 84], или априорно оценивающее траектории системы в расширенном фазовом пространстве. Это свойство в данном контексте означает выполнение включения

$$(t, x(t)) \in W \text{ на } \Delta \text{ вдоль всех } \sigma \in \Sigma.$$

В этом случае можно требовать сильной монотонности функций $\varphi \in \Phi$ только вдоль траекторий, график которых проходит по $W$, а в экстремальной задаче $(EP(\Phi))$ добавить ограничения

$$(t_0, x(t_0)) \in W, \quad (t_1, x(t_1)) \in W.$$

Подобным образом следует поступать и в случае зависимости $W$ от начальной позиции $(t_0, x_0)$. Попутно отметим, что нарушение свойств управляемости системы, как правило, доставляет серьезные трудности для методов кротовского типа.

Для внешних оценок множеств достижимости и соединимых точек управляемых систем могут использоваться дифференциальные неравенства, отличные от Гамильтона-Якоби, например, типа Чаплыгина или Важевского [42, 44]. По отношению к $K$-достаточным условиям оптимальности они рассматриваются как вспомогательные (экзогенные) для формирования априорных оценок фазовых состояний динамической системы. Их более целенаправленное и систематическое применение к задачам теории управления естественно реализовать в рамках общего метода сравнения (метода вектор-функций Ляпунова) в динамике систем [9,10,43,78]. Ясно, что этот комментарий связан с замечанием 2.1.

Обратим внимание, что неравенства Гамильтона-Якоби для $L$-функций разрешающего множества носят *квазивариационный характер*: через концевую задачу $(EP(\Phi))$ неявно задается краевое условие в форме неравенств, обращающихся в равенство в точке $\bar{\sigma}$. Действительно, мы имеем неравенства

$$l(q) \geq l(\bar{q}),$$
$$\Delta\varphi(q) := \varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_0, x_0) \geq 0 \quad \forall\, \varphi \in \Phi$$

на множестве $Q$, причем в невырожденном случае (см. параграф 2.4) для «существенных» $\varphi \in \Phi$ $\Delta\varphi(\bar{q}) = 0$. Поэтому точность аппроксимации множества $\mathcal{R}$ оценкой $E(\Phi)$ играет не столь определяющую роль, как может показаться с первого взгляда.

Ключевым моментом канонических условий оптимальности является оперирование семейством $\Phi = \{\varphi^\alpha(t, x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ сильно возрастающих $L$-функций, зависящим от некоторого произвольного параметра. Поскольку условие сильной монотонности функций $\varphi^\alpha$ является неявным дифференциальным неравенством в частных производных, то множество $\mathcal{A}$ может быть бесконечномерным и состоять из функций, например, задающих начальное (граничное) условие для дифференциального неравенства. Иначе говоря, множество $\Phi$ может иметь функциональный произвол. Показательные примеры с таким свойством рассмотрел А. А. Милютин [80, 81] (см. также [3]).

Для дальнейшего анализа задачи $(P)$ нам важен частный случай, когда в роли параметров выступает начальная позиция $(t_0, x_0)$ или финальная $(t_1, x_1)$, так что множество $\Phi$ можно описать равенством вида

$$\Phi = \{\varphi(t, x; t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in Q_0\},$$

в котором функция $\varphi$ обладает нужным свойством монотонности по основным аргументам $(t, x)$ при фиксированных $(t_0, x_0) \in Q_0$. Именно эта интерпретация параметра приводит к понятию *бипозиционных* $L$-функций, на важность и естественность которых для задачи $(P)$ было обращено внимание в работах [3,23]. Однако в данном разделе мы не будем развивать эту тему, оставаясь в рамках традиционных $L$-функций и их семейств (множеств).

### 2.2.2 Модифицированные достаточные условия Кротова с множеством $L$-функций

Приведем модификацию условий Кротова [23,24,73], использующую произвольное множество $L$-функций $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, и основанную на конструкции укороченного обобщенного лагранжиана задачи $(P)$.

Рассмотрим семейство (по $\varphi \in \Phi_K$) конечномерных задач $(EP_K(\varphi))$:

$$\varkappa[\varphi](q) := l(q) + \varphi(t_0, x_0) - \varphi(t_1, x_1) \to \inf; \quad q \in E(\varphi) \cap Q,$$

где $\varkappa$ выступает в качестве лагранжиана, а множество $E(\varphi) = E(\{\varphi\})$ строится по одноэлементному семейству $\{\varphi\}$. Очевидно, что для любой $\varphi \in \Phi_K$

$$\min(P) \geq \inf(EP_K(\varphi)),$$

откуда следует оценка

$$\min(P) \geq \sup_{\varphi \in \Phi_K} \{\inf(EP_K(\varphi))\} =: v(\Phi_K) \quad \forall\, \Phi_K \subset L_{s\uparrow}$$

и достаточные условия глобальной оптимальности типа Кротова с множеством $L$-функций.

**Теорема 2.2.2.** *Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое множество $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, что*

$$J[\bar{\sigma}] = v(\Phi_K).$$

*Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P)$.*

Любое множество $\Phi_K$, удовлетворяющее теореме, будем называть *разрешающим по Кротову.*

Поясним, что достаточные условия Кротова в стандартном и наиболее распространенном в приложениях варианте оперируют одной сильно возрастающей функцией $\varphi$, причем следствие монотонности — включение $q \in E(\varphi)$ — не входит в ограничения концевой задачи $(EP_K(\varphi))$, и дополнительно требуется постоянство $\varphi$ вдоль траектории $\bar{x}(\cdot)$. Последнее условие автоматически следует из равенства $J[\bar{\sigma}] = v(\{\varphi\})$. Следствие монотонности было включено в концевую задачу в работе [19], а впоследствии В.Ф. Кротовым в один из вариантов достаточных условий Кротова (см. [77, теорема 2.7], а также [16]). В обобщенных достаточных условиях Кротова используются также последовательности функций $\{\varphi^k\} \subset L_{s\uparrow}$, переход к которым инспирирован стремлением приблизить достаточные условия к необходимым (см. работы Р. Винтера с коллегами [86–88, 90, 91] и обзор в [77]). Отметим, что наиболее общие необходимые условия оптимальности обсуждаемого типа [68,88] оперируют всем множеством липшицевых (и даже гладких) сильно монотонных $L$-функций (решений соответствующего неравенства Гамильтона-Якоби). Однако они установлены только для задачи $(P_0)$ с фиксированной начальной позицией $(t_0, x_0)$, причем рассматриваются как обоснование метода проверочных функций Каратеодори (см. следующий раздел). Для задачи $(P)$ необходимость условий Кротова не установлена[4].

Вернемся к связи $K$-условий с кротовскими.

**Предложение 2.2.1.** *Если множество $\Phi_K$ — разрешающее по Кротову, то оно является разрешающим и в смысле канонической теории.*

*Доказательство.* Из неравенства

$$\inf(EP_K(\varphi)) \leq \inf(EP(\varphi)) \quad \forall\, \varphi \in \Phi_K,$$

справедливого в силу включения $\Phi_K \subset L_{s\uparrow}$, и совпадения допустимых множеств в задачах $(EP_K(\varphi))$ и $(EP(\varphi))$, получаем

$$l(\bar{q}) = v(\Phi_K) \leq \inf(EP(\Phi_K)) \leq l(\bar{q}).$$

Отсюда заключаем, что множество $\Phi_K$ — $K$-разрешающее. □

Нетрудно привести примеры, в которых для некоторого множества $\Phi \subset L_{s\uparrow}$ реализуется строгое неравенство

$$v(\Phi) < \inf(EP(\Phi)),$$

причем множество $\Phi$ оказывается разрешающим в смысле $K$-достаточности. Следовательно, канонические достаточные условия оптимальности являются более тонкими, нежели условия кротовского типа.

[4] Все доказательства этих необходимых условий базируются на построении разрешающей последовательности $L$-функций как функций Беллмана последовательности задач с оштрафованными терминальными ограничениями задачи $(P_0)$. Ясно, что этот подход динамического программирования не применим к задаче $(P)$ без радикальных изменений.

**Пример 2.1** ( [19]). $\dot{x} = 0 \cdot u$, $|u| \le 1$, $J[\sigma] = x(0)x(1) \to \min$. Линейные функции $\varphi^{1,2}(x) = \pm x$, очевидно, сильно возрастают (удовлетворяют неравенству $\bar{h} = \varphi_t \ge 0$ и являются первыми интегралами системы). Положим $\Phi = \{\varphi^1, \varphi^2\}$. Тогда $E(\Phi) = \{(x_0, x_1) \mid x_0 = x_1\}$ и совпадает с множеством точек, соединимых траекториями системы. Из концевой задачи $(EP(\Phi))$ получаем её решение $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = 0$ и, следовательно,оптимальными оказываются все процессы вида $\bar{\sigma} = (\bar{x} \equiv 0, \bar{u}(\cdot)$ допустимо) (заметим, что произвольное допустимое управление экстремально относительно $\varphi^1$ и $\varphi^2$, т.е. любое $u(t) \in \arg\min\{\varphi_x^{1,2} \cdot 0 \cdot u \mid |u| \le 1\}$). Таким образом, $\Phi$ — разрешающее множество в смысле канонической теории (причем для всех модификаций данного примера).

В то же время гладкой функции Кротова в этом примере не существует [19], а если взять $\Phi_K = \Phi$, то это множество оказывается не разрешающим по Кротову. Действительно, рассмотрим сначала задачу $(EP_K(\varphi^1))$:

$$\varkappa[\varphi^1](x_0, x_1) = x_0 x_1 - x_1 + x_0 \to \inf; \quad x_1 - x_0 \ge 0.$$

Зафиксируем произвольное $x_0 < 0$ и рассмотрим последовательность точек $q^k = (x_0, x_1^k)$, где $x_1^k = -kx_0$, $k > 0$. Очевидно, что эти точки допустимы в задаче $(EP_K(\varphi^1))$ и

$$\varkappa[\varphi^1](q^k) = -kx_0^2 + (k+1)x_0 \to -\infty, \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, $\inf(EP_K(\varphi^1)) = -\infty$. Аналогично обстоит дело с задачей $(EP_K(\varphi^2))$, откуда заключаем, что $v(\Phi) = -\infty < J[\bar{\sigma}]$ и теорема 2.2.2 не работает.

Для перехода в дальнейшем к бипозиционным $L$-функциям отметим следующее обстоятельство: если взять нижнюю огибающую $K$-разрешающего множества $\Phi$, т.е. $\varphi_*(x) = \min\{\varphi^1(x), \varphi^2(x)\} = -|x|$, то множество $E(\varphi_*)$ оказывается гораздо шире $E(\Phi)$, а $\varphi_*$ — не разрешающей. Таким образом, стандартный для задач типа $(P_0)$ переход от множества разрешающих функций к одной $L$-функции не работает. Однако если заменить $\varphi^1$, $\varphi^2$ на бипозиционные $\tilde{\varphi}^1(x; x_0) = x - x_0$, $\tilde{\varphi}^2(x; x_0) = -x + x_0$ (также из $L_{s\uparrow}$), то множество $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2\}$ — $K$-разрешающее, как и его нижняя огибающая липшицевая $\tilde{\varphi}_*(x; x_0) = -|x - x_0|$, причем $E(\tilde{\varphi}_*) = E(\Phi)$.

Мы видим, что в классе бипозиционных $L$-функций оказался возможным переход к разрешающей нижней огибающей. Этот факт будет установлен далее в целом для задач типа $(P)$.

**Пример 2.2** ( [24]). $\dot{x} = xu$, $u \in [0, 1]$, $x(0)$, $x(1)$ свободны, $J[\sigma] = x^4(0) + x^4(1) \to \min$. Очевидно, что процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x} \equiv 0, \bar{u} \equiv 0)$ является глобально оптимальным. Неравенство Гамильтона-Якоби для гладких сильно возрастающих $L$-функций имеет следующий вид:

$$\bar{h} = \varphi_t + \min_{u \in [0,1]}\{\varphi_x x u\} = \begin{cases} \varphi_t + \varphi_x x, & \varphi_x x < 0, \\ \varphi_t, & \varphi_x x \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, для $L$-функций, не зависящих времени, сильное возрастание гарантируется неравенством $\varphi_x x \ge 0$. Из функций простой структуры ему удовлетворяет

$\varphi = x^2$, и мы положим $\Phi = \{\varphi = x^2\}$. Тогда $\varphi$-экстремальное позиционное управление $u^\varphi(x) \equiv 0$, а в концевой задаче $(EP(\Phi)) = (EP(\varphi))$:

$$x_0^4 + x_1^4 \to \min; \quad x_1^2 - x_0^2 \geq 0$$

решением является вектор $\bar{q} = (\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = 0)$. Тем самым формально — с помощью $K$-достаточных условий — установлена глобальная оптимальность $\bar{\sigma} = 0$.

