ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Серия: «Неклассические задачи динамики и управления»

Выпуск 1

И.А. Финогенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Учебное пособие

Иркутск — 2013

УДК 517.9
Рекомендовано к изданию Ученым советом ИДСТУ СО РАН

Серия «Неклассические задачи динамики и управления» основана в 2013 году

Научный редактор серии: д-р физ.-мат. наук, чл.-к. РАН А.А. Толстоногов

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук Р.И. Козлов;
д-р физ.-мат. наук А.В. Лакеев

Финогенко И.А. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. — 82 с. — (Серия «Неклассические задачи динамики и управления»; вып. 1).

Пособие ориентировано на первоначальное знакомство с теорией дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и содержит все необходимые для этого сведения из многозначного анализа и теории дифференциальных включений. Предназначено для студентов математических факультетов госуниверситетов и аспирантов. Может использоваться при изучении курсов дифференциальных уравнений, проведении семинаров и факультативных занятий.

Библиогр. 19 назв.

Предисловие

В настоящее время можно говорить о достаточно развитой теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями с многочисленными приложениями в различных областях математики, механики и техники. Это указывает на необходимость знакомства с основными понятиями и методами этой теории уже на студенческой скамье. Программы изучения классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вузов по математическим и техническим специальностям могут включать разделы и специальные курсы лекций теории дифференциальных уравнений с многозначными и разрывными правыми частями, как необходимый элемент обучения. Элементы теории разрывных систем можно найти в статьях и книгах, которые не всегда могут быть использованы в качестве учебного материала. Здесь мы укажем прежде всего на монографию А.Ф. Филиппова [14]. Дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями посвящена глава в книге А.И. Егорова [9], основанная на упомянутой выше монографии А.Ф. Филиппова. Это пособие написано на основе специального курса лекций, который автор на протяжении ряда лет читал студентам-математикам Иркутского государственного университета.

Автор не ставил своей целью приводить обширный обзор литературы и указал лишь на книги, которые, по его мнению, могут привлечь заинтересованного читателя для более глубокого изучения теории разрывных систем.

Оглавление

Глава 1

Общие сведения о дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью

1.1 Дифференциальные уравнения Каратеодори

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка будем называть уравнения вида

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\, i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где $\dot{x}_i$ обозначает производную функции $x_i(t)$ по t. Переменная t обычно интерпретируется как время, а переменные x_i описывают состояние объекта. Введем обозначения $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, $f = (f_1 \ldots, f_n)$ и перепишем систему (1.1) в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x),\, x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Здесь к дифференциальным уравнениям добавлены начальные условия (t_0, x_0) и задача (1.2) называется задачей Коши.

Если функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов, то под решением задачи Коши на интервале (α, ω) понимается непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на этом интервале, удовлетворяющая начальному условию и данному дифференциальному уравнению для всех значений $t \in (\alpha, \omega)$. Такие решения существуют по крайней мере локально для любых начальных условий (t_0, x_0) и называются *классическими.* Классическое решение является абсолютно непрерывной функцией на каждом отрезке $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset (\alpha, \omega)$. Отметим, что абсолютно непрерывные функции и только они восстанавливаются по своей производной интегрированием (вообще говоря, по Лебегу). Это общее свойство решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Оно обеспечивает равносильность дифференциального уравнения (1.2) и интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)ds \qquad (1.3)$$

и позволяет существенно ослабить предположение о непрерывности функции $f(t, x)$ по переменной t. Иными словами, определение решения уравнения (1.2), как абсолютно непрерывной функции $x(t)$, удовлетворяющей интегральному уравнению (1.3) можно распространить и на более широкие классы функций $f(t, x)$, разрывные по переменной t и непрерывные по переменной x. Можно, например, предположить, что функция $f(t, x)$ непрерывна по (t, x) справа относительно переменной t. Это означает, что из условий $(t', x') \to (t, x)$, $t' > t$ должно следовать $f(t', x') \to f(t, x)$. Для таких функций $f(t, x)$ решение $x(t)$ будет иметь непрерывную справа правую производную $D^+x(t)$, удовлетворяющую уравнению (1.2) в каждой точке t из интервала (α, ω). Такие решения называются *правосторонними* и, чтобы они существовали, нужно еще предположить локальную ограниченность функции f в своей области определения (непрерывные функции f, очевидно, являются локально ограниченными и для них это предположение излишне).

Наиболее общий класс функций $f(t, x)$, разрывных по t и непрерывных по переменной x, для которых решение дифференциального уравнения (1.2) может рассматриваться как решение равносильного ему интегрального уравнения (1.3), описывают следующие условия.

1. Функция $f(t,x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x.

2. Функция $f(t,x)$ при каждом фиксированном x измерима по t.

3. Функция $f(t,x)$ интегрально ограничена, т.е. существует суммируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке функция $m(t)$ такая, что $|f(t,x)| < m(t)$ для почти всех t и всех x (по крайней мере локально, т.е. в окрестности каждой точки x).

Условия 1-3 называются *условиями Каратеодори* и решение уравнения (1.2), которое они обеспечивают, называется *решением Каратеодори.* Это абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset (\alpha, \omega)$ функция, производная $\dot{x}(t)$ которой является измеримой функцией, существующей и удовлетворяющей этому уравнению почти всюду.

Таким образом, условия зависимости функции $f(t,x)$ от переменной t могут быть весьма общими и при этом решение уравнения (1.2) понимается в обычном смысле так, как это указано выше. Существование решения может доказываться методом последовательных приближений или применением теорем о неподвижных точках к интегральному уравнению (1.3).

Ситуация принципиально меняется, если функция $f(t,x)$ разрывна по фазовым переменным x. Здесь возникает вопрос о самом понятии решения в классе абсолютно непрерывных функций.

1.2 Уравнения, разрывные по переменной состояния

Рассмотрим следующий простой пример:

$$\dot{x} = 1 - 2\operatorname{sgn} x,$$

где $\operatorname{sgn} x$ — функция знака. Для данного уравнения при $x_0 \neq 0$ имеем решения $x(t) = 3(t - t_0) + x_0$, если $x_0 < 0$ и $x(t) = -t + x_0$, если

$x_0 > 0$. При возрастании t любое решение попадает на прямую $x = 0$ и не может сойти с нее. Но если при $x = 0$ полагать, как обычно, $\operatorname{sgn} x = 0$, то $\dot{x} = 1$. Таким образом, и оставаться на прямой $x = 0$ решение также не может, так как для этого необходимо $\dot{x}(t) = 0$.

В более общей ситуации рассмотрим случай, когда функция $f(x, t)$ разрывна на гладкой поверхности $S = \{x : \varphi(x) = 0\}$. Поверхность S делит пространство переменной x на части

$$S^+ = \{x : \varphi(x) > 0\},\ S^- = \{x : \varphi(x) < 0\}.$$

Предположим, что функция $f(t, x)$ имеет предельные значения, приближаясь к поверхности S с обеих сторон, и обозначим для каждой точки $x \in S$

$$f^+(t, x) = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in S^+}} (t, x'),\ f^-(t, x) = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in S^-}} (t, x').$$

Предположим далее, что градиент $\bigtriangledown\varphi(x) \neq 0$ и

$$f_N^+(t, x) = \frac{\langle \bigtriangledown\varphi(x), f^+(t, x)\rangle}{\|\bigtriangledown\varphi(t, x)\|}$$

$$f_N^-(t, x) = \frac{\langle \bigtriangledown\varphi(x), f^-(t, x)\rangle}{\|\bigtriangledown\varphi(t, x)\|}$$

— проекции векторов f^+ и f^- на нормаль (направленную в сторону S^+) к поверхности S. (Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения векторов и $\|\cdot\|$ — евклидова норма).

Если вблизи поверхности $f_N^-(t, x) > 0$ и $f_N^+(t, x) < 0$, то векторы $f(t, x)$ направлены в сторону поверхности (мы считаем, что эти предельные векторы проведены из точки x). Поэтому все решения уравнения (1) приближаются к S при возрастании t и ни одно не может сойти с нее. Следовательно, при попадании на поверхность S в точке (t, x) решение $x(t)$ уравнения (2) должно быть определено так, чтобы оставаться на S при возрастании t. Это возможно, если выполняется условие: вектор $\dot{x}(t)$ лежит в касательной к поверхности S плоскости P и является решением уравнения

$$\dot{x} = f^{\circ}(t, x) \tag{1.4}$$

где $f^{\circ}(t, x)$ — точка пересечения отрезка с концами $f^{+}(t, x)$ и $f^{-}(t, x)$ с плоскостью P. Из условия $\langle \bigtriangledown\varphi, \alpha f^{+} + (1-\alpha) f^{-} \rangle = 0$ легко подсчитать, что

$$f^{\circ} = \alpha f^{+} + (1-\alpha) f^{-},$$

где

$$\alpha = \frac{f_N^{-}}{f_N^{-} - f_N^{+}},\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Ситуация существенно усложняется, если поверхностей разрыва более одной. Здесь, в частности, возникает вопрос об однозначной определенности в явном виде скорости движения $\dot{x}$ по пересечению поверхностей разрыва функции $f(t, x)$. Такие движения называются скользящими режимами и заслуживают отдельного внимания.

Из этих рассмотрений видно, что для дифференциальных уравнений с разрывной по фазовым переменным x функцией $f(t, x)$ в правой части обычное понятие решения не подходит и требуется его обобщение. Эта задача сводится к описанию поля возможных направлений системы (1.2) в точках разрыва функции $f(t, x)$ или, как обычно говорят, доопределению функции $f(t, x)$. Как правило, это доопределение неоднозначно и уравнение (1.2) заменяется на дифференциальное включение $\dot{x} \in F(t, x)$. Если функция f непрерывна в точке (t, x), то $F(t, x)$ состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f. В точках разрыва функции f множество $F(t, x)$ задается тем или иным способом. Оно должно отвечать определенным условиям и не может быть произвольным, т.к. необходимо, чтобы обобщенное понятие решения дифференциальных уранений с разрывными по (t, x) правыми частями удовлетворяло следующим требованиям:

1) для дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью или с условиями Каратеодори решение должно быть равносильно обычному (в частности, оно должно быть абсолютно непрерывным);

2) решение должно существовать локально и продолжаться до границы рассматриваемой области хотя бы при $t \geq t_0$;

3) предел равномерно сходящейся последовательности решений должен быть решением;

4) решение должно переходить в решение при наиболее употребительных заменах переменных;

5) понятие решения должно быть пригодным для описания достаточно широкого класса процессов в физических системах.

Требования 1-4 можно отнести к требованиям математического характера. Они сводятся к тому, что на дифференциальные уравнения с разрывной правой частью должны переноситься основные методы и факты классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Особо отметим требование 3, которое обеспечивает замкнутость множества решений в пространстве непрерывных на отрезке функций и лежит в основе исследования зависимости множества решений от начальных условий и параметров. Более общим было бы требование о том, чтобы предел равномерно сходящейся последовательности приближенных решений должен быть решением, но для этого еще нужно определить понятие приближенного решения и разработать методы их построения.

Требование 5 относится к содержательному смыслу понятия решения. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью часто возникают при идеализации реальных физических систем или явлений, таких, как система автоматического регулирования с релейными характеристиками или сухое кулоново трение. В этой ситуации определение понятия решения должно позволять описывать поведение системы в точках разрыва функции $f(t, x)$. Последнее опирается на инженерные соображения или на физические законы. Поэтому требования 1-4 носят общий характер, а требование 5 может привести к некоторому разнообразию определений понятия решения.

Всюду в дальнейшем под дифференциальным уравнением с разрывной правой частью понимается уравнение (1.2) при условии, что функция $f(t,x)$ (в отличие от уравнения Каратеодори) разрывна по переменной x.

1.3 Как возникают дифференциальные уравнения с разрывной правой частью в задачах механики и теории управления

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью могут возникать различными путями, как *a priori*, так и в результате идеализации некоторых характеристик, входящих в реальную физическую систему в задачах механики, физики, техники, управления. Как правило, процесс идеализации оформлен в виде некоторого предельного перехода по малым параметрам с учетом инженерно-физических соображений. Здесь мы рассмотрим два достаточно содержательных примера, когда разрывные характеристики возникают при учете физических законов (сухое трение) или из инженерных решений (двухпозиционное реле). Эти задачи допускают детальное исследование поведения траекторий на фазовой плоскости и поэтому какие-либо общие выводы можно отложить на будущее.

1.3.1 Простейший осциллятор с сухим трением

Зависимость кулоновой силы трения скольжения от скорости носит сигнатурный характер: величина силы трения F_{fr} имеет знак противоположный скорости движения тела, а при нулевой скорости неопределена и может принимать любые значения от $+F_{fr}$ до $-F_{fr}$. Простейшей моделью осциллятора при наличии кулонова трения может служить брусок на горизонтальной подставке, прикрепленный пружиной к стене. При сжатии или при растяжении пружины груз начнет совершать колебательные движения. По закону Кулона сила трения F_{fr} прямопропорциона нормальному давлению бруска на подставку с некоторым коэффициентом ρ_0, который нызывается коэффициентом трения: $F_{fr} = \rho_0 mg$, где m — масса бруска, g — ускорение свободного падения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - F_{fr}\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}, \tag{1.5}$$

где k — коэффициент упругой силы пружины.

Отметим, что мы записали уравнение при условии, что брусок движется, т.е. $\dot{x} \neq 0$. В момент остановки сила трения меняет знак на противоположный и брусок начинает движение в обратном направдении (если только сила упругости пружины сумеет преодолеть силу трения, которая препятствует движению).

Обозначая $k/m = \omega_0^2$, $\rho_0/m = a\omega_0^2$ (очевидно, что в этом случае $a = \rho_0/k$), запишем уравнение (1.5) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + a\,\mathrm{sgn}\dot{x} = 0. \tag{1.6}$$

Покажем теперь, как изобразится движение на фазовой плоскости (y, x), где $\dot{x} = y$ — скорость движения, x — расположение центра тяжести бруска. Уравнение (1.6) перепишем как два уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y} + \omega_0^2\}x + a\,\mathrm{sgn}y, \\ \dot{x} = y, \end{cases}$$

и далее преобразуем к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x-a)}{y},\ y < 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x+a)}{y},\ y > 0,$$

или, после интегрирования,

$$\frac{(x-a)^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_1^2\omega_0^2} = 1\, y < 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{(x+a)^2}{C_2^2} + \frac{y^2}{C_2^2\omega_0^2} = 1\, y < 0, \tag{1.8}$$

где C_1, C_2 — константы интеграции. Уравнения (1.7), (1.8) определяют семейства полуэллипсов, центры которых смещены вправо и влево соответственно на величину a. Это и будут траектории рассматриваемой системы — фазовый „портрет“. По нему можно судить о характере движения: фазовые трактории представляют собой спирали, составленные из полуэллипсов и упирающиеся с обеих сторон в отрезок $Z : -\rho_0 mg/k \leq x \leq \rho_0 mg/k$ на оси $\dot{x} = 0$. Иными словами, после конечного числа колебаний со все уменьшающейся амплитудой брусок останавливается в некоторой точке отрезка. Это происходит тогда, когда при очередной остановке сила трения превосходит по абсолютной величине силу упругости пружины: $\dot{x} = 0$ и $k|x| \leq \rho_0 mg$. Отрезок Z часто называют „зоной застоя“. Он целиком состоит из положений равновесия системы. Наличие множества неизолированных положений равновесия — одна из особенностей такого типа разрывных систем дифференциальных уравнений.

Более детально с этим примером можно познакомиться в книге [2].

1.3.2 Двухпозиционный авторулевой

Уравнение вращательного движения судна вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс судна, имеет вид

$$I\ddot{\phi} + h\dot{\phi} = M. \tag{1.9}$$

Здесь ϕ — угол между продольной осью судна и заданным курсом судна, I — главный центральный момент инерции, h — коэффициент вязкого трения, M — момент внешних сил, представляющий собой известную функцию угла ψ поворота руля.

Одной из систем стабилизации курса судна является двухпозиционный авторулевой, при котором руль может находиться в двух положениях: $+\psi_0$ и $-\psi_0$, создавая моменты сил $+M_0$ и $-M_0$, соответственно. Положение руля зависит от состояния судна, т.е. оно является функцией переменных ϕ и $\dot{\phi}$. Перекладка руля из одного положения в другое происходит при прохождении нулевого значения величиной $\xi = \phi + b\dot{\phi}$, $b = const$ — параметр, характеризующий величину коррекции курса судна по угловой скорости вращения судна, т.е. перекладка руля происходит до момента прохождения оси судна через заданный курс ввиду наличия инерциального вращательного движения судна. Функция $M = M(\xi)$ представляет собой разрывное позиционное управление (обратную связь) релейного типа. Таким образом, $M = -M_0 \operatorname{sgn}(\phi + b\dot{\phi})$ при $\xi \neq 0$, а при $\xi = 0$ угол ψ руля может принимать любое значение между $+\psi_0$ и $-\psi_0$.

Обозначим через $x = h^2\phi/M_0 I$, $t_{new} = ht/I$, $\beta = bh/I$ новые безразмерные величины, где t_{new} — новая независимая переменная взамен t. Тогда уравнение (1.9) перепишется в виде

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -y - \operatorname{sgn}(x + \beta y) \tag{1.10}$$

при условии $x + \beta y \neq 0$. Прямая переключений $x + \beta y = 0$ разбивает фазовую плоскость (x, y) на две области O_1 и O_2 и траектории системы из областей O_1 и O_2, получающиеся сменой знака функции $x + \beta y$, симметричны относительно начала координат. Поэтому достаточно изучить поведение траекторий в области O_1, включая прямую $x + \beta y = 0$.

Введем величину $\eta(x, y) = x + \beta y$ и найдем производную $\dot{\eta} = \dot{x} + \beta\dot{y} = (1 - \beta)y - \beta$ функции $\eta(t) = \eta(x(t), y(t))$ на решениях $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (1.10) в области O_1. Эта производная обращается в нуль на прямой $y = \beta/(1 - \beta)$. Пусть $0 < \beta < 1$. Тогда для значений $y > \beta/(1-\beta)$ фазовые траектории удаляются от прямой $x + \beta y = 0$, а для значений $y < \beta/(1 - \beta)$ — приближаются к ней. Таким образом, принимая во внимание симметричность траекторий относительно начала координат, заключаем, что на прямой $x+\beta y = 0$ имеется отрезок

$$|y| \leq \beta/(1-\beta), \tag{1.11}$$

к которому фазовые траектории подходят с обеих строн, а вне этого отрезка пересекают ее. Поэтому, если в некоторый момент времени решение оказывается на отрезке (1.11) граничной прямой, то для всех последующих моментов времени решение остается на этом отрезке прямой $x + \beta y = 0$. Так как $y = \dot{x}$, то закон движения может быть найден из уравнения $x + \beta\dot{x} = 0$, которое легко интегрируется: $x(t) = x_0 \exp(-t/\beta)$. Это движение будет скользящим режимом системы управления судном. После нескольких перекладок руля курс судна стабилизируется по экпоненциальному закону и рулевая машинка может быть выключена.

Более детально этот пример можно посмотреть в книге [6].

1.4 Понятие решения

Через R^n обозначается n-мерное векторное пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и тогда расстояние между векторами x и y запишется в виде

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Мы используем здесь известные понятия предельной точки множества, открытого и замкнутого множества, которые вводятся с использованием функции $\rho(x, y)$ (метрики). Замыкание множества A обозначается $\overline{A}$. Замкнутое и ограниченное множество в пространстве R^n является компактным.

Множество $\{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ называется отрезком, соединяющим точки x и y. Множество $A \subset R^n$ называется выпуклым, если для любых $x \in A$ и $y \in A$ оно содержит весь отрезок, соединяющий точки x и y.

Пусть $A \subset R^n$ — некоторое множество. Наименьшее выпуклое (выпуклое замкнутое) множество, содержащее множество A, называется выпуклой оболочкой (выпуклой замкнутой оболочкой) множества A и обозначается coA (соответственной, $\overline{co}A$).

Множества coA и $\overline{co}A$ существуют для любого непустого множества A и являются пересечением всех выпуклых и, соответственно, всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих A. Например, выпуклой оболочкой множества, состоящего из двух точек, будет отрезок, их соединяющий. Выпуклая оболочка трех точек – треугольник с вершинами в этих точках. Мы оставляем для дальнейшего рассмотрение свойств множеств, сосредоточившись здесь на определениях решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью, связанных к переходу к дифференциальным включениям с выпуклой правой частью. Для этого еще понадобится ввести понятие многозначного отображения.

Пусть $D \subset R^m$ – некоторое множество. Под многозначным отображением $F : D \to R^n$ из D в пространство R^n будем понимать соответствие, которое каждой точке $p \in D$ сопоставляет непустое подмножество $F(p) \subset R^n$.

Иногда многозначные отображения называют мультифункциями или мультиотображениями. Очевидно, что обычные функции можно рассматривать как многозначные, значениями которых являются одноточечные множества.

Классификацию и взаимосвязи между различными понятиями решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью можно найти в книге [10]. Мы приведем три из них, детально изложенных в книге [14].

1.4.1 Определение по Филиппову для систем с кусочно непрерывными правыми частями

Пусть $f(t,x)$ — некоторая однозначная функция, определенная всюду в области $\Omega \subset R^{n+1}$ за исключением (возможно) некоторого множества M точек разрыва функции f. Предполагается, что множество M имеет нулевую меру Лебега. Как правило, в прикладных задачах множество M – это некоторый набор гиперповерхностей (см. ниже) в пространстве переменных (t,x).

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{1.12}$$

Определение 1.4.1. *Функция $f(t,x)$ называется кусочно непрерывной, если выполняются следующие условия:*

1) область Ω состоит из конечного числа областей Ω_j, $(j = 1,\ldots,l)$ и множество M (нулевой меры) точек границ этих областей;

2) в каждой области Ω_j функция $f(t,x)$ непрерывна;

3) для каждой точки $(t,x) \in M$ существует конечный предел функции f по любой из областей Ω_j, для которой точка (t,x) является граничной.

Отметим, что кусочно непрерывная функция локально ограничена в окрестности каждой точки $(t,x) \in \Omega$. Действительно, если (t,x) — точка непрерывности, то ограниченность функции f в окрестности этой точки следует из свойств непрерывных функций. Если же $(t,x) \in M$, то из свойств пределов функций в точке вытекает, что f ограничена на пересечении некоторой окрестности точки (t,x) с каждой из областей Ω_j, для которой точка (t,x) является граничной. Но тогда f ограничена в окрестности точки (t,x), из которой удалены точки множества M. Мы пока рассматриваем функцию $f(t',x')$ при условии, что $(t', x') \notin M$, т.к. на множестве M она может быть не определена.

Для кусочно непрерывной функции $f(t', x')$ через $F(t, x)$ обозначим выпуклую оболочку всех ее предельных значений в каждой фиксированной точке $(t, x) \in \Omega$, когда $(t', x') \notin M$, $(t', x') \to (t, x)$. Если в точке (t, x) функция $f(t, x)$ непрерывна, то $F(t, x)$ — множество, состоящее из одной точки $f(t, x)$. Так как M — множество меры нуль, то при почти всех t мера сечения множества M плоскостью $t = const$ равна нулю.

Определение 1.4.2. *Под решением дифференциального уравнения (1.12) понимается решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1.13}$$

где $F(t, x)$ – многозначное отображение построенное выше. Функция $x : (\alpha, \omega) \to R^n$ является решением дифференциального включения (1.13), если на любом отрезке $I = [t_0, t_1] \subset (\alpha, \omega)$ она абсолютно непрерывна и ее производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяет включению $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ для почти всех $t \in I$.

Приведенное определение решения будем называть решением дифференциального уравнения (1.12) по Филиппову.

Часто множество M точек разрыва кусочно непрерывной функции $f(t, x)$ задается в виде объединения гиперповерхностей в пространстве R^{n+1}, т.е. множеств вида $S_i = \{(t, x) : \varphi_i(t, x) = 0\}$, $i = 1, \dots m$, определяемых непрерывно дифференцируемыми функциями $\varphi_i(t, x)$. Рассмотрим этот случай детально.

Пусть $S = \{(t, x) : \varphi(t, x) = 0\}$ — некоторая гиперповерность. Зафиксируем $(t, x) \in S$ и $z \in R^n$. Из условия дифференцируемости функции $\varphi(t, x)$ можем записать

$$\varphi(t + h, x + hz) = \varphi(t, x) + \langle \nabla\varphi(t, x), z \rangle \cdot h + \frac{\partial \varphi}{\partial t} h + o(h).$$

Так как $\varphi(t,x)=0$, то из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{h}\varphi(t+h,x+hz)=\langle\nabla\varphi(t,x),z\rangle+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{o(h)}{h}. \qquad (1.14)$$

Предположим дополнительно, что $\nabla\varphi(t,x)\neq 0$ и обозначим

$$p(z)=\langle\nabla\varphi(t,x),z\rangle+\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Уравнение $p(z)=0$ определяет гиперплоскость в пространстве R^n. Выбирая векторы z_1 и z_2 сначала с одной, а затем с другой стороны этой гиперплоскости, получаем условия $p(z_1)>0$ и $p(z_2)<0$. Из (1.14) вытекает, что значения функции $\varphi(t+h,x+hz_i)$, $i=1,2$ для достаточно малых $h>0$ будут отличны от нуля и иметь знаки величин $p(z_i)$, $i=1,2$.

Если функция $f(t,x)$ – кусочно непрерывна со множеством точек разрыва $M=S$, то будут существовать пределы

$$\lim_{h\to+0}f(t+h,x+hz_1)=f^+(t,x),$$

$$\lim_{h\to+0}f(t+h,x+hz_2)=f^-(t,x),$$

и при этом:

а) $f^+(t,x)$ является предельным значением функции $f(t',x')$ при условии, что $(t',x')\to(t,x)$ и $(t',x')\in S^+=\{(t,x):\varphi(t,x)>0\}$,

б) $f^-(t,x)$ является предельным значением функции $f(t',x')$ при условии, что $(t',x')\to(t,x)$ и $(t',x')\in S^-=\{(t,x):\varphi(t,x)<0\}$,

Но из условия дифференцируемости функции $\varphi(t,x)$ вытекает также равенство

$$\frac{1}{h}\varphi(t,x+hz)=\langle\nabla\varphi(t,x),z\rangle+\frac{o(h)}{h}. \qquad (1.15)$$

Обозначим $p_0(z)=\langle\nabla\varphi(t,x),z\rangle$ и так же, как и выше, выберем векторы z_1 и z_2 так, чтобы $p_0(z_1)>0$ и $p_0(z_2)<0$. Тогда из (1.15) вытекает, что для достаточно малого $h>0$ будет выполнятся неравенство $\varphi(t,x+hz_1)>0$ и $\varphi(t,x+hz_2)<0$. Из определения кусочной непрерывности функции $f(t,x)$ заключаем, что

$$\lim_{h\to+0} f(t,x+hz_1) = f^+(t,x),$$

$$\lim_{h\to+0} f(t,x+hz_2) = f^-(t,x),$$

т.е. и эти пределы совпадают с предельными значениями функции $f(t,x')$ по множествам S^+ и S^- соответственно при фиксированном t, т.е. при условии $t'=t$.