Рассмотрим теперь кротовскую концевую задачу $(EP_K(\varphi))$:

$$\varkappa[\varphi](q) = x_0^4 + x_1^4 - x_1^2 + x_0^2 \to \min; \quad x_1^2 - x_0^2 \geq 0.$$

Покажем, что $\bar{q}$ не является её решением и, следовательно, $\varphi = x^2$ — не функция Кротова. Действительно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеются допустимые точки $q^\varepsilon = (x_0 = \varepsilon^2, x_1 = \varepsilon) \to \bar{q} = 0$, для которых

$$\varkappa[\varphi](q^\varepsilon) = -\varepsilon^2 + o(\varepsilon^4) < 0 = \varkappa[\varphi](\bar{q}).$$

Следовательно, условия теоремы 2.2.2 не выполнены с $\Phi_K = \{\varphi = x^2\}$, т.е. это множество не является разрешающим по Кротову.

Заметим, что эта задача абсолютно вырождена в смысле [3, 24] — дифференциальная связь в ней не играет роли, и $\varphi \equiv 0$ — разрешающая функция Кротова и для $K$-условий. Этот пример показывает, во-первых, что запас возможных $K$-разрешающих $L$-функций шире множества разрешающих по Кротову. Во-вторых, минимум в точке $\bar{\sigma}$ здесь «пологий» — четвертого порядка $\gamma = l(q)$, а не типичного $\gamma' = |q|^2$ (порядок минимума здесь понимается в смысле [22, 73]), — а в таких случаях не тривиальные $L$-функции простой структуры (квадратичные) не могут быть разрешающими по Кротову.

**Пример 1.3** получается из предыдущего заменой функционала на $J[\sigma] = x(0)x(1)$. Тогда оценка, порождаемая функцией $\varphi = x^2$, оказывается слушком грубой, но пример можно решить $K$-достаточными условиями, если учесть, что множества $W_1 = \{x \geq 0\}$, $W_2 = \{x \leq 0\}$ сильно инвариантны, причем функции $\varphi^1(x; x_0) = x - x_0$, $\varphi^2(x; x_0) = x_0 - x$ сильно возрастают на $W_1$, $W_2$ соответственно. Поскольку задача рассматривается на $W_1 \cup W_2$, то она распадается на две, скажем, $(P(W_1))$ и $(P(W_2))$. Легко убедиться, что бипозиционные функции $\varphi^1$, $\varphi^2$ — разрешающие для этих задач. Например, для $(P(W_1))$ соответствующая концевая задача

$$x_0 x_1 \to \min; \quad x_1 - x_0 \geq 0, \quad x_0, x_1 \geq 0$$

имеет решение $\bar{q} = (\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_1 = 0)$, а $\varphi^1$-экстремальное управление

$$u^1(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \text{любое } u \in U, & x = 0 \end{cases}$$

порождает траекторию $\bar{x} \equiv 0$ с произвольным допустимым $\bar{u}(\cdot)$. Тот же результат дает задача $(P(W_2))$, так что оптимальные процессы исходной задачи получены.

Если этот прием декомпозиции задачи использовать в методе Кротова с функциями $\varphi^1$, $\varphi^2$ в качестве пробных, то мы не достигнем цели — концевые вспомогательные задачи не имеют решения (инфимумы в них равны $-\infty$). Например, для $(P(W_1))$ задача $(EP_K(\varphi^1))$ такова:

$$\varkappa[\varphi^1](q) = x_0 x_1 + x_0 - x_1 \to \inf; \quad x_1 - x_0 \geq 0, \quad x_0, x_1 \geq 0.$$

Если взять любое $x_0 \in (0,1)$, а $x_1 = k > 0$, то получим допустимую последовательность, на которой $\varkappa \to -\infty$ при $k \to +\infty$.

Таким образом, с данными $\varphi^1$, $\varphi^2$ метод Кротова не работает, и причина здесь, в общем-то, та же, что и в примере 2.2: на оптимальных процессах задачи реализуется минимум более тонкий («пологий»), нежели линейные порядки $\gamma^{1,2} = \varphi^{1,2} \geq 0$ в задачах $(P(W_1))$, $(P(W_2))$ соответственно; поэтому обобщенный лагранжиан $\varkappa$ оказывается грубым.

Использованный прием учета инвариантных множеств достаточно специфичен, и гораздо более предпочтительнее другой, более универсальный способ решения этой и других задач с линейным управлением — использование нелинейного преобразования Гоха[5] [18, 20, 21]. Если ориентироваться на его комбинацию с методом неравенств Гамильтона-Якоби, то необходимо, во-первых, дополнить управляемую систему гоховской фазовой переменной $w$ с элементарной динамикой

$$\dot{w} = u, \quad w_0 := w(t_0) = 0$$

и, во-вторых, искать далее подходящие $L$-функции (в данном контексте — разрешающие) из условия независимости полной производной $\dot{\varphi}$ в силу дополненной системы от управления. В нашем примере имеем:

$$\dot{\varphi} = \varphi_t + \varphi_x x u + \varphi_w u, \quad \varphi = \varphi(t, x, w)$$

и условие независимости дает линейное уравнение в частных производных

$$x\varphi_x + \varphi_w = 0.$$

Его общее решение имеет вид $\varphi(t, x, w) = S\big(t, \eta(x, w)\big)$, где

$$\eta(x, w) = xe^{-w}$$

— первый интеграл характеристического уравнения $dx/dw = x$, а $S(t, y)$ — произвольная гладкая функция.

[5] Обычно это преобразование применяется для расширения задачи путем введения импульсных режимов. Но в задачах с ограниченным множеством $U$ такое расширение не возможно, хотя само преобразование оказывается эффективным, поскольку приводит к новой задаче с элементарной зависимостью от управления.

Заметим, во-первых, что дальнейший ход решения равносилен применению $K$-условий к преобразованной задаче, которая получается из исходной заменой $(x,u) \to \big(y = \eta(x,w), w, u\big)$, и, во-вторых, если $S$ не зависит от $t$, то указанные $\varphi$ тривиально удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби дополненной системы (являются её первыми интегралами) и, следовательно, сильно возрастают. Из этого множества $L$-функций, как обычно, сначала попробуем простейшую — $S(y) = y$, т.е. полагаем $\varphi(x,w) = \eta(x,w)$. Соответствующая концевая задача $(EP(\varphi))$ такова:

$$x_0 x_1 \to \min; \quad x_1 e^{-w_1} - x_0 = 0, \quad w_1 = w(1) \in [0,1]$$

(последнее ограничение следует из очевидной оценки $w(t) \in [0,t]$). Её решение ($\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = \bar{w}_1 = 0$), как и ранее, задает оптимальные процессы задачи с траекторией $\bar{x} \equiv 0$, а функция $\varphi = \eta$ — разрешающая.

**Пример 2.4.** $\dot{x} = 0, \dot{y} = xu, |u| \le 1, y(0) = 0, x^2(0) + y^2(1) \le 1$, $J[\sigma] = y(1) \to \min$.

Расширенный нижний гамильтониан управляемой системы имеет вид

$$\bar{h}(t,x,y,p) = p_t - |p_y x|, \quad p = (p_t, p_x, p_y).$$

Так как фаза $y$ не существенна (не входит в правую часть системы, а целевой функционал линеен по $y$), то решения неравенства $\bar{h} \ge 0$ естественно искать в виде

$$\varphi(t,x,y) = S(t,x) + y,$$

где функция $S$ подлежит нахождению. Для нее получается дифференциальное неравенство

$$S_t(t,x) - |x| \ge 0,$$

которое является обыкновенным, так как не содержит $S_x$. Поэтому выгодно перейти к равенству, т.е. к уравнению Гамильтона-Якоби. Интегрируя, получим липшицевую $S(t,x) = t|x|$ и, следовательно, $\varphi(t,x,y) = t|x| + y$, а $\varphi$-экстремальное позиционное управление

$$u^{\varphi}(x) \in -\operatorname{sign} x = -\operatorname{sign} x_0.$$

Положим $\Phi = \{\varphi, \varphi' = x\}$, где $\varphi'$ — очевидный первый интеграл системы. Тогда в концевой задаче $(EP(\Phi))$ оптимальны две точки

$$\bar{q} = \left(\bar{x}_0 = \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \bar{y}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \tilde{q} = \left(\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tilde{y}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Соответствующие им программные управления находятся с помощью $u^{\varphi}$:

$$\bar{u}(t) = u^{\varphi}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \equiv -1, \quad \tilde{u}(t) = u^{\varphi}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \equiv 1.$$

Таким образом, $K$-условия дают два оптимальных процесса.

Тот же результат можно получить, если вместо $\Phi$ рассмотреть множество $\Phi_1 \subset L_{s\uparrow}$ из двух гладких функций

$$\varphi^2(x, y, w) = y - xw, \quad \varphi^3(t, z) = t + w,$$

где $w$ — гоховская переменная (см. пример 1.3). Введение гоховских переменных часто оказывается эффективным в линейных по управлению системах, обладающих плохими свойствами управляемости [21].

Заметим, что ни одно из семейств $\Phi$, $\Phi_1$ не удовлетворяют модификации достаточных условий оптимальности Кротова даже с учетом замечания 2.1.

### 2.2.3 Модифицированные достаточные условия Каратеодори

Метод проверочных функций Каратеодори [66, 68, 84, 87, 89, 90], как и метод Беллмана, непосредственно не применим к задаче $(P)$ с общим концевым ограничением. Поэтому рассмотрим более простую задачу $(P_0)$ с фиксированной начальной позицией $(t_0, x_0)$:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ &x(t_0) = x_0, \quad q := (t_1, x(t_1)) \in Q, \\ &J[\sigma] = l(t_1, x(t_1)) \to \inf, \end{aligned}$$

где целевая функция $l$ непрерывна, а множество $Q$, задающее терминальное ограничение, замкнуто.

Приведем формулировку модифицированных условий Каратеодори, которая оперирует семейством сильно возрастающих $L$-функций. Сразу отметим, что на проверочные функции Каратеордори $\varphi$ накладывается дополнительное граничное условие

$$\varphi(t, x) \leq l(t, x) \quad \forall (t, x) \in Q. \tag{2.12}$$

**Теорема 2.2.3.** *Пусть для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ существует такое множество функций $\Phi_C \subset L_{s\uparrow}$, удовлетворяющих граничному условию (2.12), что*

$$J[\bar{\sigma}] = v(\Phi_C) := \sup\{\varphi(t_0, x_0) \mid \varphi \in \Phi_C\}.$$

*Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P_0)$.*

Множество $\Phi_C$, удовлетворяющее вместе с процессом $\bar{\sigma} \in \Sigma$ условиям теоремы 2.2.3, назовем *разрешающим по Каратеодори.*

**Предложение 2.2.2.** *Если для допустимого процесса $\bar{\sigma}$ множество $\Phi_C$ является разрешающим по Каратеодори, то $\Phi = \Phi_C$ является разрешающим множеством в смысле канонического подхода.*

*Доказательство.* При $\Phi = \Phi_C$ из (2.12) и ограничений задачи $(EP(\Phi))$ следует цепочка неравенств

$$l(q) \geq \varphi(q) \geq \varphi(t_0, x_0) \quad \forall\, \varphi \in \Phi_C,$$

откуда

$$\inf(EP(\Phi)) \geq v(\Phi) = l(\bar{q}).$$

Но строгое неравенство здесь невозможно, поскольку $\bar{q}$ — допустимая точка в задаче $(EP(\Phi))$. Следовательно, $\bar{q}$ доставляет глобальный минимум в задаче $(EP(\Phi))$, и процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в соответствии с теоремой 2.2.1. □

Таким образом, любое разрешающее по Каратеодори множество является разрешающим в смысле $K$-достаточных условий оптимальности. Теорема 2.2.1 оставляет больше свободы в выборе подходящих $L$-функций, поскольку они не обязаны удовлетворять граничному условию (2.12).