Из всего изложенного выше можно сделать следующий вывод. Пусть множество M точек разрыва кусочно непрерывной функции $f(t,x)$ представляет собой конечный набор гладких гиперповерхностей S_i, определямых непрерывно дифференцируемыми функциями $\varphi_i(t,x)$, такми, что $\nabla\varphi_i(t,x)\neq 0$ в рассматриваемой области Ω. Тогда в определении решения уравнения (1.12) вместо дифференциального включения (1.13) можно рассматривать дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F_0(t,x), \tag{1.16}$$

где $F_0(t,x)$ – выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t,x')$ при $(t,x')\to(t,x)$, $t=const$, и при этом

$$F_0(t,x)=F(t,x) \tag{1.17}$$

для всех $(t,x)\in\Omega$.

Для дифференциального включения (1.12) значительно проще доказывается теорема существования решения, в то время как с помощью дифференциального включения (1.16) проще исследовать некоторые качественные свойства решений. В книге [14, с.54] сформулировано условие, для которого равенство (1.17) выполняется при каждом фиксированном x при почти всех t в общем случае для кусочно непрерывных функций.

1.4.2 Определение по Айзерману-Пятницкому для разрывных управляемых систем

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.18}$$

где функция f непрерывна по совокупности аргументов (t, x, u), а переменная $u = (u_1, \ldots, u_m)$ имеет смысл управления. Пусть каждая функция $u_i = u_i(t, x)$ разрывна только на одной поверхности $S_i = \{(t, x) : \varphi_i(t, x) = 0\}$ и является кусочно непрерывной. Это означает, что каждая функция $u_i(t, x)$ непрерывна в областях $S_i^+ = \{(t, x) : \varphi_i(t, x) > 0\}$ и $S_i^- = \{(t, x) : \varphi_i(t, x) < 0\}$, на которые поверхность S_i разбивает пространство переменных (t, x), и для каждой точки $(t, x) \in \rho_i$ существуют конечные предельные значения функции $u_i(t, x)$ по этим областям, которые обозначим $u_i^+(t, x)$ и $u_i^-(t, x)$. Через $U_i(t, x)$ обозначается отрезок с концами $u_i^+(t, x)$ и $u_i^-(t, x)$, если $(t, x) \in S_i$. В областях непрерывности функции $u_i(t, x)$ множество $U_i(t, x)$ состоит из одной точки $u_i(t, x)$.

Пусть $F_1(t, x) = f(t, x, U_1(t, x), \ldots, U_m(t, x))$ — множество значений функции $f(t, x, u_1, \ldots, u_m)$, когда (t, x) — фиксированы, а $u_1, \ldots, u_m$ назависимо друг от друга пробегают соответственно множества $U_1(t, x), \ldots, U_m(t, x)$. Через $F_2(t, x)$ для каждых фиксированных (t, x) обозначается выпуклая оболочка множества $F_1(t, x)$.

Определение 1.4.3. *Под решением уравнения (1.18) понимается решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F_2(t, x). \tag{1.19}$$

Отметим, что включение (1.19) может быть записано в виде совокупности систем дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) f(t, u, u_1^*, \ldots, u_m^*), \tag{1.20}$$

где $u_i^* = u_i(t,x)$ в точках непрерывности функции $u_i(t,x)$ и $u_i^* = \lambda_i(t)u_i^+(t,x) + (1 - \lambda_i(t))u_i^-(t,x)$. Здесь $\lambda_i(t) \in [0;1]$, $\alpha_k(t) \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k(t) = 1$ и все функции $\lambda_i(t)$ и $\alpha_k(t)$ - измеримы. Совокупность систем уравнений (1.20) называется репрезентативной системой уравнений и была введена в работе М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого [1].

К функции $\tilde{f}(t,x) = f(t,u,u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$ может быть применено и выпуклое доопределение по Филиппову, в результате чего получим многозначное отображение $F(t,x)$. При этом для каждой фиксированной точки (t,x) множество $F_2(t,x)$ содержит множество $F(t,x)$ и, следовательно, каждое решение в смысле Филиппова является также и решением в смысле Айзермана-Пятницкого. Обратное, вообще говоря, не верно, так как множество $F_2(t,x)$ может оказаться шире множества $F(t,x)$, полученного при простейшем выпуклом доопределении.

Поясним это на примере уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu_1 + cu_2,$$

где A — матрица, b, c и x — векторы, $u_1 = \operatorname{sgn} x_1$, $u_2 = \operatorname{sgn} x_1$, x_1 — первая координата вектора x.

В обоих случаях существует одна гиперплоскость разрыва $x_1 = 0$ и выпуклая оболочка предельных значений суть отрезок $F(t,x)$, соединяющий векторы $F^+ = Ax + b + c$ и $F^- = Ax - b - c$. Но пусть функции u_1 и u_2 имеют смысл управлений и в физической системе реализуются с помощью различных реле, а при $x_1 = 0$ могут принимать любые значения из отрезка $[-1,1]$. Вследствие не идеальности реле равенство $u_1 = u_2$ не выполняется строго в каждый момент времени и функции u_1, u_2 следует считать различными. Тогда множество $F_2(t,x)$ существенно шире множества $F(t,x)$ (если векторы a и b не одинаково направлены).

Таким образом, различие этих двух подходов к определению решения обусловлено тем, что представление разрывных систем репрезентативными уравнениями учитывает неидеальность и особенности реальной физической задачи в теории управления, которую не различает простейшее выпуклое доопределение по Филиппову. Поэтому первый подход в работах М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого называется математическим, а второй — физическим. Общим у них является то, что соответствующие дифференциальные включения имеют многозначные отображения с выпуклыми значениями в правых частях. Это связано с методами изучения дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Отметим, что оба этих подхода находят свою область применимости.

1.4.3 Метод эквивалентного управления. Уравнения скользящих режимов

Будем рассматривать, как и в предыдущем разделе, уравнение (1.18). Пусть (t,x) принадлежит одновременно поверхностям $S_1,\dots,S_r$, $1\le r\le m$. Задача состоит в том, чтобы подобрать значения управлений $u_i^{eq}(t,x)\in U_i(t,x)$ так, чтобы решение оставалось на этих поверхностях при $t'\ge t$. Для этого необходимо, чтобы вектор производной удовлетворял равенствам

$$\langle\nabla\varphi_i(t,x),\dot{x}\rangle+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=0$$

для всех $i=1,\dots,r$. Учитывая, что $\dot{x}=f(t,x,u)$, получаем систему уравнений для определения u_i^{eq}:

$$\langle\nabla_x\varphi_i(t,x),f(t,x,u_1^{eq},\dots,u_r^{eq},u_{r+1},\dots,u_m)\rangle+\frac{\partial\varphi_i(t,x)}{\partial t}=0,\qquad(1.21)$$

где $i=1,\dots,m$.

Определение 1.4.4. *Функции $u_i^{eq}(t,x)$ называются эквивалентными управлениями, и под решением уравнения (1.18) понимается аб-*

солютно непрерывная функция $x(t)$ *, удовлетворяющая уравнению*

$$\dot{x} = f(t, x, u_1^{eq}, \ldots, u_r^{eq}, u_{r+1}, \ldots, u_m) \tag{1.22}$$

на пересечении поверхностей S_i *,* $i = 1, \ldots, r$ *, и уравнению (1.18) вне поверхностей* ρ_i *.*

Необходимым условием существования такого решения является выполнение условий $u_i^{eq}(t, x(t)) \in U_i(t, x(t))$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Если хотя бы одно из таких условий не выполняется, решения в указанном выше смысле не существует, и метод эквивалентного управления „не работает“.

Отметим, что если функция $f(t, x, u)$ линейна по u, то метод эквивалентного управления и метод репрезентативных уравнений совпадают. Если к тому же векторы частных производных функций $\varphi_i(t, x)$ в точках пересечения поверхностей S_i линейно независимы, то все три описанных выше метода совпадают.

Эквивалентные управления определяются уравнениями (1.21) неявно. Это существенно осложняет изучение разрывных систем методом эквивалентного управления, который по сути определяет движение системы по пересечению поверхностей разрыва функцией $u_i(t, x)$, т.е. определяет скользящий режим системы. Но при определенных условиях уравнения (1.22) определяются явно и однозначно.

Пусть $u_1, \ldots, u_r$ разрывны на поверхностях $S_i = \{(t, x) : \varphi_i(x) = 0\}$, $i = 1, \ldots, r$, соответственно, и векторы $\nabla\varphi_i(x)$ — линейно независимы при $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{r} S_i = S$. Остальные управления $u_{r+1}, \ldots, u_m$ непрерывны на S. Пусть уравнение (1.18) вблизи S имеет вид

$$\dot{x} = f_0(t, x) + B(t, x)u(t, x), \tag{1.23}$$

где $B(t, x)$ - $n \times m$-матрица.

Пусть G — $r \times n$ матрица, строками которой являются векторы $\nabla\varphi_i(x)$. Тогда уравнения (1.21) примут вид

$$G\dot{x} = Gf_0 + GBu^{eq} = 0,$$

откуда получаем

$$u^{eq} = -(GB)^{-1}Gf_0$$

при условии, что определитель $det\, GB \neq 0$. Если $u_i^{eq} \in U_i$, то получаем уравнение движения по пересечению поверхностей S_i:

$$\dot{x} = f_0 - B(GB)^{-1}Gf_0.$$

Это и будет уравнение скользящего режима.

Метод эквивалентного управления развит в работах В.И. Уткина (см. [13])

1.5 История и проблематика теории разрывных систем

Отдельные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью исследовались в классической механике, как уравнения движения механических систем с кулоновым трением в работе П.Пэнлеве [19]. Но начало систематического изучения разрывных систем следует отнести к шестидесятым годам прошлого столетия в связи свозникновением и развитием теории автоматического регулирования. Именно в системах автоматического регулирования с различными релейными характеристиками и переменной структурой нашла свое основное приложение теория дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Специалистам, занимающимся разрывными системами, хорошо известна ставшая легендарной дискуссия на 1-ом конгрессе ИФАК в 1961 году, возникшая по докладу А.Ф. Филиппова, который впервые предложил трактовать дифференциальные уравнения с разрывной правой частью как уравнения с многозначной правой частью или дифференциальные включения [8].

В настоящее время такой подход к определению решений разрывных систем является наиболее употребительным и общепризнанным и не удивительно, почему начало интенсивного развития теории дифференциальных включений, теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и теории автоматического регулирования совпадают по времени.

А.Ф. Филиппов в своих дальнейших работах создал достаточно общую и содержательную теорию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, основанную на дифференциальных включениях, и существенно продвинул саму теорию дифференциальных включений.

Одно из направлений изучения систем управления с разрывными позиционными управлениями обосновано в работах М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого [1], которые условно назвали это направление физическим (в отличие от от направления работ А.Ф. Филиппова, которое названо математическим).

Из работ многих других ученых, посвященных в основном различным методам исследования качественного поведения разрывных систем укажем на монографию В.И. Уткина [13], где развит еще один содержательный и общий метод исследования разрывных систем — метод эквивалентного управления.

Описание правых частей уравнений по Филиппову и по Айзерману-Пятницкому в точках разрыва различны и в общем случае не совпадают. Но их общее свойство — выпуклость множеств в правых частях соответствующих дифференциальных включений — возникает не формально из метода построения и обусловлена не столько природой исследуемых систем, сколько требованиями математического характера, состоящими в самом существование решения и в возможности осуществлять предельные переходы на последовательностях приближенных и точных (если они определены) решений. Иными словами, предел равномерно сходящейся последовательности приближенных или точных решений должен быть решением. Это свойство используется при обосновании правомерности введенного определения решения для описания реальных процессов, при исследовании зависимости решений от начальных состояний и параметров системы и ряда других вопросов общей теории разрывных систем. В то же время для производной $\dot{x}(t)$ предела сходящейся последовательности абсолютно непрерывных решений или приближенных решений $x_n(t)$ можно утверждать лишь то, что $\dot{x}(t)$ в почти каждой точке t принадлежит выпуклой оболочке замкнутого множества G, которому почти всюду принадлежат значения $\dot{x}_n(t)$. Это свойство вытекает из теоремы о среднем для интеграла Лебега. На среднее интегральное значение производной $\dot{x}(t)$ указывается и в работах различных авторов в той или иной степени общности. Точно можно утверждать следующее: если последовательность $\dot{x}_n(t)$ интегрально ограничена, то $\dot{x}(t) \in G(t) = \{\cap G_n(t) : n = 1, 2, \ldots\}$ почти всюду, где $G_n(t)$ для каждого n — наименьшее выпуклое, замкнутое множество, содержащее множество $\{\cup \dot{x}_k(t) : k = n, n+1, \ldots\}$. Чего-либо большего из самого факта сходимости последовательности $x_n(t)$, по-видимому, не вытекает. Вне поверхностей разрыва множество $G(t)$ состоит из одной точки — правой части уравнения и решения определены в обычном смысле.

Развитие общей и качественной теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью связано с решением тех же задач, что и в теории дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью. Но при этом, разумеется, у этих задач возникает своя специфика и особенности. Отметим некоторые из них.

Прежде всего укажем на то, что при возможных скачкообразных изменениях поля направлений движения разрывных систем они не имеют, вообще говоря, классических решений $x(t)$ с непрерывной производной $\dot{x}(t)$. Так возникает задача изучения тех или иных классов решений. Наиболее общими среди абсолютно непрерывных решений являются решения Каратеодори с измеримой производной, удовлетворяющей соответствующему дифференциальному включению почти всюду. Их существование вытекает из теории дифференциальных включений с полунепрерывной сверху выпуклой правой частью. В то же время можно надеяться и на существование более точных решений, таких, как правосторонние решения. В механике правосторонние решения описывают движения механических систем с сухим трением и поэтому имеют реальный физический смысл. Этот класс решений изучался в книге [10]. Там же имеется классификация и сравнительный анализ различных типов решений.

Решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью подразделяются также на различные типы квазирешений и обобщенных решений. Под обобщенными решениями понимаются, как правило, решения некоторых дифференциальных включений, тем или иным способом построенных по функции $f(t, x)$. В частности, решения в смысле Филиппова или Айзермана-Пятницкого являются обобщенными решениями.

Связь между разрывными системами и дифференциальными включениями (уравнениями в контингенциях) рассматривалась еще в тридцатые годы прошлого столетия в работах А. Маршо и С.К. Зарембы и нашла свое отражение в упомянутой выше дискуссии на 1-ом когрессе ИФАК. Понятие квазирешения было введено в работах Т. Важевского, как равномерного на некотором отрезке предела $x(t)$ последовательности абсолютно непрерывных функций $x_n(t)$, таких, что $\|x_n(t) - f(t, x_n(t))\| \to 0$ почти всюду при $n \to +\infty$. При этом производная предельной функции удовлетворяет некоторому дифференциальному включению с выпуклой правой частью и поэтому квазирешения (если они существуют) являются также обобщенными решениями. Легко привести примеры задач, для которых квазирешения не существует.

Так или иначе, качественное исследование разрывных систем становится содержательным, когда их правые части заданы всюду в рассматриваемой области, в том числе и в точках разрыва, исходя из специфики изучаемой материальной системы: физических законов или инженерных соображений. В связи с этим В.М. Матросовым был сформулирован *принцип детерминизма*, требующий "применительно к моделям материальных систем в форме дифференциальных уравнений, по крайней мере, локально, существования, правосторонней единственности их решений, корректности проводимой идеализации в смысле близости решений идеализированных и исходных, более полных уравнений “[10, с. 49].

1.6 Вопросы и упражнения

1. Сформулируйте условия Каратеодори.
2. Что понимается под дифференциальным уравнением с разрывной правой частью?
3. Дайте определение функции непрерывной вплоть до границы и кусочно непрерывной функции.
4. Как могут задаваться множества точек разрыва правых частей?
5. Как возникают дифференциальные уравнения с разрывной правой частью?
6. Дайте определения решения по Филиппову, Айзерману-Пятницкому, методом эквивалентного управления. Опишите их особенности, различия и взаимосвязи.

7. Что называется дифференциальным включением?
8. Что называется скользящим режимом?
9. Опишите скользящие режимы в примерах из раздела 3 и покажите, что они являются решениями по Филиппову и Айзерману-Пятницкому.
10. В примере с авторулевым из раздела 3 найдите эквивалентное управление и укажите условие его существования при условии, что разрывное управление имеет вид $u(x, y) = \operatorname{sgn}(x + \beta y)$.
11. Опишите и изобразите графически решения уравнения $\dot{x} = a + b \operatorname{sgn} x$ для всех возможных соотношений коэффициентов $|a| = |b|$, $|a| > |b|$, $|a| < |b|$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, применив к нему определение по Филиппову. Рассмотрите отдельно случаи $x_0 = 0$, $x_0 > 0$, $x_0 < 0$. Укажите, какие решения являются скользящими режимами и условия их существования.
12. Исследуйте уравнение $\dot{x} = -(t + 1)\operatorname{sgn} x$.

Глава 2

Существование и свойства решений

2.1 Полунепрерывные сверху многозначные отображения

2.1.1 Предварительные сведения о множествах

Будем рассматривать множества в пространстве R^n с евклидовой метрикой $\|x-y\| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ для любых векторов x и y. Введем основные определения и обозначения.

1) Через $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x-y\|$ обозначается расстояние от точек x до множества A. Если существует точка $y \in A$ такая, что $\rho(x, A) = \|x-y\|$, то y называется ближайшей точкой к x.

2) Пусть $A \subset R^n$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$$A^\varepsilon = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью множества A. В частности, если A состоит из одной точки x, то x^ε – ε-окрестность точки x или открытый шар с центром в точке x и радиуса ε.

3) Точка $x \in R^n$ называется предельной точкой множества A, если существует последовательность $\{x^k\} \subset A$, сходящаяся к x, такая, что $x^k \neq x,\ k = 1, 2, \ldots$.

4) Множество A называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

5) Наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A, обозначается через $\overline{A}$ и называется замыканием множества A. Замыкание множества A получается добавлением к нему всех его предельных точек.

Пространство R^n обладает так же и структурой линейного пространства. Через $A+B$ обозначается множество C, состоящее из всех векторов $z = x + y$, при условии, что $x \in A$ и $y \in B$. Для любого вещественного числа γ через γA обозначается множество всех векторов γx при условии $x \in A$.

Понятие выпуклого множества приведено во разделе 1.4. Сформулируем ряд важных свойств, связанных с выпуклостью множеств.

Свойство 1. Если множество A ограничено, то $(coA)^{\varepsilon} = co(A^{\varepsilon})$.

Свойство 2. Если A замкнуто и ограничено, то $coA = \overline{co}A$.

Свойство 3. Если A выпукло, то A^{ε} также выпукло.

Свойство 4. Если множество A состоит из конечного числа точек, то coA есть множество всех выпуклых комбинаций этих точек.

Свойство 5. Пусть $c \in R^n$ – некоторый вектор и для всех $x \in A$ выполняется неравенство $\langle c, x \rangle \leq \gamma$. Тогда оно справедливо и для всех $x \in \overline{co}A$.

Если M – некоторое множество, то $f(M)$ – множество значений $f(x)$ для всех $x \in M$. В частности, если $f(x) = Ax + b$, где A – $n \times n$-матрица, b – вектор, то $f(M) = AM + b$.

Свойство 6. Если M – выпуклое множество, то множество $f(M) = AM + b$ выпукло.

Свойство 7. Если M – ограничено и замкнуто, то $co(AM + b) = AcoM + b$.

В заключение этого раздела остановимся на понятии компактных множеств в пространстве R^n.

Общее определение компактного множества (пространства) звучит так: A компактно, если из любого его покрытия открытыми множествами A_α можно выделить конечное подпокрытие. Это определение применимо для любых пространств, в которых так или иначе введено понятие открытого множества, в частности — для метрических пространств. Известно, что метрическое пространоство компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности $\{x^k\} \subset A$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Это свойство компактных пространств называется секвенциальной компактностью и для метрических пространств может быть принято в качестве определения компактности. Если же пространство конечномерно, то компактные множества обладают следующим свойством: множество $A \subset R^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Для компактных множеств из пространства R^n мы будем пользоваться любым из двух указанных выше свойств компактности без оговорок. С их помощью легко устанавливается следующее утверждение: если A – ограниченное и замкнутое, а B – замкнутое множества в R^n такие, что $A \bigcap B = \emptyset$, то существуют такие точки $a \in A$ и $b \in B$, что $\|a - b\| > 0$. В частности это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $A^\varepsilon \bigcap B = \emptyset$.

2.1.2 Свойства полунепрерывных сверху многозначных отображений

Пусть каждой точке $p \in D \subset R^m$ поставлено в соответствие непустое множество $F(p) \subset R^n$. В этом случае говорят, что на множестве D определено многозначное отображение $p \to F(p)$ (многозначная функция, мультифункция).

Малым прообразом множества $A \subset R^n$ называется множество

$$F_+^{-1}(A) = \{p : p \in D, F(p) \subset A\}.$$

Определение 2.1.1. *Многозначное отображение $F(p)$ называется полунепрерывным сверху в точке p_0, если для любого открытого* *множества* $V \subset R^n$ *такого, что* $F(p_0) \subset V$ *, существует окрестность* $U(p_0)$ *точки* p_0 *такая, что*

$$F(p) \subset V \tag{2.1}$$

для всех $p \in U(p_0)$

Замечание 2.1.1. *Под окрестностью точки (множества) понимается любое открытое множество, содержащее данную точку (множество). Очевидно, для любой окестности* $U(p_0)$ *точки* p_0 *существует* δ *-окрестность* p_0^δ *этой точки, содержащаяся в* $U(p_0)$ *. Тогда в определении 2.1 можно окрестность* $U(p_0)$ *заменить на* δ *-окрестность* p_0^δ *. Если же значениями многозначного отображения являются компактные подмножества из* R^n *, то в определении 2.1 можно также открытое множество* V *, содержащее* $F(p_0)$ *, заменить на произвольную* ϵ *-окрестность* $F^\epsilon(p_0)$ *множества* $F(p_0)$ *.*

Определение 2.1.2. *Многозначное отображение* $F(p)$ *называется полунепрерывным сверху (полунепрерывным сверху на множестве* D *), если оно полунепрерывно сверху в каждой точке* $p \in R^m$ *(в каждой точке* $p \in D$ *).*

Лемма 2.1.1. *Следующие утверждения экивалентны:*

а) F *полунепрерывно сверху;*

б) для любого открытого множества $V \subset R^n$ *множество* $F_+^{-1}(V)$ *открыто.*

Доказательство. 1. Пусть выполняется условие а) и $V \subset R^n$ — открытое множество. Возьмем произвольную точку $p \in F_+^{-1}(V)$. Тогда $F(p) \subset V$, и из условия а) вытекает существование множества $p^\delta \subset R^m$ такого, что $F(p^\delta) \subset V$. Последнее означает, что $p^\delta \subset F_+^{-1}(V)$ и, следовательно, множество $F_+^{-1}(V)$ открыто.

2. Пусть выполняется условие б) и $p \in R^m$ — произвольная точка. Возьмем произвольную открытую окрестность V множества $F(p)$.

Тогда $p \in F_+^{-1}(V)$ и из условия б) вытекает, что существует δ-окрестность p^δ такая, что $p^\delta \subset F_+^{-1}(V)$. Следовательно, $F(p') \subset V$ для всех $p' \in p_0^\delta$ и поэтому выполняется условие (2.1) со множеством $U(p) = p^\delta$. Тем самым установлено, что многозначное отображение $F(p)$ полунепрерывно сверху в каждой точке. □

Лемма 2.1.2. *Если значениями многозначного отображения* $F(p)$ *являются компактные множества, то полунепрерывность сверху* $F(p)$ *в любой точке* p *равносильна следующему условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(p, \varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$F(p^\delta) \subset F^\varepsilon(p). \tag{2.2}$$

Доказательство. 1. Так как множество $V = F^\varepsilon(p)$ открыто, то условие (2.2) вытекает из условия (2.1) и замечания 2.1, если $F(p)$ - полунепрерывно сверху.

2. Пусть теперь $V \subset R^n$ - открытое множество такое, что $F(p) \subset V$. Так как дополнение $W = R^n \backslash V$ множества V замкнуто, и $F(p) \cap W = \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $F^\varepsilon(p) \cap W = \emptyset$. Поэтому, $F^\varepsilon(p) \subset V$, и тогда существует $\delta > 0$ такое, что $F(p^\delta) \subset F^\varepsilon(p) \subset V$. Следовательно условие (2.1) выполняется, если положить $U(p) = p^\delta$.
□

Через $comp\, R^n$ (соответственно $conv\, R^n$) будет обозначаться множество всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из R^n.

Лемма 2.1.3. *Если* $F : D \to comp\, R^n$ *полунепрерывно сверху, то и многозчная функция* $H(p) = co\, F(p)$ *полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Отметим, что множество $H(p)$ выпукло и компактно, и поэтому $H : D \to conv\, R^n$.

Из полунепрерывности сверху многозначного отображения F и леммы 2.2 вытекает, что для любого $p \in D$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$

такое, что выполняется условие (2.2). Но тогда $H(p') = co\,F(p') \subset co\,(F^{\varepsilon}(p)) = H^{\varepsilon}(p)$ для любых $p' \in p^{\delta}$. Последнее означает, что $H(p)$ полунепрерывно сверху. $\Box$.

Определение 2.1.3. *Многозначное отображение* $F : R^m \to R^n$ *называется ограниченным на множестве* $D \subset R^n$, *если существует число* $C > 0$ *такое, что* $\|z\| \leq C$ *для всех* $p \in D$ *и* $z \in F(p)$.

Определение 2.1.4. *Многозначное отображение называется локально ограниченным в точке* $p \in R^m$, *если существует* $\delta > 0$ *такое, что* $F(p)$ *ограничено на множестве* p^{δ}.

Лемма 2.1.4. *Полунепрерывное сверху отображение* $F : R^m \to comp\,R^n$ *является локально ограниченным в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $p \in R^m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$F(p') \subset F^{\varepsilon}(p)$$

для всех $p' \in p^{\delta}$. Так как множество $F(p)$ компактно, то оно ограничено. Поэтому ограничено и множество $F^{\varepsilon}(p)$. Следовательно, существует константа $C > 0$ такая, что $\|z\| \leq C$ для всех $z \in F^{\varepsilon}(p)$. Поэтому $\|z\| \leq C$ и для всех $z \in F(p')$ и $p' \in p^{\delta}$. $\Box$

Определение 2.1.5. *Множество* $\Gamma_F = \{(p,q) \in R^m \times R^n : p \in D,\, q \in F(p)\}$ *называется графиком многозначного отображения* $F(p)$ *на множестве* D.