**Пример 2.5** ( [24]). $\dot{x} = xu + b(t)u$, $x(0) = 0$, $u \in [0,1]$, $J[\sigma] = x^3(1) \to \min$, где функция $b(t) \geq 0$ на $[0,1]$. Очевидно, что система имеет сильно инвариантное множество $W = \{(t,x) \mid x \geq 0\}$; с учетом замечания 2.1 можно ограничиться рассмотрением функций, сильно возрастающих лишь на $W$. Тогда для $\varphi = x$ имеем

$$\dot{\varphi} = \dot{x} \geq 0 \text{ на } W,$$

и, следовательно, $\varphi$ сильно возрастает на $W$. Положим $\Phi = \{\varphi = x\}$. Соответствующая задача $(EP(\Phi))$

$$x^3 \to \min; \quad x \geq 0$$

имеет глобальный минимум в точке $\bar{x} = 0$. Следуя канонической теории, заключаем, что $\bar{\sigma} = 0$ — глобально оптимальный процесс. Однако функция $\varphi = x$ не удовлетворяет граничному условию (2.12), поэтому она не является проверочной по Каратеодори. Более того, $\varphi$ не является и функцией Кротова, потому что точка $\bar{x} = \bar{x}(1) = 0$ не доставляет глобального минимума в задаче $(EP_K(\varphi))$:

$$\varkappa[\varphi](x) = x^3 - x \to \min; \quad x \geq 0.$$

В этом примере $\bar{\sigma}$ — вырожденная экстремаль, т.е. удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в нестрогой форме ($H_u(\bar{\sigma}) \equiv 0$). Однако даже наиболее полные квадратичные достаточные условия локальной оптимальности для вырожденных экстремалей [70] не позволяют установить и локальной оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ (так как $l_q(\bar{q}) = 0$, $l_{qq}(\bar{q}) = 0$, то первая и вторая вариации целевого функционала на $\bar{\sigma}$ равны нулю).

Отметим, что для $K$-разрешающей функции $\varphi = x$ не выполняется традиционная связь $\varphi_x(t, \bar{x}(t)) = \psi(t)$ между градиентом разрешающей $L$-функции и коэкстремалью, т.е. решением сопряженного уравнения из принципа максимума. Это соотношение появляется, если заменить функцию $l = x^3$ на $\mathcal{L} = x$, а целевой функционал $J[\sigma]$ — на $I[\sigma] = \mathcal{L}(x(1))$. Заметим, что после такой замены процесс $\bar{\sigma}$ становится невырожденной экстремалью Понтрягина. □

Примененный здесь прием замены целевого функционала называется переходом к функционалу сравнения. Он эффективно применим к вырожденным задачам управления и предоставляет свободу в задании граничного условия для $L$-функций. Применительно к задаче $(P)$ и процессу $\bar{\sigma}$ переход к функционалу сравнения может быть формализован следующим образом.

Функционал $I[\sigma] = \mathcal{L}(q)$ назовем функционалом сравнения для процесса $\bar{\sigma}$, если функция $\mathcal{L} : R^{2n+2} \to R$ удовлетворяет неравенству

$$\big(l(q) - l(\bar{q})\big)\big(\mathcal{L}(q) - \mathcal{L}(\bar{q})\big) \geq 0 \quad \forall\, q \in Q.$$

В этом случае назовем $\mathcal{L}$ функцией сравнения для $\bar{q}$ на множестве $Q$.

Ясно, что свойство глобальной оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ инвариантно по отношению к замене $J[\sigma]$ на функционал сравнения для $\bar{\sigma}$. Однако это не означает эквивалентности задач оптимизации с целевыми функционалами $J$ и $I$.

## 2.3 Бипозиционные $L$-функции и канонические условия оптимальности

### 2.3.1 Оценки и точное описание интегральных воронок

Сначала приведем результаты по оценкам и точному описанию интегральных воронок управляемой системы $(S)$ с использованием произвольных множеств традиционных $L$-функций, обладающих определенным свойством монотонности. Эти результаты лежат в основе оценок множества соединимых точек системы $(S)$ и условий оптимальности в задаче $(P)$, речь о которых пойдет далее.

Интегральной воронкой системы $(S)$, выходящей из замкнутого множества $X_0$ в момент времени $t_0$, называют множество

$$\mathcal{R}(t_0, X_0) = \big\{\big(t, x(t)\big) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t]}(x_0),\ x_0 \in X_0,\ t \geq t_0\big\}.$$

Нас будут интересовать внешние, внутренние и точные оценки этого множества.

Пусть $G_{\geq} = G_{[t_0,+\infty)} = [t_0, +\infty) \times R^n$. Для любой $L$-функции $\varphi(t,x)$ и произвольного множества $\Phi$ таких функций определим следующие множества в $R^{n+1}$:

$$E(\varphi) = \big\{(t,x) \in G_{\geq} \mid \varphi(t,x) \geq 0\big\},$$

$$E_{+}(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} E(\varphi) \quad \text{и} \quad E_{-}(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} E(\varphi).$$

Для любого множества $E \subset R^{n+1}$ обозначим через $E^t$ его сечение по $t$; в частности, примем обозначение

$$E^t(\varphi) = \big\{x \in R^n \mid \varphi(t,x) \geq 0\big\}.$$

Справедливы следующие утверждения об оценках и точном описании интегральной воронки.

**Лемма 2.3.1.** а) *Если* $\Phi \subset L_{s\uparrow}(G_{\geq})$ *и*

$$\forall \varphi \in \Phi \quad E^{t_0}(\varphi) \supseteq X_0,$$

*то* $\mathcal{R}(t_0, X_0) \subseteq E_+(\Phi)$ .

б) *Если* $\Phi \subset L^-_{w\uparrow}(G_{\geq})$ *и*

$$\forall \varphi \in \Phi \quad E^{t_0}(\varphi) \subseteq X_0, \tag{2.13}$$

*то* $\mathcal{R}(t_0, X_0) \supseteq E_-(\Phi)$ .

в) *Если* $\varphi \in L_{s\uparrow}(G_{\geq}) \cap L^-_{w\uparrow}(G_{\geq})$ *и* $E^{t_0}(\varphi) = X_0$, *то* $\mathcal{R}(t_0, X_0) = E(\varphi)$ .

*Доказательство.* Утверждение а) леммы очевидно.

б) Возьмем некоторую функцию $\varphi \in \Phi$ и произвольную точку $(t_*, x_*) \in G_{\geq}$ , для которой $\varphi(t_*, x_*) \geq 0$ (т.е. $(t_*, x_*) \in E(\varphi) \subseteq E_-(\Phi)$ ). Тогда из свойства слабого возрастания в обратном времени функции $\varphi$ получаем, что

$$\exists\, x(\cdot) \in \mathcal{T}^-_{[t_0,t_*]}(x_*): \quad \varphi\big(t_0, x(t_0)\big) \geq \varphi(t_*, x_*) \geq 0.$$

Из условия (2.13) заключаем, что существует траектория системы $(S)$ , исходящая из множества $X_0$ и достигающая в момент $t_*$ точки $x_*$ . Из произвольности выбора $(t_*, x_*)$ следует, что каждая $\varphi \in \Phi$ порождает внутреннюю оценку интегральной воронки. Очевидно, что объединение внутренних оценок также является таковой, а значит выполнено включение $E_-(\Phi) \subseteq \mathcal{R}(t_0, X_0)$ .

в) Точное описание множества $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ является очевидным следствием первых двух утверждений. □

Теоретически идеальное утверждение в) представляется мало эффективным с точки зрения приложений: единственная функция, точно описывающая столь геометрически сложный объект как множество достижимости нелинейной системы, должна обладать существенными особенностями, да и само её нахождение из уравнения Гамильтона-Якоби является проблематичным. Поэтому на первый план выходят внешние и внутренние оценки множества $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ и оперирование множествами $L$-функций, предпочтительно гладких.

Из леммы 2.3.1 очевидным образом вытекают оценки множества достижимости системы $(S)$ в заданный момент $t_1$ , которое является сечением интегральной воронки $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ при $t = t_1$ :

$$\mathcal{R}^{t_1}(t_0, X_0) = \big\{x(t_1) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0),\ x_0 \in X_0\big\}.$$

Кроме того, на этом пути получаются оценки множества достижимости к заданному моменту времени $t_1$ из $(t_0, X_0)$ —

$$\bigcup_{t_0 \leq t \leq t_1} \mathcal{R}^t(t_0, X_0),$$

а также оценки множества точек $x$ фазового пространства, достижимых к некоторому моменту времени траекториями системы $(S)$, исходящими в момент времени $t_0$ из множества $X_0$ —

$$\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{R}^t(t_0, X_0)$$

(это множество совпадает с проекцией интегральной воронки $\mathcal{R}(t_0, X_0)$ на фазовое пространство).

Обратимся к аппроксимации интегральной воронки системы $(S)$ в обратном времени и множеств управляемости на заданное замкнутое целевое множество $X_1$ в момент $t_1$ — множества

$$\mathcal{C}(t_1, X_1) = \big\{\big(t, x(t)\big) \mid x(\cdot) \in \mathcal{T}^-_{[t,t_1]}(x_1),\ x_1 \in X_1,\ t \leq t_1\big\}$$

и его сечений. Эти оценки получаются аналогично сформулированным путем обращения времени.

Пусть $G_{\leq} = G_{(-\infty,t_1]} = (-\infty, t_1] \times R^n$. Для любой $L$-функции $\varphi(t,x)$ и произвольного множества $\Phi$ таких функций введем множества

$$Z(\varphi) = \{(t,x) \in G_{\leq} \mid \varphi(t,x) \leq 0\},$$

$$Z_+(\Phi) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} Z(\varphi) \quad \text{и} \quad Z_-(\Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} Z(\varphi).$$

**Лемма 2.3.2.** а) *Если* $\Phi \subset L^-_{s\downarrow}(G_{\leq})$ *и*

$$\forall\, \varphi \in \Phi \quad Z^{t_1}(\varphi) = \{x \in R^n \mid \varphi(t_1, x) \leq 0\} \supseteq X_1,$$

*то* $\mathcal{C}(t_1, X_1) \subseteq Z_+(\Phi)$.

б) *Если* $\Phi \subset L_{w\downarrow}(G_{\leq})$ *и* $\forall\, \varphi \in \Phi \quad Z^{t_1}(\varphi) \subseteq X_1$, *то* $\mathcal{C}(t_1, X_1) \supseteq Z_-(\Phi)$.

в) *Если* $\varphi \in L^-_{s\downarrow}(G_{\leq}) \cap L_{w\downarrow}(G_{\leq})$ *и* $Z^{t_1}(\varphi) = X_1$, *то* $\mathcal{C}(t_1, X_1) = Z(\varphi)$.

## 2.3.2 Оценки множества соединимых точек

Рассмотрим задачу построения оценок множества соединимых точек

$$\mathcal{R} = \big\{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \in R^{2(n+1)} \mid \exists\, x(\cdot) \in \mathcal{T}_{[t_0,t_1]}(x_0) : x(t_1) = x_1\big\}.$$

Покажем, что аппроксимации этого множества могут быть получены из оценок интегральной воронки другой управляемой системы, полученной из $(S)$ несложными преобразованиями.

Через $\Sigma_f$ обозначим множество всех процессов $\sigma = \big(x(t), u(t) \mid t \in \Delta = [t_0, t_1]\big)$ системы $(S)$ (необязательно допустимых в задаче $(P)$). Разобьем изложение на микропункты.

1) Наряду с $(S)$ рассмотрим следующую систему $(S')$, получающуюся заменой времени (переходом к новому времени $\tau$):

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = t_0 \quad \bigl(\Rightarrow t(\tau) = t_0 + \tau\bigr), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = f\bigl(t(\tau), y(\tau), v(\tau)\bigr), & v(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, \tau_1] =: I. \end{cases}$$

В $(S')$ будем рассматривать процессы

$$\sigma' = \bigl(t(\tau), y(\tau), v(\tau) \mid \tau \in I\bigr)$$

со свободным $\tau_1$ и соответствующие им концевые наборы

$$q' = q'(\sigma') = (t_0, y_0; t_1, y_1; \tau_1),$$

где $t_0 = t(0)$, $t_1 = t(\tau_1)$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(\tau_1)$. Множество всех процессов $\sigma'$ системы $(S')$ обозначим через $\Sigma'_f$.

Пусть $\sigma \in \Sigma_f$. Определим отображение $\mathcal{F} : \Sigma_f \to \Sigma'_f$ формулами:

$$\mathcal{F}(\sigma) = \Bigl(t(\tau) = t_0 + \tau, y(\tau) = x\bigl(t(\tau)\bigr), v(\tau) = u\bigl(t(\tau)\bigr) \mid \tau \in [0, t_1 - t_0]\Bigr).$$

Оно определено однозначно, причем для $\sigma' = \mathcal{F}(\sigma)$ имеем

$$q' = q'(\sigma') = (t_0, x_0; t_1, x_1; t_1 - t_0) = \bigl(q(\sigma), t_1 - t_0\bigr).$$

Легко проверяется, что отображение $\mathcal{F}$ обратимо, и

$$\mathcal{F}^{-1}(\sigma') = \Bigl(x(t) = y\bigl(\tau(t)\bigr), u(t) = v\bigl(\tau(t)\bigr) \mid t \in [t_0, t_1]\Bigr),$$

причем $\tau(t) = t - t_0$, $t_0 = t(0)$, $t_1 = t(\tau_1)$.

При отображении $\mathcal{F}^{-1}$ концевые наборы связаны соотношениями

$$q = q(\sigma) = \bigl(t_0 = t(0), x_0 = y(0); t_1 = t(\tau_1) = t_0 + \tau_1, x_1 = y(\tau_1)\bigr),$$

если $\sigma = \mathcal{F}^{-1}(\sigma')$, т.е. $q$ фактически совпадает с $q'$ без последней компоненты.

Таким образом, на первом шаге система $(S)$ сведена к автономной системе $(S')$ с фиксированным начальным временем.

2) Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — множества соединимых точек систем $(S)$ и $(S')$. Из предыдущего следует, что они находятся во взаимно однозначном соответствии. Более того,

$$q(\sigma) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \bigl(q(\sigma), t_1 - t_0\bigr) \in \mathcal{R}',$$

т.е. множество $\mathcal{R}$ совпадает с объединением всех сечений множества $\mathcal{R}'$ при $\tau_1 > 0$:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\tau_1 > 0} (\mathcal{R}')^{\tau_1}.$$

3) Изучение $\mathcal{R}$ в исходной системе можно свести к случаю изучения интегральной воронки некоторой системы со специальным начальным множеством $C_0$. Для этого можно рассмотреть систему

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U \tag{2.14}$$

с начальным условием $\big(z(t_0), x(t_0)\big) \in C_0 := \big\{(z_0, x_0) \mid z_0 = x_0\big\}$. Очевидно, что множество $\Sigma_f$ всех процессов системы $(S)$ и множество допустимых процессов системы (2.14) находятся во взаимно однозначном соответствии, а множество

$$\mathcal{A} = \big\{\big(t_0, z(t_1); t_1, x(t_1)\big) \mid \big(z(\cdot), x(\cdot)\big) \text{ — траектория системы (2.14)}, \\ z(t_0) = x(t_0)\big\}$$

совпадает с $\mathcal{R}$ (с точностью до обозначений). Однако здесь момент времени $t_0$ нефиксирован.

Аналогичный прием применúм и к системе $(S')$.

4) На этом шаге сведем задачу описания множества соединимых точек $\mathcal{R}$ системы $(S)$ к описанию интегральной воронки из начального множества новой системы $(S'')$.

Применяя преобразование из 3), перейдем от системы $(S')$ к системе $(S'')$ путем введения дополнительных фазовых переменных $\theta = t_0$, $z = y_0$ уравнениями

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = t(0), \quad z(0) = y(0).$$

Получим систему $(S'')$:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} = 0, \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dy}{d\tau} = f(t, y, v), \quad v(t) \in U$$

с фиксированным начальным моментом времени $\tau_0 = 0$, начальным множеством $X_0 = \big\{(\theta_0, z_0, t_0, y_0) \mid \theta_0 = t_0, z_0 = y_0\big\}$ и свободными $\tau_1$, $t(\tau_1)$, $\theta(\tau_1)$, $z(\tau_1)$, $y(\tau_1)$.

Для процессов $\sigma''$ этой системы вектор подвижных концов траекторий есть

$$q'' = q''(\sigma'') = \big(\eta(0), \eta(\tau_1), \tau_1\big),$$

где для краткости введен фазовый вектор $\eta = (\theta, z, t, y)$ системы $(S'')$. Ясно, что вектор $q''$ содержит все компоненты $q'$, а также подвектор концевых значений $\theta$, $z$.

Рассмотрим сечение при $\tau = \tau_1$ интегральной воронки системы $(S'')$, выпущенной в момент $\tau = 0$ из множества $X_0$:

$$\big(\mathcal{R}''(0, X_0)\big)^{\tau_1} = \big\{\big(\theta(\tau_1), z(\tau_1); t(\tau_1), y(\tau_1)\big) \mid \big(\theta(\cdot), z(\cdot), t(\cdot), y(\cdot)\big) \text{ –} \\ \text{траектория системы } (S''),\ \theta(0) = t(0), z(0) = y(0)\big\}.$$

Из сказанного выше следует, что

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\tau_1 \geq 0} \left(\mathcal{R}''(0, X_0)\right)^{\tau_1},$$

где справа стоит множество всех точек, достижимых к некоторому моменту времени траекториями системы $(S'')$.

Таким образом, применением леммы 2.3.1 для построения оценок множеств достижимости системы $(S'')$ можно получить оценки множества соединимых точек $\mathcal{R}$ системы $(S)$.

Указанная связь множества соединимых точек системы $(S)$ с интегральной воронкой системы $(S'')$ из начального множества $X_0 = \{(t_0, x_0; t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in R^{n+1}\}$ вновь приводит к необходимости оперирования *бипозиционными* $L$-функциями, зависящими от дополнительных аргументов-параметров $(t_0, x_0)$, роль которых выше играли фазовые переменные $\theta$, $z$. Определения бипозиционных $L$-функций и их применение для оценок множества соединимых точек и в канонических условиях оптимальности даются в следующем пункте

Заметим, что аналогичные рассуждения относительно системы $(S)$, рассматриваемой в обратном времени (т.е. относительно системы $(-S)$), приводят к естественному введению бипозиционных $L$-функций, зависящих не от начальной позиции $(t_0, x_0)$ системы $(S)$, а от конечной — $(t_1, x_1)$.

### 2.3.3 Необходимые и достаточные условия оптимальности

**Определение 2.3.1.** Непрерывную функцию $V(t, x; t_0, x_0) : R^{2n+2} \to R$ назовем

а) *сильно возрастающей*, если $\forall\, (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L_{s\uparrow}$ и

$$V(t_0, x_0; t_0, x_0) = 0; \tag{2.15}$$

б) *слабо возрастающей в обратном времени*, если $\forall\, (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad V(\cdot, \cdot; t_0, x_0) \in L^-_{w\uparrow}$ и

$$\forall\, x \neq x_0 \quad V(t_0, x; t_0, x_0) < 0. \tag{2.16}$$

Подобным образом определяются сильно и слабо убывающие бипозиционные $L$-функции и бипозиционные $L$-функции, монотонные в обратном времени. Указанные определения имеют аналоги для функций, дополнительно зависящих не от начальной, а от конечной позиции $(t_1, x_1)$ системы $(S)$. Дальнейшее изложение в основном идет с использованием бипозиционных $L$-функций $V(t, x; t_0, x_0)$.

Чтобы отличать бипозиционные $L$-функции от традиционных функций $\varphi(t, x)$, для соответствующих семейств бипозиционных $L$-функций примем следующие понятные обозначения: $\mathcal{V}_{s\uparrow}$, $\mathcal{V}_{w\downarrow}$, $\mathcal{V}^-_{s\downarrow}$ и $\mathcal{V}^-_{w\uparrow}$.

Условия (2.15), (2.16) назовем *краевыми условиями наведения.* Отметим, что традиционные сильно монотонные $L$-функции вкладываются в класс бипозиционных по формуле

$$V(t,x;t_0,x_0) = \varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0) \tag{2.17}$$

с сохранением типа монотонности. Однако для слабо монотонных функций условие наведения (2.16) довольно жестко, и для построения по традиционной слабо монотонной функции $\varphi$ бипозиционной $V$ с таким же свойством монотонности формула (2.17) в общем случае не подходит (один из возможных способов построения бипозиционных слабо монотонных функций по традиционным указан в примере 2.7).

Из определения 2.3.1 очевидным образом следуют инфинитезимальные критерии для бипозиционных функций типа Ляпунова, аналогичные критериям, приведенным во введении.

Представим оценки множества соединимых точек $\mathcal{R}$ управляемой системы $(S)$ с использование бипозиционных $L$-функций. Для этого введем следующие множества:

$$\mathcal{E}(V) = \{(t_0,x_0;t_1,x_1) \in R^{2(n+1)} \mid V(t_1,x_1;t_0,x_0) \geq 0\},$$

$$\mathcal{E}_+(\mathcal{V}) = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{E}(V) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_-(\mathcal{V}) = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{E}(V),$$

где $\mathcal{V}$ — некоторое множество бипозиционных $L$-функций.

**Теорема 2.3.1.** а) *Если* $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, *то* $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{V})$.
б) *Если* $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^-_{w\uparrow}$, *то* $\mathcal{R} \supset \mathcal{E}_-(\mathcal{V})$.
в) *Если* $V \in \mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}^-_{w\uparrow}$, *то* $\mathcal{R} = \mathcal{E}(V)$.

Доказательство аналогично лемме 2.3.1.

Дадим некоторые комментарии.

1) Для решения некоторых задач управления достаточно оценивать не всё множество $\mathcal{R}$, а только некоторые его подмножества, например, множество точек, соединимых допустимыми по ограничению $q = (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \in Q$ траекториями системы $(S)$, т.е. множество $\mathcal{R} \cap Q$. Достигается это следующим образом.

Пусть $Q_0 = pr_{t_0x_0}\, Q$ — проекция множества $Q$ на подпространство переменных $t_0$, $x_0$, т.е.

$$Q_0 = \{(t_0,x_0) \mid \exists\,(t_1,x_1) : (t_0,x_0;t_1,x_1) \in Q\}.$$

Тогда в определении 2.3.1 (и соответствующих критериях монотонности) можно ограничиться только точками $(t_0,x_0) \in Q_0$.

Другое очевидное ослабление связано с учетом возможных сильно инвариантных множеств (см. замечание 2.1): если априори известно множество $W \subset R^{n+1}$, по которому проходят все рассматриваемые (например, допустимые по некоторому ограничению) траектории системы, то сильного возрастания функций $V \in \mathcal{V}$ можно требовать только на $W$, а в оценивающее множество $\mathcal{E}(V)$ добавить ограничения $(t_0,x_0) \in W$, $(t_1,x_1) \in W$.

2) Отправляясь от описаний множества управляемости системы $(S'')$ (т.е. исходя из теоремы 2.3.2), можно получить аналогичный результат, использующий бипозиционные $L$-функции, параметрически зависящие от терминального вектора $(t_1, x_1)$. Очевидно, что ответ в такой форме эквивалентен теореме 2.3.1.

3) В первых формулировках достаточных условий канонической теории [19, 21] использовались семейства сильно монотонных $L$-функций, параметризованные некоторым, вообще говоря, произвольным параметром $\alpha$. Введение в $L$-функции дополнительных аргументов-параметров можно трактовать как возможную конкретизацию смысла параметра $\alpha$, а бипозиционные функции $V(t,x;t_0,x_0)$ и $V(t,x;t_1,x_1)$ рассматривать как специальный подкласс $L$-функций, применяемых в каноническом подходе. □

Сформулируем канонические условия оптимальности с бипозиционными $L$-функциями для стандартной задачи оптимального управления $(P)$ с общим ограничением на концы траекторий и целевым функционалом типа Майера:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u(t) \in U,$$

$$q = (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \in Q,$$

$$J[\sigma] = l(q) \to \min .$$

Напомним, что исследуемый на оптимальность процесс обозначен через

$$\bar{\sigma} = \big(\bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t \in \bar{\Delta} = [\bar{t}_0, \bar{t}_1]\big) \in \Sigma.$$

Рассмотрим вспомогательную конечномерную задачу $(EP(\mathcal{E}))$:

$$l(q) \to \inf; \quad q \in \mathcal{E} \cap Q,$$

где $\mathcal{E} \subset R^{2n+2}$ — пока произвольное множество.

**Теорема 2.3.2.** а) *Пусть для процесса $\bar{\sigma}$ существует такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$, что*

$$J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V}))).$$

*Тогда процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P)$.*
б) *Пусть процесс $\bar{\sigma}$ глобально оптимален в задаче $(P)$. Тогда для любого множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^-_{w\uparrow}$ выполнено неравенство*

$$J[\bar{\sigma}] \leq \inf(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V}))). \tag{2.18}$$

в) *Пусть существует функция $V \in \mathcal{V}_{s\uparrow} \cap \mathcal{V}^-_{w\uparrow}$. Тогда для оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$J[\bar{\sigma}] = \min(EP(\mathcal{E}(V))).$$

Ясно, что при выполнении достаточного условия оптимальности концевой вектор $\bar{q} = q(\bar{\sigma})$ является решением задачи $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$, так как он принадлежит допустимому множеству этой задачи. Подобная ситуация имеет место в третьей части теоремы. В случае, если вектор $\bar{q}$ допустим в задаче $(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V})))$ из второго утверждения теоремы, то неравенство (2.18) выполняется как равенство и вектор $\bar{q}$ является решением задачи $(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V})))$. Таким образом, приведенные условия оптимальности могут формулироваться в терминах оптимальности вектора $\bar{q}$ в соответствующих концевых задачах.