Лемма 2.1.5. *Если отображение* $F : R^m \to comp\,R^n$ *полунепрерывно сверху на замкнутом множестве* D, *то оно имеет на нем замкнутый график.*

Доказательство. Пусть $(p,q) \in \Gamma_F$ — предельная точка графика. Тогда существуют последовательности $p_i \to p$, $q_i \to q$, $q_i \in F(p_i)$, $p_i \in D$. Для доказательства леммы нам требуется установить, что

$p \in D$ и $q \in F(p)$. Первое вытекает из замкнутости множества D. Из полунепрерывности сверху $F(p)$ вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что $F(p_i) \subset F^{\epsilon}(p)$ для всех $i \leq N$. Тогда $q \in F^{\epsilon}(p)$ для любого $\epsilon > 0$ и поэтому $q \in \overline{F(p)}$. В силу замкнутости множества $F(p)$ получаем, что $q \in F(p)$. □

Лемма 2.1.6. *Если многозначное отображение $F : R^m \to comp\, R^n$ имеет замкнутый график на замкнутом множестве D и локально ограничено в каждой точке $p \in D$, то оно полунепрерывно сверху на множестве D.*

Доказательство. Предположим противное: функция $F(p)$ не является полунепрерывной сверху в некоторой точке $p \in D$. Тогда существуют $\epsilon > o$ и последовательности $p_i \to p$, $q_i \notin F^{\epsilon}(p)$. Из условия локальной ограниченности отображения $F(p)$ в точке p вытекает, что из последовательности $\{q_i\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел q которой, очевидно не принадлежит множеству $F(p)$. Это противоречит замкнутости графика отображения $F(p)$. □

Лемма 2.1.7. *Если множество D компактно и многозначное отображение $F(p)$ локально ограничено в каждой точке $p \in D$, то оно ограничено на множестве D.*

Доказательство. Если $F(p')$ локально ограничено в каждой точке $p \in D$, то для каждой точки $p \in D$ существует $\delta = \delta(p) > 0$, такое, что $F(p')$ ограничено на множестве p^{δ}. В силу компактности множества D из покрытия его открытыми множествами p^{δ} можно выделить конечное подпокрытие $W = \{p_i^{\delta_i}\}_1^N$, на котором, очевидно, многозначное отображение $F(p)$ является ограниченным. Тогда оно ограничено на множестве D. □

Лемма 2.1.8. *Если $F : R^m \to comp\, R^n$ — полунепрерывное сверху отображение и множество $D \subset R^m$ компактно, то множество $A = \{\cup F(p) : p \in D\}$ также компактно.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $z_k \in A$. Тогда найдется последовательность точек $p_k \in D$, такая, что $z_k \in F(p_k)$. В силу компактности множества D из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не вводить новых обозначений, будем полагать, что сама эта последовательность сходится к некоторой точке $p \in D$. В силу лемм 2.2.4 и 2.2.7 отображение $F(p)$ ограничено на множестве D и тогда из последовательности z_k можно выделить сходящуюся к точке z подпоследовательность. В силу леммы 2.2.5 $z \in F(p)$. Таким образом, из любой последовательности точек множества A можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что и означает его компактность. □

2.2 Существование и свойства решений

2.2.1 Дифференциальные включения, к которым приводят дифференциальные уравнения с разрывной правой частью

Исследуем свойства многозначных функций, к которым приводят доопределения правых частей дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по Филиппову и Айзерману-Пятницкому.

Лемма 2.2.1. *Пусть* $f : D \to R^n$ *— ограниченная функция,* $H(p)$ *для каждого* $p \in \overline{D}$ *— множество всех предельных значений функции* $f(p')$ *при* $p' \to p$, *дополненное значением* $f(p)$, *если* $p \in D$. *Тогда многозначные функции* $H(p)$ *и* $F(p) = co\, H(p)$ *полунепрерывны сверху и имеют компактные значения.*

Доказательство. График отображения $H(p)$ на множестве $\overline{D}$ есть замыкание графика функции $f(p)$ и поэтому он замкнут. Множество $H(\overline{D}$ ограничено, значения многозначного отображения $H(p)$ компактны. Тогда в силу леммы оно полунепрерывно сверху. Полунепрерывность сверху отображения $F(p)$ следует из леммы . □

Лемма 2.2.2. *Пусть функция* $f : R^{m+r} \to R^n$ *непрерывна, многозначные функции* $U_i : R^m \to comp\, R^n$ *полунепрерывны сверху. Тогда многозначные функции* $H(p) = f(p, U_1(p), \ldots, U_r)$ *и* $F(p) = co\, H(p)$ *полунепрерывны сверху и имеют компактные значения.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(p, u_1, \ldots, u_r)$ и полунепрерывности сверху функций $U_i(p)$, $i = 1, \ldots, r$ леммы отображение $H(p)$ является ограниченным на любом ограниченном замкнутом множестве D. Легко убедиться, что график этого отображения замкнут и тогда оно полунепрерывно сверху. □

Теорема 2.2.1. *Многозначная функция* $F(t, x)$, *полученная при доопределениях по Филиппову и Айзерману-Пятницкому является полунепрерывной сверху, выпуклозначной и компактнозначной.*

Доказательство вытекает из свойств полунепрерывных сверху многозначных отображений из предыдущего раздела и из двух установленных выше лемм. Читателю предоставляется убедиться в этом самостоятельно.

Теоремы существования решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью следуют из соответствующих теорем для дифференциальных включений с полунепрерывной сверху правой частью. Этим вопросам посвящен следующий раздел.

2.2.2 Существование решений

Лемма 2.2.3. *(Формула среднего значения для векторной функции). Если* M *— ограниченное замкнутое множество,* $v(t)$ *— измеримая функция и* $v(s) \in M$ *при* $s \in [t, t+h]$, *то*

$$v^* = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s) ds \in co\, M. \tag{2.3}$$

Доказательство. Беря разбиение области интегрирования на части по Риману или по Лебегу, получаем

$$S = \frac{\Delta_i}{h} v(t_i),\ \frac{\Delta_i}{h} = \alpha_i \geq 0,\ \sum \alpha_i = 1,$$

где $v^* = \lim S$. Таким образом, S есть последовательность выпуклых комбинаций значений функции и из условия леммы вытекает $S \subset co\, M$. Тогда $\lim S \in \overline{co}\, M = co\, M$. $\square$

Лемма 2.2.4. *Пусть функции* $x_k : [a, b] \to R^n$ *абсолютно непрерывны,* $x_k(t) \to x(t)$ *и* $\|\dot{x}_k(t)\| \leq L$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$ *и для почти всех* $t \in [a, b]$. *Тогда функция* $x(t)$ *абсолютно непрерывна и в тех точках отрезка* $[a, b]$, *в которых* $\dot{x}(t)$ *существует, справедливо равенство*

$$\dot{x}(t) \in \overline{co} M_{n,\delta} \tag{2.4}$$

для любых $n \geq 1$ *и* $\delta > 0$, *где* $M_{n,\delta} = \{\cup v_k(s) : k \geq n,\ s \in (t-\delta, t+\delta)\}$, $v_k(s)$ *— измеримые функции, совпадающие с* $\dot{x}_k(s)$ *почти всюду.*

Доказательство. Так как $\|\dot{x}_k(t)\| \leq L$ для почти всех $t \in [a, b]$, то

$$\|x_k(t') - x(t'')\| = \| \int_{t''}^{t'} \dot{x}_k(s) ds \| \leq L|t' - t''|$$

и при $k \to +\infty$ получаем, что функция $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L и поэтому является абсолютно непрерывной. Так как

$$\dot{x}_i(s) \in M_{n,\delta}$$

для любых $i \geq n$, $\delta > 0$ и почти всех $t \in (t - \delta, t + \delta)$, то по формуле среднего значения (2.3)

$$\frac{x_i(t + h) - x_i(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{x}_i(s) ds \in co\overline{M_{n,\delta}} = \overline{co}\, M_{n,\delta}$$

для любых $i \geq n$, $\delta > 0$ и $0 < h < \delta$. Переходя в последнем соотношении к пределу при $i \to +\infty$, получаем

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} \in \overline{co} M_{n,\delta}. \tag{2.5}$$

Так как функция $x(t)$ абсолютно непрерывна, то призводная $\dot{x}(t)$ существует для почти каждой точки $t \in [a,b]$ и для этих точек из (2.5) при $h \to 0$ вытекает (2.4). $\square$

Отметим, что леммы 2.2.3 и 2.2.4 объясняют необходимость овыпукления правых частей дифференциальных включений при исследовании дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Определение 2.2.1. *Функция $y(t)$ называется приближенным δ-решением дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{2.6}$$

на отрезке $[a,b]$, если она абсолютно непрерывна и почти всюду

$$\dot{y}(t) \in F_\delta(t, y(t)) \tag{2.7}$$

где $F_\delta(t,y) = (F(t^\delta, y^\delta))^\delta$, $F(t^\delta, y^\delta)$ — обьединение множеств $F(t', y')$ для всех $|t'-t| < \delta$, $\|y'-y\| < \delta$.

Лемма 2.2.5. *Пусть $F(t,x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми, компактными значениями, $x(t)$ — равномерный на отрезке $[a,b]$ предел последовательности δ_k-решений $x_k(t)$ включения (2.6) при $\delta_k \to 0$. Тогда $x(t)$ — решение этого включения.*

Доказательство. Пусть $t \in [a,b]$ и $\epsilon > 0$ произвольны. Из полунепрерывности сверху отображения $F(t,x)$ вытекает, что найдется $\eta > 0$, такое, что

$$F(s,x) \subset F^{\epsilon/2}(t, x(t)) \tag{2.8}$$

при условиях $\|x - x(t)\| < \eta$, $|s-t| < \eta$. Так как $x_k(t)$ — абсолютно непрерывные функции, то в силу равномерной сходимости последовательности $x_k(t)$ к функции $x(t)$ заключаем, что эта функция непрерывна, а функции $x_k(t)$ равностепенно непрерывны для всех

$k = 1, 2, \ldots$. Тогда найдутся такие $0 < \gamma < \eta/2$ и $n = n(t, \epsilon)$ такие, что

$$\|x_k(s) - x(t)\| < \eta/2,\ \delta_k < \min\{\eta/2,\ \epsilon/2,\ \gamma\}$$

при условии $k \geq n$, $|s - t| < \gamma$. Тогда при этих же условиях из (2.8) получаем

$$s^{\delta_k} \subset t^{\eta},\ (x_k(s))^{\delta_k} \subset (x(t))^{\eta},\ F(s^{\delta_k}, (x_k(s))^{\delta_k}) \subset F^{\epsilon/2}(t, x(t))$$

Следовательно, с учетом выпуклости множества $F(t, x(t))$, получаем

$$\dot{x}_k(s) \in (coF(s^{\delta_k}, (x_k(s))^{\delta_k})^{\delta_k} \subset (coF(t, x(t)))^{\epsilon} = F^{\epsilon}(t, x(t)) \qquad (2.9)$$

для всех $k \geq n$ и почти всех $s \in (t - \gamma, t + \gamma)$. Так как множество $co\, F^{\epsilon}(t, x(t))$ ограничено, то функции $x_k(s)$ имеют на интервале $(t - \gamma, t + \gamma)$ ограниченную производную и поэтому удовлетворяют на нем условию Липшица. Тогда этим же свойством обладает и функция $x(s)$. Поэтому она абсолютно непрерывна на интервале $(t - \gamma, t + \gamma)$ и отрезок $[a, b]$ можно покрыть конечным числом таких интервалов. Следовательно, функция $x(t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в почти каждой точке $t \in [a, b]$ имеет производную $\dot{x}(t)$. В каждой точке $t \in [a, b]$, в которой производная существует, из (2.9) и формулы среднего значения (2.3) при предельном переходе получаем $\dot{x}(t) \in F^{\epsilon}(t, x(t))$ для любого $\epsilon > 0$. Поэтому $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$. $\square$

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий леммы 2.2.5 предел равномерно сходящейся последовательности решений дифференциального включения (2.6) является решением этого включения.*

Следствие вытекает из леммы 2.2.5, так как любое решение является также и δ-решением для любого $\delta > 0$.

Следствие 2.2.2. *Если выполняются все условия леммы 2.2.5 кроме выпуклости значений отображения $F(t, x)$, то предел равномерно* *сходящейся последовательности δ_k-решений или решений включения есть решение включения*

$$\dot{x} \in co\, F(t,x). \tag{2.10}$$

Условие выпуклости $F(t,x)$ в лемме 2.2.5 является существеным и его нельзя отбросить, сохранив утверждение этой леммы.

Пример 2.2.1. *Пусть $x \in R^1$, $F(t,x) = -sgn\, x$ при $x \neq 0$ и $F(t,x) = \{-1,+1\}$ при $x = 0$. Тогда многозначная функция $F(t,x)$ полунепрерывна сверху. Читателю предоставляется проверить, что последовательность „пилообразных“ функций*

$$x_k(t) = t - 2i/k,\ (2i/k \leq t \leq (2i+1)/k);$$

$$x_k(t) = (2i+2)/k - t,\ ((2i+1)/k \leq t \leq (2i+2)/k)$$

является δ_k-решениями, $\delta_k = 1/k$, но их предел $x(t) = 0$ не является решением.

Замечание 2.2.1. *Отказ от предположения выпуклости правых частей дифференциальных включений сопряжен с большими трудностями исследований вопросов существования и свойств решений даже при дополнительных предположенияиях на многозначное отображение $F(t,x)$. Здесь возникает также ряд принципиальных вопросов о взаимосвязях решений исходного и „овыпукленного“ включения (задача релаксации). Эти вопросы в большей степени относятся к дифференциальным включениям, возникающим в теории оптимального управления, и здесь не рассматриваются.*

Введенное выше понятие приближенного δ-решения является весьма общим. Как будет показано ниже, ломаные Эйлера, построенные для дифференциальных включений, являются δ решениями. Это вместе со следствием 2.2.2 и теоремой Арцела позволяет доказывать теоремы существания решений. Важным является также следствие 2.2.1, из которого следует, что множество решений дифференциальных включений является замкнутым множеством в пространстве непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Этот факт используется при изучении зависимости множества решений дифференциальных включений от начальных данных и правых частей (параметров).