Утверждение б) теоремы представляет интерес в контрпозитивной форме — как достаточное условие неоптимальности.

**Следствие 2.3.1.** *Пусть для процесса $\bar{\sigma}$ найдется такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^-_{w\uparrow}$, что*

$$J[\bar{\sigma}] > \inf(EP(\mathcal{E}_-(\mathcal{V}))).$$

*Тогда процесс $\bar{\sigma}$ не оптимален в задаче $(P)$.*

Как и ранее, множество $\mathcal{V}$ назовем *разрешающим* (*$K$-разрешающим*) для процесса $\bar{\sigma}$ и задачи $(P)$, если оно удовлетворяет утверждению а) теоремы 2.3.2.

## 2.4 Анализ достаточных условий оптимальности

Рассмотрим некоторые свойства разрешающего множества функций.

Следуя [81, с. 117], дадим

**Определение 2.4.1.** Назовем $\bar{\sigma}$ точкой почти глобального минимума в задаче $(P)$, если $J[\bar{\sigma}]$ является изолированной слева точкой множества $J[\Sigma]$.

Это нестандартный тип минимума, более глубокий, чем сильный, поскольку он не использует какой-либо топологии на множестве допустимых процессов (и лишь частично связан со сходимостью концевых векторов допустимых процессов).

Задачу $(P)$ назовем *вырожденной* (в смысле почти глобального минимума в точке $\bar{\sigma}$), если вектор $\bar{q}$ доставляет локальный минимум в следующей задаче:

$$l(q) \to \min; \quad q \in Q.$$

Ясно, что вырожденные задачи (в данном смысле) не представляют интереса, так как в них дифференциальная связь не играет роли и тривиальная $V \equiv 0$ позволяет установить почти глобальную оптимальность $\bar{\sigma}$.

**А**. Пусть $\mathcal{V}$ — разрешающее множество для $\bar{\sigma}$, равномерно полунепрерывное снизу в точке $\bar{q}$ [6]. Если задача $(P)$ не вырождена, то для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma}) = \{V \in \mathcal{V} \mid V(\bar{q}) \le \varepsilon\} \ne \varnothing \tag{2.19}$$

[6] Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $O(\bar{q})$ точки $\bar{q}$, что неравенство $V(q) \ge V(\bar{q}) - \varepsilon$ выполняется $\forall V \in \mathcal{V}$ и $\forall q \in O(\bar{q})$.

и, следовательно, выполняется равенство

$$\inf_{V\in\mathcal{V}} V(\bar{q}) = 0. \qquad (2.20)$$

Это утверждение легко доказывается от противного. Оно означает, что для невырожденных задач множество $\varepsilon$-активных «индексов» $V$ по ограничению $q \in \mathcal{E}_+(\mathcal{V})$ в концевой задаче $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$ канонического подхода не пусто для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Именно эти «почти активные» $V$ важны для достаточных условий. Заметим, что

$$V\big(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)\big) = 0 \quad \text{на} \quad \bar{\Delta} \quad \forall V \in \mathcal{V}_0(\bar{\sigma}).$$

Условие (2.19), пожалуй, наиболее полно характеризует возможных кандидатов в элементы разрешающего множества $L$-функций и порождает следующую серию следствий. Например, справедливо свойство

**Б**. Для любой $V \in \mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma})$ процесс $\bar{\sigma}$ $\varepsilon$-оптимален в следующей задаче оптимального управления *без концевых ограничений*:

$$\omega[V;\sigma] := V(t_1, x(t_1); t_0, x(t_0)) \to \min; \quad \sigma \in \Sigma_f, \qquad (2.21)$$

т.е. выполняется неравенство

$$\inf_{\sigma\in\Sigma_f} \omega(V;\sigma) \geq \omega(V;\bar{\sigma}) - \varepsilon.$$

Для функций $V \in \mathcal{V}_0(\bar{\sigma})$ (в точности активных) процесс $\bar{\sigma}$ оптимален в задаче (2.21).

**В**. Пусть $\{V^j\} \subset \mathcal{V}$ – последовательность, на которой достигается инфимум в (2.20), и $V^j$ суперпозиционно абсолютно непрерывны (например, локально липшицевы). Тогда выполняется предельное соотношение

$$\frac{d}{dt} V^j(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) \to 0 \quad \text{в} \quad L_1(\bar{\Delta}),$$

непосредственно вытекающее из оценки

$$0 \leq \int\limits_{\bar{\Delta}} \frac{d}{dt} V^j(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) dt = V^j(\bar{q}) - V^j(\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)) = V^j(\bar{q}) \to 0.$$

При дифференцируемых и липшицевых $V \in \mathcal{V}$ свойства **Б**, **В** позволяют установить связь квазиградиентов функций $V \in \mathcal{V}_\varepsilon(\bar{\sigma})$ с решениями сопряженной системы, соответствующими $\bar{\sigma}$, которые оказываются компонентами экстремалей (точнее, субэкстремалей) управляемой системы [21, 81], т.е. части условий из возмущенного принципа максимума Понтрягина для субоптимальных процессов [74, 83].

**Г**. Нижняя огибающая разрешающего множества $\mathcal{V}$ — функция

$$V_*(t, x; t_0, x_0) = \inf_{V\in\mathcal{V}} V(t, x; t_0, x_0)$$

— сильно возрастает и является разрешающей для задачи $(P)$ (так как концевые задачи $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$ и $(EP(\mathcal{E}(V_*)))$ эквивалентны), причем

$$V_*\big(t, \bar{x}(t); \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0)\big) = 0 \;\text{ на }\; \bar{\Delta}.$$

Эта возможность перехода от разрешающего множества бипозиционных $L$-функций к одной разрешающей (т.е. к одноэлементному разрешающему множеству) вытекает из свойств **А**, **В**. Примечательно, что в классе традиционных $L$-функций такой переход, вообще говоря, невозможен [3]: нижней огибающей может соответствовать более широкое множество допустимых точек в концевой задаче $(EP(\mathcal{E}(V_*)))$ (т.е. соответствующая внешняя оценка множества $\mathcal{R}$ оказывается более грубой).

Поиск разрешающего множества $L$-функций может интерпретироваться как конструктивный способ нахождения одной разрешающей $V_*$, аналитические свойства которой ухудшаются в сравнении с функциями из разрешающего множества, и её непосредственное нахождение из неравенства (уравнения) Гамильтона-Якоби может оказаться весьма проблематичным. Отметим попутно, что если все функции $V \in \mathcal{V}$ являются гладкими по основным переменных $(t, x)$, то при довольно общих предположениях нижняя огибающая $V_*$ оказывается локально полувогнутой по этим переменным [65, гл. 3]. Этот класс решений, введенный С.Н. Кружковым, оказался естественным для теории уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби (см. также [35, 50]).

Свойства **Б**, **Г** позволяют дать ответ на естественный вопрос: как по заданному множеству $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_{s\uparrow}$ и найденному множеству $Q_* = \{q_*\}$ глобальных решений концевой задачи $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$ построить управления, траектории которых соединяют хотя бы некоторые точки из $Q_*$, или же убедиться, что таких управлений нет, т.е. $\mathcal{V}$ — не разрешающее множество. Этот вопрос не возникает, если достаточные условия оптимальности теоремы 2.3.2 используется как проверочное — при априори известном $\bar{\sigma}$, но он выходит на передний план, если каноническую теорию рассматривать как метод решения задачи. (Дополнительная неопределенность и сложность здесь возникают, поскольку в силу свойства **Б** каждая $\varepsilon$-активная $V$ порождает своё синтезирующее управление и конструкция результирующего неочевидна.) В сущности, построение оптимальных процессов по $\mathcal{V}$ (точнее, по $V_*$) следует схеме, приведенной во введении.

## 2.5 Условия оптимальности с бипозиционными $L$-функциями в неклассической линейно-квадратичной задаче оптимального управления

Рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления $(LQP)$:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u(t) \in R^m,$$
$$J[x,u] = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} \Omega\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \omega(q_x) \to \min,$$

где $\Omega$, $\omega$ — линейно-квадратичные функции вида

$$\Omega(t,x,u) = \big(x'P(t)x + 2u'Q(t)x + u'R(t)u + 2p'(t)x + 2r'(t)u\big),$$
$$\omega(q_x) = \frac{1}{2}q_x'Dq_x + d'q_x, \quad q_x = \big(x(t_1), x(t_0)\big),$$

все матричные функции непрерывны на отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$, причем $P$, $R$, $D$ симметричны и $R(t)$ положительно определена — $R(t) > 0 \quad \forall\, t \in \Delta$ [7].

От классической линейно-квадратичной задачи построения оптимального регулятора [40, 69] задача $(LQP)$ отличается общей зависимостью формы $\omega$ от $x_0, x_1$ и присутствием линейных слагаемых в $\Omega$, $\omega$. Эти особенности делают не применимым метод динамического программирования в традиционном варианте и порождают новые свойства оптимальных решений. Например, в [85] рассматривалась автономная задача оптимального синтеза с формой $\omega$, не зависящей от $x_0$ при $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$, $D \equiv 0$, и оптимальное позиционное управления в действительности оказалось программным (не зависящим от $t_0, x_0$), а функция Беллмана — линейной по $x_0$ (по текущему $x$). В рассматриваемой задаче со свободными $x_0, x_1$ сама постановка вопроса об оптимальном синтезе нуждается в уточнении.

Перепишем задачу $(LQP)$ в форме Майера (далее речь будет идти именно о ней):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(t) \in R^m, \tag{2.22}$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2}\Big(x'Px + 2u'Qx + u'Ru + 2p'x + 2r'u\Big), \quad y(t_0) = 0, \tag{2.23}$$
$$J[\sigma] = \frac{1}{2}q_x'Dq_x + d'q_x + y(t_1) \to \inf.$$

Здесь $\sigma = (x, y, u)$ — процесс системы (2.22), (2.23), а

$$q = \Big(q_x = \big(x(t_1), x(t_0)\big), y(t_1)\Big)$$

— концевой вектор, отвечающий $\sigma$.

[7] Для краткости будем опускать аргумент $(t)$ у функций, характеризующих задачу $(LQP)$.

В этой задаче отсутствуют какие-либо ограничения (за исключением несущественного начального условия для $y$), поэтому все процессы системы (2.22), (2.23) допустимы.

Покажем, как задачу $(LQP)$ можно исследовать с применением одной *бипозиционной* линейно-квадратичной сильно возрастающей $L$-функции вида

$$\begin{aligned} &V(t,x,y;x_0) = \frac{1}{2}(x\ x_0)S(t)\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} + \\ &+w_1'(t)x + w_0'(t)x_0 + c(t) - v(x_0) + y, \\ &S(t_1) = D, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0, \\ &v(x_0) = \frac{1}{2}(x_0\ x_0)S(t_0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + w_1'(t_0)x_0 + w_0'(t_0)x_0 + c(t_0). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь $S(t) = \big(S_{ij}(t)\big)$ — $2n\times 2n$ симметричная матричная функция с $n\times n$ блоками $S_{ij}$, $i,j = 1,2$, $n$-мерные вектор-функции $w_1$, $w_0$ и функция $c$ непрерывно дифференцируемы, функция $v(x_0)$ включена для учета краевого условия наведения из определения 2.3.1 бипозиционных $L$-функций.

Для конкретизации функций $S, w_1, w_0, c$, подставим функцию $V$ в неравенство Гамильтона-Якоби (2.2) для гладких сильно возрастающих $L$-функций. Для этого вычислим нижний гамильтониан $h$, откуда определится $V$-экстремальное управление

$$\begin{aligned} u_*[t,x;x_0] \ &= u_*\big(t,x,V_x(t,x;x_0)\big) = \\ &= -R^{-1}\Big((Q + B'S_{11})x + B'S_{12}x_0 + B'w_1 + r\Big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Неравенство Гамильтона-Якоби (2.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x'\Big(\dot S_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11})\Big)x + \\ &+x'\Big(\dot S_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12}\Big)x_0 + \\ &+\frac{1}{2}x_0'\Big(\dot S_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12})\Big)x_0 + \\ &+x'\Big(\dot w_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r)\Big) + \\ &+x_0'\Big(\dot w_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r)\Big) + \\ &+\Big(\dot c - \frac{1}{2}(B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r)\Big) \geq 0, \\ &\forall\,(t,x,x_0) \in \Delta \times R^n \times R^n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Будем выбирать искомые функции так, чтобы занулить каждое из шести слагаемых в левой части неравенства (2.26), т.е. потребуем, чтобы $V$ удовлетворяла уравнению Гамильтона-Якоби (равенству в (2.26)). Придем к следующей системе дифференциальных уравнений на отрезке $\Delta$:

$$
\begin{aligned}
&\dot S_{11} + P + S_{11}A + A'S_{11} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(Q + B'S_{11}) = 0, \qquad (2.27)\\
&\dot S_{12} + A'S_{12} - (Q + B'S_{11})'R^{-1}B'S_{12} = 0,\\
&\dot S_{22} - (B'S_{12})'R^{-1}(B'S_{12}) = 0,\\
&\dot w_1 + A'w_1 + p - (Q + B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0,\\
&\dot w_0 - (B'S_{11})'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0,\\
&\dot c - \frac{1}{2}(B'w_1 + r)'R^{-1}(B'w_1 + r) = 0
\end{aligned}
$$

с граничными условиями

$$
S_{ij}(t_1) = D_{ij},\ i, j = 1, 2, \quad w_1(t_1) = d_1, \quad w_0(t_1) = d_0, \quad c(t_1) = 0.
$$

Отметим, что уравнение (2.27) является матричным уравнением Риккати, решение которого может не существовать на всем отрезке $\Delta$, но мы предположим, что оно существует на $\Delta$; тогда остальные линейные уравнения имеют решения на $\Delta$, а функция $V$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби и начальному условию $V(t_0, x_0, y_0; x_0) = 0$. Следовательно, она является бипозиционной сильно возрастающей $L$-функцией.