Теорема 2.2.2. *(Существование локального решения). Пусть отображеие* $F(t,x)$ *удовлетворяет в области* G *следующим условиям*

1. Множество $F(t,x)$ *является выпуклым и компактным для любых* $(t,x) \in G$.

2. Многозначное отображение $F(t,x)$ *полунепрерывно сверху в области* G.

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ *существует решение задачи Коши*

$$\dot{x} \in F(t,x),\, x(t_0) = x_0 \tag{2.11}$$

определенное на некотором отрезке $[t_0, t_0 + d]$.

Доказательство. Пусть $(t_0, x_0) \in G$. Выберем некоторые числа a и b так, чтобы множество $Z = \{(t,x) : t_0 \le t \le t_0 + a,\, \|x - x_0\| \le b\}$ содержалось в области G. Тогда отображение $F(t,x)$ ограничено на компактном множестве Z некоторым числом $C = \sup\{\|w\| : w \in F(t,x),\, (t,x) \in Z\}$. Определим число $d = \min\{a, b/C\}$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$h_k = d/k,\, t_i^k = t_0 + ih_k, i = 0, \ldots, k.$$

Таким образом, точки t_i^k для каждого фиксированного числа $k = 1, 2, \ldots$ задают разбиение отрезка $[t_0, t_0 + d]$ на $k - 1$ равных частей.

Построим функцию $x^k(t)$ следующим образом. Положим $x^k(t_0^k) = x_0^k = x_0$ для любого $k \ge 1$. Возьмем произвольное $v_0^k \in F(t_0^k, x_0^k)$ и определим функцию $x^k(t)$ на отрезке $t_0^k \ge t \ge t_1^k$ равенством $x^k(t) = x_0^k + (t - t_0^k)v_0^k$. Если $x^k(t)$ определена для всех $t \in [t_0, t_0 + t_i^k]$, $i < k$, то выберем произвольное $v_i^k \in F(t_i^k, x_i^k)$ и продолжим функцию $x^k(t)$ на отрезок $[t_0, t_0 + t_{i+1}^k]$ равенством

$$x^k(t) = x_i^k + (t - t_i^k)v_i^k,\ t_i^k \geq t \geq t_{i+1}^k. \tag{2.12}$$

Здесь введено обозначение $x_i^k = x^k(t_i^k)$. Отметим, что $\dot{x}^k(t) = v_i^k$ на отрезках $[t_i^k, t_{i+1}^k]$. Поэтому функции $x^k(t)$ последовательно определяются равенствами (2.12) на всем отрезке $[t_0, t_0+d]$ так, что их графики $\{(t, x_k(t)) : t_0 \leq t \leq t_0 + d\} \subset Z$ и выполняется условие

$$\|x^k(t') - x^k(t'')\| \leq C|t' - t''|. \tag{2.13}$$

Так как

$$\dot{x}^k(t) = v_i^k \in F(t_i^k, x_i^k),\ t^k < t < t_i^k + h_k,\ \|x^k(t) - x_i^k\| \leq Ch_k,$$

то функция $x^k(t)$ — δ_k-решение включения (2.11) при условии $\delta_k = \max(h_k, Ch_k)$.

Из условия (2.13) вытекает, что последовательность функций $x^k(t)$ равностепенно непрерывна. Так как $\|x^k(t) - x_0\| \leq b$, $t_0 \leq t \leq t_0 + d$, то она равномерно ограничена. Тогда по теореме Арцела из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как $x^k(t_0) = x_0$ для всех $k \geq 1$, то по следствию 2.2.2 3 предел подпоследовательности является решением включения (2.11.) □

Функции $x^k(t)$, определенные в теореме 1 называются ломаными Эйлера и могут применятся для простейших приближенных методов построения решений дифференциальных включений.

2.2.3 Продолжимость решений

Понятия продолжения решения, непродолжимого решения, правого максимального промежутка существования используются в обычном смысле. В этом разделе мы предполагаем, что выполняются условия теоремы 2.2.2 о существовании локальных решений.

Определение 2.2.2. *Пусть $x(t)$ — решение задачи (2.11), определенное на промежутке $[t_0, a)$. Решение $y(t)$ называется продолжением решения $x(t)$, если найдется число $\omega > a$ такое, что $y(t)$ определено на $[t_0, \omega)$, на промежутке $[t_0, a)$ оба эти решения совпадают. Решение $x(t)$ непродолжимо, если такого продолжения нет. В этом случае $[t_0, \omega)$ называется правым максимальным интервалом существования решения $x(t)$.*

Лемма 2.2.6. *Любое решение задачи (2.11) может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение задачи (2.11), определенное на промежутке $[t_0, a)$. Если J не является правым максимальным промежутком существования, то существует множество Q решений включения (2.11), которые являются продолжениями решения $y(t)$. Определим на этом множестве отношение частичного порядка по правилу: решение x' подчинено решению x'', если либо эти решения имеют одинаковые промежутки определения и совпадают на нем, либо решение x'' является продолжением решения x'. Теперь возьмем во множестве Q произвольную цепь, т.е. такое подмножество $\tilde{Q} \subset Q$, в котором любые два элемента сравнимы в смысле введенного частичного порядка. Через ω обозначим точную верхнюю грань промежутков существования решений из $\tilde{Q}$. Определим на промежутке $J = [t_0, \omega)$ функцию $x(t)$ по правилу: если $t \in J$ принадлежит промежутку существования некоторого решения $x' \in \tilde{Q}$, то полагаем $x(t) = x'(t)$. Отметим, что любая точка $t \in J$ принадлежит промежутку существования некоторого решения $x' \in \tilde{Q}$, а так как $\tilde{Q}$ является цепью, то и все решения из $\tilde{Q}$, промежутки существования которых содержат точку t, совпадают в ней с $x'(t)$. Следовательно, функция $x(t)$ корректно определена в каждой точке $t \in J$. Очевидно, что $x(t)$ является решением задачи (2.11) и любое решение из $\tilde{Q}$ подчинено ему. Таким образом, решение $x(t)$ — наибольший элемент во множестве $\tilde{Q}$. Тогда в соответствии с теоремой Цорна любой элемент из Q подчинен некоторому максимальному элементу. Непродолжимые решения и только они являются максимальными элементами во множестве Q. Следовательно, существует непродолжимое решение, которое совпадает с $y(t)$ на промежутке $[t_0, a)$. $\square$

Определение 2.2.3. *Будем говорить, что решение* $x(t)$ *включения (2.11), определенное на* $[t_0, \omega)$, *покидает компактные подмножества из* G, *если для любого компактного множества* $K \subset G$ *существует точка* $t_K \in (t_0, \omega)$ *такая, что* $(t, x(t)) \notin K$ *для всех* $t \in (t_K, \omega)$. *В этом случае еще говорят, что решение стремится к границе множества* G *и это имеет содержательный смысл для ограниченного множества* G.

Теорема 2.2.3. *Любое непродолжимое вправо решение уравнения (2.11) покидает компактные подмножества из* G.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — непродолжимое вправо решение включения (2.11) с областью определения $[t_0, \omega)$.

Случай $\omega = +\infty$ тривиален.

Пусть $\omega < +\infty$. Предположим, что утверждение теоремы не верно: $x(t)$ не стремится к границе множества G. Тогда существуют компактное множество $K \subset G$ и последовательность точек $t_n \to \omega - 0$ такие, что $(t_n, x(t_n)) \in K$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Из компактности K вытекает существование подпоследовательности последовательности $\{t_n\}$ (за которую, не ограничивая общности рассуждений, примем саму последовательность $\{t_n\}$) такой, что $(t_n, x(t_n)) \to (\omega, x) \in K$. Так как отображение $F(t, x)$ локально ограничено в точке (ω, x), то функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $[t_0, \omega)$. Тогда с помощью критерия Коши получаем, что существует $\lim_{t \to -\omega} = x^*$ и поэтому ее можно непрерывно продолжить на отрезок $[t_0, \omega]$. При этом $(\omega, x^*) \in G$. В соответствии с теоремой 2.2.2 для начального состояния (ω, x^*) существует локальное правостороннее решение включеия (2.11), но это противоречит непродолжимости решения $x(t)$. Противоречие доказывает теорему. $\square$

Следствие 2.2.3. *Пусть* $H \subset R^n$ *— открытое множество и* $x(t)$ *— непродолжимое решение задачи (2.11), определенное на промежутке* $[t_0, \omega)$. *Тогда:*

1) Если $G = (a, b) \times H$ *и* $\omega < b$, *то* $x(t)$ *стремится к границе* H.

2) Если $G = R^1 \times H$, *то либо* $\omega = +\infty$, *либо* $\omega < +\infty$ *и* $x(t)$ *стремится к границе* H.

3) Если $G = R^1 \times R^n$, *то либо* $\omega = +\infty$, *либо* $\omega < +\infty$ *и* $\| x(t) \| \to +\infty$ *при* $t \to \omega - 0$.

Из следствия 2.2.3 вытекает, что в случае, когда $G = R^1 \times R^n$, любое ограниченное непродолжимое решение определено на правом максимальном промежутке существования $[t_0, +\infty)$.

Будем говорить, что многозначное отображение $F(t, x)$, определенное на множестве $R^1 \times R^n$, удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует такая интегрируемая на каждом конечном отрезке $I = [a, b]$ функция $L(t)$,

$$\|v\| \leq (L(t)(1 + \|x\|) \tag{2.14}$$

для всех $v \in F(t, x)$, $x \in R^n$ и п.в. $t \in I$

Теперь нам понадобится следующее утверждение, известное как лемма Грануолла и которое широко используется в теории дифферн-циальных уравнений.

ЛЕММА. Пусть $I = [a, b]$ — произвольный отрезок, $v(t)$ и $u(t)$ — непрерывные неорицательные функции, определенные на I, C — некоторая константа и

$$\|v(t)\| \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds, \, t \in I. \tag{2.15}$$

Тогда

$$\|v(t)\| \leq Ce^{\int_a^t u(s)ds},\ t \in I. \tag{2.16}$$

Теорема 2.2.4. *Пусть* $G = R^1 \times R^n$ *и многозначное отображение* $F(t,x)$ *удовлетворяет условию подлинейного роста (2.14). Тогда любое непродолжимое решение определено на правом максимальном промежутке существования* $[t_0, +\infty)$.

Доказательство. Обозначим $v(t) = \|x(t)\|$, где $x(t)$ — непродолжимое решение, определенное на промежутке $[t_0, \omega)$. Предположим противное: $\omega < +\infty$. Так как любое решение представимо в виде

$$\|x(t)\| = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds, \tag{2.17}$$

то из (2.15) и (2.17) получаем

$$v(t) \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\dot{x}(s)\|ds \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} L(s)(1 + \|x(s)\|)ds \leq$$

$$\leq C + \int_{t_0}^{t} \text{Ł}(s)v(s)ds \tag{2.18}$$

для любого $t \in [t_0, \omega)$, где $C = \|x_0\| + \int_{t_0}^{\omega} L(s)ds$. Тогда из (2.18) получаем

$$\|x(t)\| \leq Ce^{\int_{t_0}^{\omega} L(s)ds}.$$

Следовательно, решение $x(t)$ ограничено и тогда по следствию 2.2.3 получаем $\omega = +\infty$, что противоречит сделанному выше предположению. □

Резюмируя все утверждения о продолжимости решений можно утверждать следующее. Любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования. Интегральная кривая непродолжимого решения покидает любое компактное подмножество из области определения правой части включения. Для автономных систем траектория решения покидает любое компактное подмножество. Для ограниченных областей это свойство можно трактовать так: любое непродолжимое решение стремится к границе области или может быть продолжено до границы области. В случае неограниченных областей граница может оказаться пустым множеством. В этом случае под границей можно понимать множество бесконечно удаленных точек (t, x). Тогда выражение „непродолжимое решение стремится к границе области“ можно трактовать так, что или $\omega < +\infty$ и $\|x(t)\| \to +\infty$ или $\omega = +\infty$.

2.3 Однозначной доопределение разрывных систем и правосторонняя единственность решений

Одним из наиболее употребительных условий единственности решений для обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x)$ является условие Липшица функции $f(t, x)$ по переменной x. Но это условие автоматически влечет непрерывность функции $f(t, x)$ по переменной x, в то время как мы рассматриваем дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Кроме этого, как уже указывалось выше, решения разрывных систем не обладают свойством двусторонней единственности даже в простейших систуациях. Это видно уже на скалярном уравнении $\dot{x} = -\operatorname{sgn} x$: для начального состояния $t_0 = 0, x_0 = 0$ вправо от точки t_0 определено лишь одно нулевое решение, но слева имеется бесконечное множество решений.

Свойство правосторонней единственности решений в общем случае вытекает из следующего условия: пусть существует суммируемая по Лебегу функция $l(t)$ такая, что для почти всех точек (t, x) и (t, y) из области Ω при $\|x - y\| < \epsilon_0$ выполняется $\|f(t, x)\| \leq l(t)$ и

$$\langle x - y, f(t, x) - f(t, y) \rangle \leq l(t) \|x - y\|^2, \qquad (2.19)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение и $\| \cdot \|$ — евклидова норма. Неравенство (2.19) называется условием правой липшицевости. Это условие обеспечивает также ряд других содержательных свойств разрывных систем, которые рассматриваются ниже.