Установим свойства функции $V$.

**Предложение 2.5.1.** а) *Если процесс* $\sigma = (x, y, u)$ *порожден* $V$*-экстремальным управлением* (2.25), *т.е. удовлетворяет равенству*

$$
u(t) = u_*\big(t, x(t), V_x(t, x(t), x(t_0))\big), \tag{2.28}
$$

*то* $V\big(t, x(t), y(t); x(t_0)\big) \equiv 0$ *на* $\Delta$.

б) *Если процесс* $\sigma$ *не порожден* $V$*-экстремальным управлением, т.е. не удовлетворяет условию* (2.28), *то* $V\big(t, x(t), y(t); x(t_0)\big) \geq 0$ *на* $\Delta$ *и* $V\big(t_1, x(t_1), y(t_1); x(t_0)\big) > 0$.

*Доказательство.* а) Утверждение следует из равенства

$$
\frac{d}{dt}V\big(t, x(t), y(t); x(t_0)\big) = 0,
$$

справедливого в силу того, что функция $V$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, а $V$-экстремальное управление доставляет строгий глобальный минимум по $u$ функции $H\big(t, x, V_x(t, x; x_0), u\big)$ во всех точках $(t, x, x_0)$.

б) Если процесс $\sigma$ не порожден $V$-экстремальным управлением, то найдется интервал $(a, b) \subset \Delta$, на котором равенство (2.28) нарушается, а тогда $\frac{d}{dt}V\big(t, x(t), y(t); x(t_0)\big) > 0$ на $(a, b)$. □

Из предложения 2.5.1 и вида функции $V$ (см. граничные условия в (2.24) и определение функции $v(x_0)$ ) следует, что для любого процесса $\sigma$ выполняется неравенство

$$J[\sigma]=l(q)=V\big(t_1,x(t_1),y(t_1);x(t_0)\big)+v\big(x(t_0)\big)\geq v\big(x(t_0)\big)\geq\inf_{R^n}v(x_0).$$

Отсюда вытекает, что если функция $v$ достигает своего минимума в некоторой точке $\bar{x}_0\in R^n$ , а процесс $\bar{\sigma}$ порожден $V$ -экстремальным управлением (2.25) и удовлетворяет начальному условию $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ , то

$$J[\bar{\sigma}]=\min v(x_0)=v(\bar{x}_0),$$

т.е. $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс. Таким образом, вопрос отыскания оптимальных процессов в задаче $(LQP)$ сводится к нахождению точек минимума функции

$$v(x_0)=\frac{1}{2}x_0'\Big(\sum_{i,j}S_{ij}(t_0)\Big)x_0+\big(w_1(t_0)+w_0(t_0)\big)'x_0+c(t_0).$$

**Лемма 2.5.1.** а) *Функция $v(x_0)$ имеет единственную точку минимума*

$$\bar{x}_0=-\Big(\sum_{i,j}S_{ij}(t_0)\Big)^{-1}\big(w_1(t_0)+w_0(t_0)\big) \tag{2.29}$$

*тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x_0'(\sum\limits_{i,j}S_{ij}(t_0))x_0$ положительно определена.*

б) *Функция $v(x_0)$ имеет множество точек минимума*

$$\Big\{\bar{x}_0\;\Big|\;\sum_{i,j}S_{ij}\bar{x}_0=0\Big\} \tag{2.30}$$

*тогда и только тогда, когда квадратичная форма $x_0'(\sum\limits_{i,j}S_{ij}(t_0))x_0$ положительно полуопределена и*

$$\big(w_1(t_0)+w_0(t_0)\big)'x_0=0\quad\forall\,x_0:\;\;x_0'\Big(\sum_{i,j}S_{ij}(t_0)\Big)x_0=0. \tag{2.31}$$

Из рассуждений, приведенных выше, и леммы 2.5.1 вытекают следующие достаточные условия оптимальности в задаче $(LQP)$ .

**Теорема 2.5.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *существует гладкая симметричная матричная функция $S_{11}(t)$ , удовлетворяющая на $\Delta$ матричному уравнению Риккати (2.27) с граничным условием $S_{11}(t_1)=D_{11}$ ;*

б) *квадратичная форма $x_0'(\sum\limits_{i,j}S_{ij}(t_0))x_0$ положительно определена.*

*Тогда существует единственный оптимальный процесс $\bar{\sigma}$ , порожденный $V$ -экстремальным управлением (2.25) и начальным условием $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ , где вектор $\bar{x}_0$ определен формулой (2.29) , а значение задачи $(LQP)$ удовлетворяет равенству*

$$\min(LQP)=-\frac{1}{2}\big(w_1(t_0)+w_0(t_0)\big)'\Big(\sum_{i,j}S_{ij}(t_0)\Big)^{-1}\big(w_1(t_0)+w_0(t_0)\big)+c(t_0).$$

**Теорема 2.5.2.** *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *существует гладкая симметричная матричная функция* $S_{11}(t)$, *удовлетворяющая на* $\Delta$ *матричному уравнению Риккати* (2.27) *с граничным условием* $S_{11}(t_1) = D_{11}$ *;*

б) *квадратичная форма* $x_0'(\sum\limits_{i,j} S_{ij}(t_0))x_0$ *положительно полуопределена и выполнено условие* (2.31) *.*

*Тогда существует множество оптимальных процессов* $\bar{\sigma}$ *, порожденных* $V$ *-экстремальным управлением* (2.25) *и начальным условием* $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ *, где вектор* $\bar{x}_0$ *определяется формулой* (2.30) *, а значение задачи* $(LQP)$ *удовлетворяет равенству*

$$\min(LQP) = c(t_0).$$

Приведенные достаточные условия оптимальности теорем 2.5.1, 2.5.2 могут показаться жесткими, однако дальнейший анализ показывает, что в предположении полной управляемости системы (2.22) они становятся и необходимыми. Для обоснования этого факта используются результаты из [40, 69, 85].

## 2.6 Производящие функции и нестандартная двойственность

Расширение множества функций типа Ляпунова до бипозиционных не является единственно возможным из потенциально эффективных и заслуживающих исследования. В работах [29, 30] В.А. Дыхта предложил использовать так называемые *производящие функции* типа $S(t, x, \psi)$ , зависящие от траекторий сопряженной системы[8], как для развития канонического подхода, так и построения обобщенных лагранжианов задачи с последующим переходом к соответствующей *задаче сравнения* (аналога двойственной).

Применительно к стандартной задаче $(P)$ модифицированный лагранжиан с производящей гладкой функцией $S$ определяется (по аналогии с кротовским и Каратеодори [66]) равенством

$$K[S, x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot)] = l(q) - S\big(t, x(t), \psi(t)\big)\big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{\Delta} \dot{S}\big(t, x(t), \psi(t)\big)dt,$$

а задача сравнения формируется следующим образом:

$$K[S, \gamma] \to \inf; \quad \gamma \in \Gamma. \tag{2.32}$$

Здесь $\dot{S}$ означает полную производную по времени в силу канонической системы с функцией Понтрягина

$$\dot{x} = H_\psi, \quad \dot{\psi} = -H_x, \tag{2.33}$$

[8]Термин «производящие» заимствован из классической механики [4, 14], в которой такие функции применялись для интегрирования методом Якоби канонических (гамильтоновых) систем и уравнений Гамильтона-Якоби. В [29, 30] они назывались потенциалами.

$\gamma$ — тройку функций $\bigl(x(t), \psi(t), u(t) \mid t \in \Delta\bigr)$, связанных на отрезке $\Delta$ системой (2.33) и ограничением $u(t) \in U$, $\Gamma$ — множество всех таких троек с соответствующими краевыми условиями.

В идеале — при выполнении условия максимума

$$u(t) \in \operatorname*{Argmax}_{u \in U} H\bigl(t, x(t), \psi(t), u\bigr), \quad t \in \Delta$$

— переход к задаче (2.32) соответствовал бы поиску решения задачи $(P)$ среди экстремалей Понтрягина, но его достижение проблематично в силу известных трудностей (они тесно связаны с реализацией метода характеристик для негладкого управления Гамильтона-Якоби-Беллмана). Поэтому при выбранной функции $S$ в задаче сравнения используется $S$-экстремальное *бипозиционое управление* $u_*(t, x, \psi)$, которое находится из условия

$$L(S; t, x, u) := \dot{S} \to \min; \quad u \in U.$$

Что касается принципиального вопроса — выбора $S$, — то пока накопленный опыт позволяет выделить следующие варианты:

а) билинейный — $S(t, x, \psi) = \psi \cdot x$, при котором функционал $K$ оказывается стандартным лагранжианом [1, 35], но с варьируемой $\psi(\cdot)$;

б) линейно-квадратичный по $(x, \psi)$;

в) выбор $S$ из условия независимости $L = \dot{S}$ от $x$ или от $\psi$;

г) суперпозицию с групповыми инвариантами системы (2.33) (например, в случае так называемых $L$-систем [57], или линейных по управления систем с условиями Фробениуса — как в условиях применимости нелинейного преобразования Гоха).

Ниже мы иллюстрируем метод производящих функций на примере из [30]

**Пример 2.6.** $\dot{x} = (x-1)u,\ u \in [0,1],\ x(0) = 0,\ J = x^3(1) \to \min$.

Условия принципа максимума Понтрягина таковы: $H = \psi(x-1)u$,

$$\dot{\psi} = -\psi u, \quad \psi(1) = -3x^2(1), \quad \psi(x-1)u \to \max; \quad u \in [0,1] \tag{2.34}$$

(последнее эквивалентно условию $H_u(x, \psi)u \to \max;\ u \in [0,1]$).

Во-первых, заметим, что $\dot{H}_u \equiv 0$, то есть $S^1(x, \psi) = \psi(1-x)$ — первый интеграл канонической системы, линейный по $\psi$ (это признак принадлежности уравнения динамики к $L$-системам [57]). Он удовлетворяет условию сильного возрастания

$$\dot{S} = \bigl((x-1)S_x - \psi S_\psi\bigr)u \geq 0 \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Однако это неравенство имеет еще два решения: $S^2(x) = -x$, $S^3(\psi) = \psi$.

Далее, естественное использование $S^1$ для упрощения принципа максимума Понтрягина, описанное в [57], предписывает заменить условие максимума из (2.34) на следующее: $cu \to \max$; $u \in [0,1]$, т.е. $u \in \operatorname{sign} c$, где константа $c$ зависит от искомой траектории $(x, \psi)$ через равенство $S^1 = c$. Возникает необходимость перебора вариантов значений $c$ при выполнении условий

$$3x^2(1)\big(1 - x(1)\big) = c, \quad x(1) \le 0$$

(неравенство дает функция $S^2$). Отсюда $c \ge 0$ и возможны два случая:

а) $c = 0$; тогда $x(1) = 0$, откуда $\psi^* \equiv 0$, $x^* \equiv 0$, $u^* \equiv 0$ — особая биэкстремаль задачи;

б) $c > 0$; тогда $\bar{u} \equiv 1$, $\bar{x}(t) = 1 - e^t$ — неособая экстремаль.

Поскольку задача невыпуклая, то это все, что дает принцип максимума. Так как оптимальное управление в задаче существует, то очевидно, что $\bar{u}$ — решение задачи. Однако интересно, что дают формальные методы без привлечения теоремы существования.

Покажем, что особое управление $u^*$ не оптимально (заметим, что все локальные условия оптимальности оказываются не эффективными в силу глубокого вырождения этой экстремали). Воспользуемся конструкцией улучшения управления из [22, 24]: так как $S^2$ слабо (и сильно) возрастает, то для любой траектории $x(\cdot)$ с $u \not\equiv 0$ выполняется неравенство $x(1) - J(u^*) = x(1) < 0$ и, следовательно, $x^3(1) - J(u^*) < 0$, что и требовалось.

Установим теперь оптимальность $\bar{u} \equiv 1$, пользуясь $K$-достаточными условиями. Потенциал $S^1$ порождает (из равенства $S^1_x = -\psi = c/(x-1)$) функцию

$$S(t,x) = -\ln\big((1-x)\xi(t)\big),$$

где $\xi(t) > 0$ — произвольная гладкая функция. Для нее уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\bar{h}[S] = -\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} - 1 = 0,$$

если выбрать $\xi(t) = \xi(0)e^{-t}$, $\xi(0) > 0$. При этой $\xi$ функция $S$ сильно возрастает. Положим $\Phi = \{S\}$ и рассмотрим соответствующую концевую задачу $(EP(\Phi))$ из $K$-достаточных условий:

$$x(1) \to \min; \quad x(1) \ge 1 - e.$$

Очевдно, что $\bar{x}(1) = 1 - e$ — её решение; это означает оптимальность управления $\bar{u}$.

## 2.7 Примеры

Сначала вернемся к примеру 2.4 из п. 2.2.2.

**Пример 2.7.** $\dot{x}=0, \dot{y}=xu, |u|\le 1, y(0)=0, x^2(0)+y^2(1)\le 1$, $J[\sigma]=y(1)\to\min$. Посмотрим, что дают в этом примере необходимые условия оптимальности канонической теории.

Напомним, что расширенный нижний гамильтониан управляемой системы имеет вид

$$\bar{h}(t,x,y,p)=p_t-|p_y x|,\quad p=(p_t,p_x,p_y).$$

Очевидно, что

$$\bar{h}(t,x,y,p)=p_t-|p_y x|\le p_t-p_y x,$$

и, следовательно, все решения линейного уравнения

$$V_t-V_y x=0\quad \forall\,(t,x)\in[0,1]\times R^2,$$

слабо убывают в обратном времени. Данное уравнение имеет два независимых инварианта $\eta_1=x$, $\eta_2=tx+y$, с помощью которых построим функцию

$$V(t,x,y;x_0)=-(xt+y)^2-(x-x_0)^2,$$

удовлетворяющую краевому условию наведения.

Соответствующая $V$ концевая задача $(EP(\mathcal{E}_-(V)))$ сводится к следующей:

$$y_1\to\min,\quad y_0=0,\quad x_0^2+y_1^2\le 1,\quad y_1=-x_1,\quad x_1=x_0.$$

Её решением является вектор $q^*=\big(x_0^*=\sqrt{2}/2,\ y_0^*=0,\ x_1^*=\sqrt{2}/2,\ y_1^*=-\sqrt{2}/2\big)$, откуда можно сделать вывод, что

$$\min(P)\le\min(EP(\mathcal{E}_-(V)))=-\sqrt{2}/2.$$

Следовательно, не оптимальны все процессы $\sigma\in\Sigma$ со значением целевого функционала больше $-\sqrt{2}/2$. Как мы знаем (см. пример 1.4), эта оценка является точной, так как $\min(P)=-\sqrt{2}/2$, а $q^*$ — концевой вектор одного из оптимальных процессов задачи. Заметим, что $V$-экстремальное управление $u^V(t,y;x_0)=\operatorname{sign}\{2x_0(x_0t+y)\}$ порождает соответствующее программное управление $u^*\equiv -1$.

Отметим, что из оценки оператора Гамильтона-Якоби

$$\bar{h}(t,x,y,p)=p_t-|p_y x|\le p_t+p_y x$$

можно найти функцию

$$V'(t,x,y;x_0)=-(xt-y)^2-(x-x_0)^2\in\mathcal{V}^-_{w\uparrow},$$

применение которой также приводит к точной оценке значения задачи $(P)$, а решение соответствующей концевой задачи и $V'$-экстремальное управление — ко второму из оптимальных процессов.

**Пример 2.8.** Рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления со свободными концами траекторий:

$$\dot{x} = u, \quad J = \int\limits_0^T u^2(t)dt + \omega\big(x(0), x(T)\big) \to \inf, \quad \omega(x_0, x_T) = x_0^2 + 4x_0x_T + x_T^2$$

сначала без ограничений на управление (классический вариант). Заметим, что концевая форма $\omega$ здесь знакопеременная, так что нулевой процесс не обязательно оптимален. Перепишем задачу в форме Майера:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = u^2, \quad y(0) = 0,$$
$$J[\sigma] = l(q) = y(T) + \omega\big(x(0), x(T)\big) \to \inf .$$

Будем искать разрешающую функцию в виде

$$V(t, x, y; x_0) = (x,\ x_0)S(t)\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} - v(x_0) + y, \quad S(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где $2 \times 2$ симметричная матричная функция $S(t) = \big(S_{ij}(t)\big)$ непрерывно дифференцируема и функция $v(x_0)$ непрерывна.

Во-первых, $V$-экстремальное бипозиционное управление (2.25) определяется равенством

$$u_*[t, x; x_0] = -\frac{V_x}{2} = -S_{11}(t)x - S_{12}(t)x_0, \tag{2.35}$$

а дифференциальная система типа Риккати из параграфа 2.5 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= S_{11}^2, & S_{11}(T) &= 1, \\ \dot{S}_{12} &= S_{11}S_{12}, & S_{12}(T) &= 2, \\ \dot{S}_{22} &= S_{12}^2, & S_{22}(T) &= 1. \end{aligned}$$

Её решение приводит к бипозиционной $L$-функции

$$V(t, x, y; x_0) = \frac{1}{T+1-t}x^2 + \frac{4}{T+1-t}xx_0 + \frac{4}{T+1-t}x_0^2 - \frac{9}{T+1}x_0^2 + y.$$

Ясно, что эта функция не сводится к традиционной.

Применение теорем 2.5.1 и 2.5.2 приводит к следующим выводам:

1. Если $T < 2$, то $\min(EP(\mathcal{E}_+(V))) = 0$ и глобально оптимальным является единственный процесс $\bar{\sigma} = 0$.

2. Если $T = 2$, то $\min(EP(\mathcal{E}_+(V))) = 0$ и существует бесконечное множество оптимальных процессов $\tilde{\sigma}(x_0)$: $\tilde{u}(t, x_0) \equiv -x_0$, $\tilde{x}(t, x_0) = x_0(1-t)$, $\tilde{y}(t, x_0) = x_0^2 t$, $x_0 \in R$, полученных с помощью $V$-экстремального управления (2.35).

3. При $T > 2$ $\inf(EP(\mathcal{E}_+(V))) = -\infty$, и оптимального процесса не существует. Для этого достаточно рассмотреть минимизирующую последовательность процессов $\{\sigma^k\}:$ $u^k(t) = k,$ $x^k(t) = kt - kT/2,$ $y^k(t) = k^2 t,$ для которой $J[\sigma^k] \to -\infty$ при $k \to +\infty$.

Очевидно, что нулевой экстремали соответствует сопряженная точка $T = 2$ $[15, 31, 36, 79, 82]$, на которую (по аналогии со случаем фиксированного $x_0$) указывает неограниченность значения исходной задачи при $T > 2$. Мы получили этот вывод автоматически *в процессе решения задачи*, без специальных критериев проверки условия Якоби отсутствия сопряженных точек для *фиксированной экстремали.* (Впрочем, для задач со свободным $x_0$ такие критерии нам не известны.)

Модифицируем пример, введя ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$.

Ясно, что при $T < 2$ процесс $\bar{\sigma} = 0$ останется глобально оптимальным, а при $T = 2$ оптимальными будут процессы $\tilde{\sigma}(x_0)$ с $x_0 \in [-1, 1]$ (остальные процессы серии $\tilde{\sigma}(x_0)$ не допустимы).

Пусть теперь $T > 2$. Отметим, что теперь

$$h(t, x, \psi) = \begin{cases} \psi_x + \psi_y, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -\psi_x + \psi_y, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\dfrac{\psi_x^2}{4\psi_y}, & \left|\dfrac{\psi_x}{2\psi_y}\right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ 0, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0, \end{cases}$$

а минимизирующее $H$ управление имеет вид

$$u(t, x, \psi) = \begin{cases} 1, & \psi_x + 2\psi_y < 0, \\ -1, & \psi_x - 2\psi_y > 0, \\ -\dfrac{\psi_x}{2\psi_y}, & \left|\dfrac{\psi_x}{2\psi_y}\right| \leq 1 \text{ и } \psi_y \neq 0, \\ \text{любое } |u| \leq 1, & \psi_x = 0 \text{ и } \psi_y = 0. \end{cases}$$

Во-первых, возьмем четыре линейные сильно возрастающие $L$-функции

$$\begin{aligned} &V^1(t, x; x_0) = t - x + x_0, && V^2(t, x; x_0) = t + x - x_0, \\ &V^3(y) = y, && V^4(t, y) = t - y, \end{aligned}$$

дающие точное априорное описание множества достижимых точек каждого из уравнений управляемой системы. Далее, возьмем семейство (по $\psi$) сильно возрастающих $L$-функций, линейных по фазам:

$$V^\psi(t, x, y; x_0) = \psi(x - x_0) + \frac{\psi^2}{4} t + y, \quad |\psi| \leq 2.$$

Поскольку все $L$-функции линейны, то применяются достаточные условия, близкие к принципу максимума Понтрягина. Отметим, что конструкция функций $V^\psi$ использует прием нормировки $L$-функций (см. введение, а также $[24, 77]$).

Чтобы не иметь в концевой задаче бесконечного числа ограничений, от семейства $L$-функций $\{V^\psi \mid |\psi| \le 2\}$ перейдем к его нижней огибающей — к функции

$$V^5(t,x,y;x_0) = V_*(t,x,y;x_0) = \begin{cases} -\dfrac{(x-x_0)^2}{t} + y, & |x-x_0| < t, \\ -2|x-x_0| + t + y, & |x-x_0| \ge t. \end{cases}$$

Множество функций $V^i$, $i=\overline{1,5}$, обозначим через $\mathcal{V}$ и рассмотрим соответствующую концевую задачу $(EP(\mathcal{E}_+(\mathcal{V})))$:

$$l(q) = y_1 + x_0^2 + 4x_0x_1 + x_1^2 \to \inf;$$
$$\frac{(x_1-x_0)^2}{T} - y_1 \le 0, \quad |x_1 - x_0| \le T, \quad y_1 \in [0,T].$$

Эта задача имеет два решения, через которые с помощью $\mathcal{V}$-экстремального бипозиционного управления

$$u_*[t,x;x_0] = \begin{cases} -1, & x-x_0 \le -t, \\ \dfrac{x-x_0}{t}, & |x-x_0| < t, \\ 1, & x-x_0 \ge t, \end{cases}$$

определяются глобально оптимальные процессы

$$\sigma^1 = \big(x^1(t) = t - T/2,\ y^1(t) = t,\ u^1(t) \equiv 1\big)\,,$$
$$\sigma^2 = \big(x^2(t) = -t + T/2,\ y^2(t) = t,\ u^2(t) \equiv -1\big)\,.$$

Заметим, что функции $V^\psi$ представимы в виде разности $\varphi(t,x,y) - \varphi(t_0,x_0,y_0)$, т.е. порождены традиционными $\varphi$, однако, их нижняя огибающая $V_*$ этим свойством не обладает.

При исследовании случая $T > 2$ можно использовать и другое семейство $L$-функций (вместо $V^\psi$):

$$\tilde{V}^\psi(t,x,y;x_0) = \psi(x-x_0) + t(|\psi|-1) + y, \quad |\psi| \ge 2,$$

дополненное априорными оценками.

# Литература


[1] *Алексеев, В.М.* Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

[2] *Антипина, Н.В.* Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н.В. Антипина, В.А. Дыхта // *Изв. вузов. Математика.* — 2002. — № 12. — С. 11–21.

[3] *Аргучинцев, А.В.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А.В. Аргучинцев, В.А. Дыхта, В.А. Срочко // *Изв. вузов. Математика.* — 2009. — № 1. — С. 3–43.

[4] *Арнольд, В.И.* Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1989. — 472 с.

[5] *Арутюнов, А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи / А.В. Арутюнов. — М.: Изд-во «Факториал», 1997. — 256 с.

[6] Ащепков Л.Т. *Оптимальное управление линейными системами* // Учеб. пос. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та. 1982. 116 с.

[7] *Ащепков, Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. — Новосибирск: Наука, 1987. — 227 с.