2.3.1 Неявные уравнения разрывных систем с кусочно непрерывными правыми частями

Мы рассматриваем уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.20}$$

в рамках следующих предположений: функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x) всюду в некоторой области Ω из пространства R^{n+1} за исключением множеств $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $i = 1, \ldots, m$, где $\phi_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Обозначим $I(x) = \{i \in (1, \ldots, m) : \phi_i(x) = 0\}$ и предположим, что в каждой точке x градиенты $\nabla\phi_j(x)$ функций $\phi_j(x)$ с индексами из множества $I(x)$ линейно независимы. Отсюда, в частности, вытекает, что множество $M = \{\cup M_i : i = 1, \ldots, m\}$ точек разрыва функции f гранично в области Ω. Дополнение к множеству M представим в виде объединения конечного числа открытых множеств $\Omega_j \subset \Omega$, для каждого из которых функции $\phi_i(x) \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и сохраняют знаки одни и те же на любом сечении множества Ω_j плоскостью $t = const$.

На каждом множестве Ω_j функция f непрерывна. Предположим следующее: для каждого множества Ω_j и любой его граничной точки $(t, x) \in$ существует конечный предел $f^j(t, x)$ функции $f(t', x')$ при условии, что $(t', x') \to (t, x)$ и $(t', x') \in \Omega_j$. Этот предел будем называть предельным значением функции f в точке (t, x) по множеству Ω_j. В соответствии с определениями из раздела 1.4.1 функция f с указанными выше свойствами является кусочно непрерывной.

Отметим, что для кусочно непрерывных функций $f(t, x)$ многозначное отображение $F(t,x)$ локально ограничено, полунепрерывно сверху по совокупности аргументов и принимает выпуклые и компактные значения, и уравнение (2.20) имеет локальное решение в смысле Филиппова.

Непосредственно из определений и сделанных предположений вытекает, что для любой граничной для множества Ω_j точки $(t^*,x^*) \in M$ предельные значения кусочно непрерывной функции f в этой точке по множеству Ω_j и по сечению его плоскостью $t = t^*$ совпадают. Поэтому множество $F(t,x)$ в данной ситуации совпадает с выпуклой оболочкой всех предельных значений функции $f(t,x')$ в точке (t,x) при $(t,x') \to (t,x)$, $(t,x') \in \Omega_j$ (т.е. при фиксированном t, что в известной степени упрощает исследования). В дальнейшем это обстоятельство учитывается без оговорок.

Для произвольного вектора $z \in R^n$ обозначим $p_i(x,z) = \langle \nabla\phi_i(x), z\rangle$, где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — скалярное произве дение векторов. Если $p_i(x,z) \neq 0$ для всех $i \in I(x)$, то через $\tilde{f}(t,x;z)$ обозначим предел функции $f(t,x+hz)$ при $h \to +0$. Определение $\tilde{f}(t,x;z)$ корректно для любой точки $(t,x) \in \Omega$, так как легко видеть: если для всех $i \in I(x)$ выполняется $p_i(x,z) \neq 0$, то значения $\phi_i(x+hz) \neq 0$ и имеют знаки, совпадающие со знаками $p_i(x,z)$ для всех достаточно малых $h > 0$. Для оставшихся индексов i таких, что $\phi_i(x) \neq 0$ также выполняется неравенство $\phi(x+hz) \neq 0$ при малых h. Следовательно, точки $(t,x+hz)$ принадлежат лишь одной из областей непрерывности функции f и предел $\tilde{f}(t,x;z)$ существует.

В каждой фиксированной точке $x \in S_i$ уравнения $\langle\nabla\phi_i(x), z\rangle = 0$ определяют подпространства $K_i(x)$, касательные к поверхностям $S_i = \{x : \phi_i(x) = 0\}$. Отметим некоторые очевидные свойства отображения $z \to \tilde{f}(t,x;z)$ при любых фиксированных $(t,x) \in \Omega$.

1. Отображение $z \to f(t,x;z)$ определено в всех точках $z \notin K(x) = \{\cup K_i(x) : i \in I(x)\}$.

2. Подпространства $K_i(x)$ разделяют пространство R^n на открытые части G^j (пересечения открытых полупространств), на каждом из которых функция $z \to \tilde{f}(t,x;z)$ постоянна.

3. Множества G^j суть выпуклые конусы и поэтому для любых положительных чисел $h > 0$ и $\delta > 0$ и для любых векторов $z^1, z^2 \in G^j$ выполняется $\tilde{f}(t,x;\delta z^1 + hz^2) = \tilde{f}(t,x;z^1) = \tilde{f}(t,x;z^2)$.

4. Каждое значение $\tilde{f}(t,x;z)$, $z \in G^j$ совпадает с предельным значением $f^j(t,x)$ функции $f(t,x)$ по множеству Ω_j и наоборот: каждое предельное значение функции $f(t,x)$ может быть представлено в виде $\tilde{f}(t,x;z)$.

5. Если (t,x) — точка непрерывности функции f, то $\tilde{f}(t,x;z) = f(t,x)$ для любого вектора $z \in R^n$.

В каждой фиксированной точке $(t,x) \in \Omega$ для любого вектора $z \in R^n$ определим множество $\tilde{\Gamma}(t,x;z)$ как выпуклую оболочку предельных значений отображения $z' \to \tilde{f}(t,x;z')$ при $z' \to z$, $z' \notin K(x)$. Легко видеть, что всегда $\tilde{\Gamma}(t,x;z) \subset F(t,x)$ и для любого вектора $z \in \{\cap K_i : i \in I(x)\}$ выполняется $\tilde{\Gamma}(t,x;z) = F(t,x)$. В частности, $\tilde{\Gamma}(t,x;0) = F(t,x)$.

Многозначное отображение $z \to \tilde{\Gamma}(t,x;z)$ имеет замкнутый график, принимает выпуклые значения и ограничено. Поэтому из теоремы Какутани о неподвижных точках многозначных отображений вытекает, что при любых $(t,x) \in \Omega$ существует решение многозначного уравнения

$$z \in \tilde{\Gamma}(t,x;z) \tag{2.21}$$

(неподвижная точка многозначного отображения $z \to \tilde{\Gamma}(t,x;z)$). Множество всех решений включения (2.21) обозначим $H(t,x)$.

Теорема 2.3.1. *Дифференциальные уравнения (2.20) и неявное дифференциальное уравнение в контингенциях*

$$\dot{x} = z(t,x),\ z(t,x) \in H(t,x) \tag{2.22}$$

равносильны в том смысле, что множества их решений совпадают.

Доказательство. Так как $H(t,x) \subset F(t,x)$ для любых (t,x), то любое решение уравнения (2.22) является одновременно и решением уравнения (2.20) (в смысле Филиппова).

Обратно, пусть $x(t)$ — решение уравнения (2.20). Это означает, что $\dot{x}(t)$ существует и удовлетворяет включению

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{2.23}$$

для почти всех точек t из промежутка существования решения. Множество точек t, в которых производная $\dot{x}(t)$ существует, $\phi_i(x(t)) = 0$ и $p_i(x(t),\dot{x}(t)) \neq 0$ для всех $i \in I(x(t))$ не более, чем счетно, и поэтому имеет нулевую меру. Следовательно, для решения Каратеодори в дифференциальном включении $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$ их можно исключить из рассмотрения. Для оставшихся точек t, в которых производная существует, выполняется $\tilde{\Gamma}(t,x(t),\dot{x}(t)) = F(t,x(t))$. Следовательно, $x(t)$ — решение уравнения (2.22). $\square$

Из теоремы 2.3.1 вытекает, что уравнение (2.22), записанное в виде

$$\dot{x} \in \tilde{\Gamma}(t,x;\dot{x}),$$

можно рассматривать, как неявную форму записи уравнения (2.20). Оно имеет решение Каратеордори. Вопрос об однозначной определенности функции $z(t,x)$ и правой единственности решений будет рассмотрен ниже.

Мы уже упоминали о том, что содержательному смыслу многих прикладных задач соответствуют правосторонние решения разрывных систем. В связи с этим отметим, что по отношению к существованию правосторонних решений неявный метод доопределения правой части уравнения (2.20) носит необходимый характер в следующем смысле: если $x(t)$ — правостороннее решение задачи (2.20), то правая производная $D^+x(t)$ в каждой точке t совпадает со значением $z(t,x(t))$ одной из функций $z(t,x) \in H(t,x)$. При этом, если решение включения

(2.21) единственно, то вектор правой производной решения определяется однозначно независимо от того является это решение скользящим режимом или нет.

Однако и в случае, когда неявно заданное уравнение (2.22) движения системы всюду определено однозначно, наряду с правосторонним решением для одного и того же начального состояния может существовать еще решение, не являющееся правосторонним. Иллюстрирующий пример возьмем из [14, с. 89]:

$$\dot{x} = \operatorname{sign} x - 2 \operatorname{sign} y, \ \dot{y} = 2 \operatorname{sign} x + \operatorname{sign} y \tag{2.24}$$

Неявное доопределение этой системы приводит к однозначно определенным уравнениям, которые для любого начального состояния имеют правостороннее решение. Для начальных данных $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ определено правостороннее решение, тождественно равное нулю, но существует еще решение, траектория которого — ломаная линия в виде раскручивающейся вокруг начала координат спирали. Так как для функции $v = |x(t)| + |y(t)|$ выполняется $\dot{v} \equiv 2$ в силу системы (2.24), то для решения, вышедшего из точки $(0, 0)$ в момент $t = 0$, имеем $v(t) = 2t$ при $t \geq 0$. Тогда у этого решения для последовательности $t_k \to +0$ такой, что $x(t_k) > 0$ и $y(t_k) = 0$ существует $\lim x(t_k)/t_k = 2$, а для последовательности $t'_k \to +0$ такой, что $x(t'_k) < 0$ и $y(t'_k) = 0$ существует $\lim x(t'_k)/t'_k = -2$. Следовательно, правая контингенция этого решения при $t = 0$ содержит, по крайней мере, две различные точки — $(2, 0)$ и $(-2, 0)$ и поэтому правой производной при $t = 0$ не существует.

2.3.2 Неявные уравнения разрывных управляемых систем

Рассмотрим еще одну схему неявного доопределения разрывных систем, которую применим к уравнению

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \ldots, u_m(t, x)) \tag{2.25}$$

с решением в смысле Айзермана-Пятницкого. в предположении, что каждая функция $u_i(t, x)$ кусочно непрерывна и терпит разрыв на своей поверхности $\phi_i(x) = 0$, а функция $f(t, x, u_1, \ldots, u_m)$ непрерывна по совокупности аргументов. В описании схемы будем исходить из существования правостороннего решения задачи

$$D^+x(t) \in f(t, x(t), U_1(t, x(t)), \ldots, U_m(t, x(t))), \tag{2.26}$$

где $U_i(t, x)$, как и ранее — отрезки с концами $u_i^+(t, x)$, $u_i^-(t, x)$ (в точках непрерывности функции $u_i(t, x)$ считаем $U_i(t, x) = u_i(t, x)$).

Существование правосторонних решений предполагает выполнение определенных соотношений между предельными значениями функций u_i на поверхностях разрыва и знаками величин $p_i^* = \langle \nabla \phi_i(t, x(t)), D^+x(t) \rangle$, если последние отличны от нуля. Выявим эти соотношения.

Пусть $x(t)$ — решение задачи (2.26), которое в момент t оказалось на пересечении поверхностей разрыва функций u_i для $i = 1, \ldots, r$, $r \leq m$. Для оставшихся индексов i функции u_i непрерывны в точке t. Обозначим через $J_{x,\phi}$ $r \times n$-матрицу, строки которой — векторы $\nabla \phi_i(x(t))$; $p^* = (p_1^*, \ldots, p_r^*)$. В принятых обозначениях с учетом непрерывности справа правой производной $D^+x(t)$ из (2.26) получаем равенство

$$p^* = J_{x,\phi} f(t, x(t), u_1^*(t, x(t)), \ldots, u_r^*(t, x(t)), u_{r+1}(t, x(t)), \ldots, u_m(t, x(t))) \tag{2.27}$$

для значений некоторых функций $u_i^* \in U_i(t, x(t))$ таких, что:

1) если $p_i^* \neq 0$, то $u_i^* = u_i^+(t, x(t))$ при $p_i^* > 0$ и $u_i^* = u_i^-(t, x(t))$ при $p_i^* < 0$;

2) если $p_i^* = 0$, то u_i^* и может быть как граничной, так и внутренней точкой отрезка $U_i(t, x(t))$.

Таким образом, из существования правостороннего решения задачи (2.26) вытекает существование функций $u_i^* \in U_i(t, x(t))$ с указанными выше свойствами и удовлетворяющими (2.27). (Отметим, что в случае, когда множество $f(t,x,U_1(t,x),...,U_m(t,x))$ выпукло, а $x(t)$ — решение Каратеодори, то существование измеримых функций, удовлетворяющих $u_i(t) \in U_i(t,x(t))$, устанавливается леммой А.Ф.Филиппова о неявной функции [4].)

Приведенные выше рассуждения положим в основу доопределения функций u_i. Для этого в каждой точке (t,x), лежащей на пересечении поверхностей разрыва, будем рассматривать вектор p^* как независимый r-мерный параметр. Для каждой точки (t,x,p^*) определим множество $U^*(t,x,p^*)$ векторов $u^* = (u_1^*(t,x,p^*),\dots,u_r^*(t,x,p^*))$ по следующему правилу для каждого $i=1,\dots,r$:

1) если $p_i^* > 0$, то $u_i^*(t,x,p^*) = u_i^+(t,x)$; если $p_i^* < 0$, то $u_i^*(t,x,p^*) = u_i^-(t,x)$;

2) если $p_i^* = 0$, то $u_i^*(t,x,p^*)$ принимает произвольное значение из отрезка $U_i(t,x)$.