[8] *Борщевский, М.З.* Задача динамического использования истощаемого ресурса / М.З. Борщевский // Вопросы прикладной математики. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1977. — С. 120–131.

[9] *Васильев, С.Н.* Метод сравнения в анализе систем. I, II / С.Н. Васильев // *Дифференциальные уравнения.* — 1981. — Т. 17, № 9, 11. — С. 1562–1573, 1545–1554.

[10] *Васильев, С.Н.* Метод сравнения в анализе систем. III, IV / С.Н. Васильев // *Дифференциальные уравнения.* — 1982. — Т. 18, № 2, 6. — С. 197–205, 938–947.

[11] *Васильев, Ф.П.* Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

[12] *Габасов, Р.* Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. — М.: Наука, 1971. — 508 с.

[13] *Галеев, Э.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 320 с.

[14] *Гантмахер, Ф.Р.* Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов / Ф.Р. Гантмахер; Под ред. Е.С. Пятницкого. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 264 с.

[15] *Гельфанд, И.М.* Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. — М.: Физматлит, 1961. — 228 с.

[16] *Гурман, В.И.* Принцип расширения в задачах управления. 2-е изд., перераб. и доп. / В.И. Гурман. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 288 с.

[17] *Гусейнов, Х.Г.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления / Х.Г. Гусейнов, В.Н. Ушаков // *Дифференциальные уравнения.* — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1888–1894.

[18] *Дыхта, В.А.* Условия локального минимума для особых режимов в системах с линейным управлением / В.А. Дыхта // *Автоматика и телемеханика.* — 1981. — № 12. — С. 5–10.

[19] *Дыхта, В.А.* Принцип расширения в качественной теории управления / В.А. Дыхта // Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / Под ред. В.И. Гурмана, Г.Н. Константинова. — Новосибирск: Наука, 1990. — 190 с.

[20] *Дыхта, В.А.* Вариационный принцип максимума для классических задач оптимального управления / В.А. Дыхта // *Автоматика и телемеханика.* — 2002. — № 4. — С. 47–54.

[21] *Дыхта, В.А.* Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В.А. Дыхта // *Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения.* — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.

[22] *Дыхта, В.А.* Некоторые приложения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении / В.А. Дыхта // *Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. математика.* — 2009. — Т. 2. — С. 183–196.

[23] *Дыхта, В.А.* Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова / В.А. Дыхта // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 66–75.

[24] *Дыхта, В.А.* Неравенства Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение / В.А. Дыхта // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки.* — 2010. — Т. 15, № 15. — С. 405–425.

[25] *Дыхта, В.А.* Достаточные условия оптимальности для задач импульсного управления / В.А. Дыхта, Н.В. Антипина // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* — 2004. — № 4. — С. 76–83.

[26] Дыхта В.А., Колокольникова Г.А., Никифорова И.А. *Нелокальные преобразования задач оптимального управления и условия минимума на множестве последовательностей в задачах с особыми режимами // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд–ие, 1985. – С. 59–75.

[27] *Дыхта, В.А.* Оптимальное импульсное управление с приложениями / В.А. Дыхта, О.Н. Самсонюк. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.

[28] *Дыхта, В.А.* Неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими концевыми ограничениями / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Автоматика и телемеханика.* — 2011. — № 9. — С. 13-27.

[29] *Дыхта, В.А.* О реализации нестандартной двойственности в задачах оптимального управления / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин // *Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки.* — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 1071-1073.

[30] *Дыхта, В.А.* Управляемые системы: условия экстремальности, оптимальности и идентификация алгебраической структуры / В.А. Дыхта, С.П. Сорокин, Г.Н. Яковенко // *Труды МФТИ.* — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 122-131.

[31] *Зеликин, М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении / М.И. Зеликин. — М.: Изд-во «Факториал», 1998. — 351 с.

[32] *Зеликина, Л.Ф.* Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления / Л.Ф. Зеликина // Вероятностные проблемы управления в экономике / Под ред. В.И. Аркина. — М.: Наука, 1977. — С. 33–114.

[33] Избранные труды А.Б. Куржанского / Под ред. А.Н. Дарьина, И.А. Дигайлова, И.В. Рублева. — М.: Изд. Моск. ун-та, 2009. — 756 с.

[34] *Иоффе, А.Д.* Выпуклые функции, связанные с вариационными задачами, и проблема абсолютного минимума // Матем. сб. – 1972. – Т. 88, N 2. – С. 194–210.

[35] *Иоффе, А.Д.* Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[36] *Кларк, Ф.* Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. — 280 с.

[37] *Красовский, Н.Н.* Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1985. — 518 с.

[38] *Кротов, В.Ф.* Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. — М.: Наука, 1973. — 448 с.

[39] *Левитин, Е.С.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями / Е.С. Левитин, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский // *Успехи математических наук.* — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 85–148.

[40] *Матвеев, А.С.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие / А.С. Матвеев, В.А. Якубович. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. — 540 с.

[41] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Физматгиз, 1961. — 388 с.

[42] *Матросов, В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В.М. Матросов. — М.: Физматлит, 2001. — 384 с.

[43] *Матросов, В.М.* Метод сравнения в математической теории систем / В.М. Матросов, Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев. — Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.

[44] Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. — 312 с.

[45] Оптимальное управление / Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, и др.; Под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[46] Оптимальное управление в линейных системах / А.А. Милютин, А.Е. Илютович, Н.П. Осмоловский, С.В. Чуканов. — М.: Наука, 1993. — 268 с.

[47] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 388 с.

[48] *Пшеничный, Б.Н.* Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1982. — 141 с.

[49] *Руш Н., Абетс П. , Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 301 с.

[50] *Субботин, А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби / А.И. Субботин. — М.: Наука, 1991. — 216 с.

[51] *Субботин, А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А.И. Субботин. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

[52] *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 216 с.

[53] *Хрусталев, М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана / М.М. Хрусталев // *Доклады АН СССР.* — 1978. — Т. 242, № 5. — С. 1023–1026.

[54] *Хрусталев, М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в методе динамического программирования / М.М. Хрусталев. Деп. в ВИНИТИ, № 4573-81. — М., 1981.

[55] *Хрусталев, М.М.* Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости / М.М. Хрусталев // *Автоматика и телемеханика.* — 1988. — № 5. — С. 62–71.

[56] *Хрусталев, М.М.* Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. II. Условия глобальной оптимальности / М.М. Хрусталев // *Автоматика и телемеханика.* — 1988. — № 7. — С. 70–80.

[57] *Яковенко, Г.Н.* Теория управления регулярными системами / Г.Н. Яковенко. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.

[58] *Янг, Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. — М.: Мир, 1974. — 488 с.

[59] *Aubin, J.-P.* Viability Theory / J.-P. Aubin. — 2nd edition. — Birkhauser, Boston, 2009. — 572 pp.

[60] *Aubin, J.-P.* Differential Inclusions / J.-P. Aubin, A. Cellina. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 342 pp.

[61] *Bacciotti, A.* Differential inclusions and monotonicity conditions for nonsmooth Lyapunov functions / A. Bacciotti, F. Ceragioli, L. Mazzi // *Set Valued Analysis.* — 2000. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 299–309.

[62] *Bacciotti, A.* Lyapunov functions and stability in control theory / A. Bacciotti, L. Rosier. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 235 pp.

[63] *Bardi, M.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations / M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta. — Boston: Birkhauser, 1997. — 570 pp.

[64] *Cannarsa, P.* Some characterizations of optimal trajectories in control theory / P. Cannarsa, H. Frankowska // *SIAM J. Control Optim.* — 1991. — Vol. 29. — Pp. 1322–1347.

[65] *Cannarsa, P.* Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations and optimal control. Progress in nonlinear differential equations and their appications / P. Cannarsa, C. Sinestrari. — Boston: Birkhauser, 2004. — Vol. 58. — 304 pp.

[66] *Caratheodory, C.* Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order / C. Caratheodory. — AMS Chelsea Publishing, 1999. — 412 pp.

[67] *Cesari, L.* Optimization — Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations. Applications of Mathematics. / L. Cesari. — New York: Springer-Verlag, 1983. — Vol. 17 of *Applications of Mathematics.* — 542 pp.

[68] *Clarke, F.H.* Nonconvex duality in optimal control / F.H. Clarke, C. Nour // *SIAM J. Control Optim.* — 2005. — Vol. 43. — Pp. 2036–2048.

[69] *Clements, D.J.* Singular optimal control: The linear-quadratic problem / D.J. Clements, B.D.O. Anderson // Lecture Notes in Control and Information Sciences / Ed. by A.V. Balakrishan, M. Thoma. — Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1978. — 93 pp.

[70] *Dmitruk, A.V.* Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control problem / A.V. Dmitruk // Proc. of Symp. Pure Math. «Differential Geometry and Control» / Ed. by G. Fereira et al. — Vol. 64. — Amer. Math. Soc., 1998. — Pp. 163–198.

[71] *Dykhta, V.A.* Lyapunov-Krotov inequality and sufficient conditions in optimal control / V.A. Dykhta // *J. Math. Sci.* — 2004. — Vol. 121. — Pp. 2156–2177.

[72] *Dykhta, V.A.* Sufficient optimality conditions for classical and impulsive optimal control problems / V.A. Dykhta, N.V. Antipina // Proc. 10th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED2002). — Lisbon, Portugal: 2002.

[73] *Dykhta, V.A.* Some applications of Hamilton-Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems / V.A. Dykhta, O.N. Samsonyuk // *European Journal of Control.* — 2011. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 55–69.

[74] *Ekeland, I.* Nonconvex minimization problems / I. Ekeland // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 443–474.

[75] *Frankowska, H.* Value function in optimal control / H. Frankowska // Mathematical Control Theory / Ed. by A.A. Agrachev. — Trieste, Italy: ICTP, 2002. — Vol. 8, no. 2 of *ICTP Lecture Notes Series.* — Pp. 515–654.

[76] *Krasovskii, N.N.* Game-Theoretical Control Problems / N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin. — Berlin: Springer-Verlag, 1988. — 517 pp.

[77] *Krotov, V.F.* Global Methods in Optimal Control Theory. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. / V.F. Krotov. — New York: Marcel Dekker, 1996. — Vol. 195. — 384 pp.

[78] *Lakshmikantham, V.* Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems / V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. — 172 pp.

[79] *Marchal, C.* Second-order tests in optimization theories / C. Marchal // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 1975. — Vol. 15, no. 6. — Pp. 633–666.

[80] *Milyutin, A.A.* Calculus of variations and optimal control / A.A. Milyutin // Proc. Internat. Conf. on the Calculus of Variations and Related Topics. — Vol. 411. — Haifa: Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, 2000. — Pp. 159–172.

[81] *Milyutin, A.A.* Calculus of Variations and Optimal Control / A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. — 372 pp.

[82] *Molinary, B.P.* Nonnegativity of a quadratic functional / B.P. Molinary // *SIAM J. Control Optim.* — 1975. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 792–806.

[83] *Mordukhovich, B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation I & II. Fundamental Principles of Mathematical Sciences / B.S. Mordukhovich. — Berlin: Springer, 2006. — Vol. 330 & 331. — 611 & 580 pp.

[84] Nonsmooth Analysis and Control Theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. — New York: Springer-Verlag, 1998. — Vol. 178 of *Grad. Texts in Math.* — 276 pp.

[85] *Pachter, M.* Revisit of linear-quadratic optimal control / M. Pachter // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 2009. — Vol. 140. — Pp. 301–314.

[86] *Vinter, R.B.* Weakest conditions for existence of Lipschitz continuous Krotov functions in optimal control theory / R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1983. — Vol. 21. — Pp. 215–234.

[87] *Vinter, R.B.* Dynamic programming for optimal control problems with terminal constraints / R.B. Vinter // *Lecture Notes in Math.* — 1985. — Vol. 1119. — Pp. 190–202.

[88] *Vinter, R.B.* Convex duality and nonlinear optimal control / R.B. Vinter // *SIAM J. Control Optim.* — 1993. — Vol. 31. — Pp. 518–538.

[89] *Vinter, R.B.* Optimal Control / R.B. Vinter. — Boston: Birkhauser, 2000. — 520 pp.

[90] *Vinter, R.B.* A necessary and sufficient condition for optimality of dynamic programming type, making no a priori assumptions on the controls / R.B. Vinter, R.M. Lewis // *SIAM J. Control Optim.* — 1978. — Vol. 16. — Pp. 571–583.

[91] *Vinter, R.B.* A verification theorem which provides a necessary and sufficient condition for optimality / R.B. Vinter, R.M. Lewis // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 84–89.

[92] *Wolenski, P.R.* Proximal analysis and the minimal time function / P.R. Wolenski, Yu. Shuang // *SIAM J. Control Optim.* — 1998. — Vol. 36. — Pp. 1048–1072.