При каждых фиксированных (t,x) на пересечении поверхностей разрыва рассмотрим многозначное алгебраическое уравнение относительно неизвестной величины p^*:

$$\begin{gathered} p^* = J_{x,\phi} f(t,x,u_1^*(t,x,p^*),\dots,u_r^*(t,x,p^*),u_{r+1}(t,x),\dots,u_m(t,x)), \\ u^* \in U^*(t,x,p^*). \end{gathered} \tag{2.28}$$

Решения $p^*(t,x)$ уравнения (2.27) (если они существуют) доопределяют функции $u_i(t,x)$ на поверхностях разрыва неявным и, возможно, многозначным образом. Из вышесказанного вытекает, что для любого правостороннего решения $x(t)$ уравнения в контингенциях (2.26) функция $p^*(t,x(t))$ существует. Иными словами, любое правостороннее решение задачи (2.26) удовлетворяет также дифференциальному уравнению в контингенциях

$$D^{+}x(t) = f(t, x, u_1^*(t, x, p^*), \dots, u_r^*(t, x, p^*), u_{r+1}(t, x), \dots, u_m(t, x)),\\ p^* \in H^*(t, x), \tag{2.29}$$

где $H^*(t,x)$ — множество всех решений задачи (2.28) в точке (t,x). Обратное очевидно. Таким образом, задачи (2.26) и (2.29) эквивалентны в смысле совпадения множеств правосторонних решений.

Замечание 2.3.1. *Решение p^* уравнения (2.28) существует в каждой точке (t,x), для которой множество*

$$W = \{\cup f(t, x, u_1^*(t, x, p^*), \dots, u_r^*(t, x, p^*), u_{r+1}(t, x), \dots, u_m(t, x)) : p^* \in R^r\}$$

выпукло. Последнее, в частности, выполняется, если для любой точки (t,x) множество $f(t, x, U_1, \dots, U_m)$ из правой части включения (2.26) выпукло, а в противном случае решений уравнения (2.27) может не существовать, как, впрочем, может не существовать и правосторонних решений задачи (2.26).

Замечание 2.3.2. *Одним из способов доопределения функций u_i на пересечении поверхностей разрыва является метод эквивалентного управления, рассмотренный в разделе 1.2.3.*

Функции $u_i^{eq}(t,x)$ (эквивалентные управления) определяются так, чтобы вектор скорости движения системы был касательным ко всем поверхностям разрыва $\phi_i(x) = 0\,(i = 1, \dots, r)$, на которых оказалось решение, т.е. $u_i^{eq}(t,x)$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\langle \nabla\phi_i, F_i(t, x, u_1^{eq}(t, x), \dots, u_r^{eq}(t, x), u_{r+1}(t, x), \dots, u_m(t, x))\rangle = 0 \tag{2.30}$$

и условию $u_i^{eq}(t,x) \in U_i(t,x)$, где $i = 1, \dots, r$. Таким образом, решение $p^* = 0$ уравнений (2.28) в тех ситуациях, когда оно существует, определяет эквивалентные управления $u_i^{eq} = u_i^*(t, x, 0)$, $i = 1, \dots, r$.

Пример 2.3.1. *Единственность вектора* z *даже в линейных и разрешимых относительно управлений* u_i *системах зависит от структуры уравнений.*

Рассмотрим задачи: A) $\dot{x} = a - \operatorname{sgn} x$ *и B)* $\dot{x} = a + \operatorname{sgn} x$ *, которые отличаются лишь знаком при функции* $\operatorname{sgn} x$ *. Легко видеть, что уравнение (2.28) для задачи A всегда имеет единственное решение, а для задачи B таких решений три, если* $|a| < 1$ *, два, если* $|a| = 1$ *и одно, если* $|a| > 1$ *. Существенно различается и поведение решений этих уравнений в точке* $x = 0$ *и вблизи нее: при* $|a| \leq 1$ *для задачи A точка* $x = 0$ *устойчива, а для задачи B — неустойчива и ее решение может в любой момент перейти в одну из областей* $x > 0$ *или* $x < 0$ *.*

Замечание 2.3.3. *Пусть* $m = n$ *и* $\det J_{x,\phi} \neq 0$ *в рассматриваемой области изменения переменных* (t, x) *. Проведем замену переменных по формулам* $y_i = \phi_i(t, x)$ $(i = \overline{1, n})$ *, которые запишем в векторной форме* $y = \phi(t, x)$ *. Обозначим* $v_i(t, y) = u_i(t, \phi^{-1}(t, y))$ *, где* $\phi^{-1}(t, y)$ *— обратное преобразование. Каждая функция* $v_i(t, y)$ *разрывна на подпространстве* $y_i = 0$ *. В новых переменных уравнение (2.29) запишется в виде*

$$\dot{y} = f(t, y, v^*(t, y, \dot{y})),\ v^*(t, y, \dot{y}) \in V^*(t, y, \dot{y}), \tag{2.31}$$

где $F(t, y, v) = J_{x,\phi} f(t, x, v) - J_{t,\phi}|_{x=\phi^{-1}(t,x)}$ *, множество* $V^*(t, y, \dot{y})$ *построено так же, как* $U^*(t, x, z)$ *, с заменой* $\phi_i(t, x)$ *на* y_i *,* $u_i(t, x)$ *на* $v_i(t, y)$ *,* (t, x, z) *на* $(t, y, \dot{y})$ *. В уравнениях (2.32) роль параметра* z *принимает на себя вектор производных* $\dot{y}$ *. Таким образом, имеем неявную форму записи*

$$\dot{y} = f(t, y, V^*(t, y, \dot{y})). \tag{2.32}$$

2.3.3 Однозначная определенность разрывных систем в неявной форме

Рассмотрим следующее неравенство

$$(\tilde{f}(t,x;z^1) - \tilde{f}(t,x;z^2))A(t,x)(z^1 - z^2)^T \leq 0 \tag{2.33}$$

для любых векторов $z^1, z^2 \in R^n$ таких, что $\langle \nabla\phi_i(x), z^1\rangle \neq 0$ $\langle \nabla\phi_i(x), z^2\rangle) \neq 0$ для всех $i \in I(x)$, где $A(t,x)$ — симметричная, положительно определенная матрица, T — знак транспонирования.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполняется неравенство (2.33). Тогда решение* $z(t,x)$ *многозначного уравнения (2.21) — единственно и положительно определенная квадратичная форма* $v(z) = zA(t,x)z^T$ *— при* $z = z(t,x)$ *достигает своего минимального значения на выпуклом, компактном множестве* $F(t,x)$. *В частности, если* $A(t,x)$ *— единичная матрица, то* $z(t,x)$ *— ближайшая к началу координат точка множества* $F(t,x)$.

Доказательство. Зафиксируем (t,x). Из неравенства (2.33) получаем неравенство

$$(u - v)A(t,x)(z^1 - z^2)^T \leq 0 \tag{2.34}$$

для любых $u \in \tilde{\Gamma}(t,x,z^1), v \in \tilde{\Gamma}(t,x,z^2)$, z^1, $z^2 \in R^n$. Пусть $z^1 = z_0$ — решение многозначного уравнения (2.21) и $z^2 = 0$. Тогда из (2.34) вытекает

$$(z_0 - v)A(t,x)z_0^T \leq 0 \tag{2.35}$$

для любых $v \in \Gamma(t,x)$. Введем в рассмотрение функцию $w(z) = zA(t,x)z^T$ переменной z. Тогда из неравенства (2.35) получаем, что $\langle z_0 - v, \nabla w(z_0)\rangle \leq 0$ для любых $v \in \Gamma(t,x)$. Так как $A(t,x)$ — симметричная, положительно определенная матрица, то $w(z)$ — сильно выпуклая функция, и из последнего нераveства вытекает, что вектор $z_0 \in \Gamma(t,x)$ доставляет функции $w(z)$ единственную точку минимума на выпуклом, компактном множестве $\Gamma(t,x)$. $\square$

Теорема 2.3.2 не только утверждает однозначную определенность уравнений (2.20) в неявной форме $\dot{x} = z(t, x)$, но и дает метод нахождения функции $z(t, x)$.

В то же время теорема 2.3.2 не обеспечивает правую единственность решений. Это видно хотя бы из того, что неравенство (2.33) тривиально выполняется для любой непрерывной функции $f(t, x)$. Как известно, непрерывности функции $f(t, x)$ не достаточно для единственности решений обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение вида

$$P(t, x)\dot{x} = R(t, x) - H(t, x)u, \tag{2.36}$$

где $P(t, x)$ — симметричная, положительно определенная $n \times n$-матрица, $H(t, x)$ — диагональная $n \times n$-матрица с неотрицательными элементами $H_{ii}(t, x) \geq 0$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i = \operatorname{sgn} x_i$. Для уравнения (2.36) представление его в виде дифференциальных включений в смысле Филиппова и Айзермана-Пятницкого совпадают и описанные выше неявные схемы доопределения приводят к одному и тому же уравнению $\dot{x} = z(t, x)$ в явной форме, которая определяется из включения

$$A(t, x)z \in R(t, x) - H(t, x)u^*(t, x, z),$$

где $u^*(t, x, z) = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ — такой вектор, что $u_i^* = \operatorname{sgn} z_i$ при $z_i \neq 0$ и $-1 \leq u_i^* \leq 1$ при $z_i = 0$ в точках $x_i = 0$. При $x_i \neq 0$ выполняется $u_i^* = \operatorname{sgn} x_i$

Если функция $R(t, x)$ и элементы матриц $P(t, x)$ и $H(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x, то для (2.36) выполняется неравенство (2.33), которое приобретает вид

$$(z^1 - z^2)H(t, x)(\operatorname{sgn} z^2 - \operatorname{sgn} z^1)^T \leq 0,$$

где z^1, z^2 — произвольные векторы с ненулевыми компонентами.

2.3.4 Правосторонняя единственность решений

Условие А: *для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *существуют числа* $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$ *и* $l = l(t_0, x_0) > 0$ *такие, что для любых точек* (t, x), (t, y) *из областей непрерывности функции* f *(возможно разных областей для различных точек* (t, x), (t, y) *), удовлетворяющих* $x, y \in U_\delta(x_0)$ *, и любого* $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ *, выполняется неравенство*

$$(f(t, x) - f(t, y))A(t, x)(x - y)^T \leq l\|x - y\|^2, \tag{2.37}$$

где $A(t, x) = [a_{ij}(t, x)]_{i,j=1}^n$ *— некоторая симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица (т.е. все* $a_{ij}(t, x)$ *— непрерывно дифференцируемые функции),* $U_\delta(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ *—* δ *-окрестность точки* x_0 *,* $\|\cdot\|$ *— евкли дова норма.*

Условие А обеспечивает правую единственность решений уравнения (2.20).

Теорема 2.3.3. *Пусть* f *— кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию А. Тогда для любой точки* (t_0, x_0) *найдется промежуток* $[t_0, t_0+\delta)$ *, на котором любые два решения уравнения (2.20) с начальными данными* (t_0, x_0) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два решения с начальными данными (t_0, x_0). Обозначим $z(t) = x(t) - y(t)$, $w(t) = z(t)A(t, x(t))z^T(t)$. Выберем число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялись условия:

1) решения $x(t)$ и $y(t)$ существуют на промежутке $[t_0, t_0 + \delta)$;

2) наименьшие собственные числа $\lambda_{min}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ матрицы $A(t, x(t))$ ограничены снизу некоторым числом $\lambda > 0$;

3) норма $\|\dot{A}(t, x(t))\|$ матрицы производных $\dot{a}(t, x(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ ограничена некоторым числом c.

Тогда из неравенства (2.37) получаем $\dot{w}(t) \leq Lw(t)$, где $L = (2l + c)/\lambda$. Далее с учетом равенства $w(t_0) = 0$ и леммы Грануолла получаем $w(t) \equiv 0$. □

Замечание 2.3.4. *1. Из условия А вытекает (2.33). Чтобы убедится в этом следует в неравенстве (2.37)* x *заменить на* $x + hz^1$ *,* y *— на* $x + hz^2$ *, поделить обе части неравенства на* $h > 0$ *и затем перейти к пределу при* $h \to 0$ *.*

2. Правостороннее условие Липшица (2.19) является частным случаем условия ФА.

2.4 Вопросы и упражнения

1. Дайте определение полунепрерывности сверху многозначного отображения.
2. Как связаны между собой свойства замкнутости графика многозначного отображения и полунепрерывности сверху?
3. Что означает ограниченность и локальная ограниченность многозначного отображения?
4. Что представляет собой свойство полунепрерывности сверху для однозначных отображений?
5. Проверьте свойство полунепрервности сверху для многозначного отображения $F(x) = \operatorname{sgn} x$, если $x \neq 0$ и $F(x) = [-1, 1]$, если $x = 0$. То же самое сделайте для отображения $F(x) = 1/x$, если $x \neq 0$ и $F(x) = [-1, 1]$, $x = 0$. Прокомментируйте результат.
6. Основываясь на теореме 2.2.2 существования решений для дифференциальных включений дайте формулировки теорем существования решения для дифференциальных уравнений с разрывной правой часть с определениями решений по Филиппову и Айзерману-Пятницкому.
7. Разъясните поведение непродолжимых решений вблизи правых концов их максимальных промежутков существования.

Глава 3

Устойчивость

3.1 Определения и постановка задачи.

Основные понятия устойчивости решений и теоремы прямого метода функций Ляпунова могут быть рассмотрены и для дифференциальных включений. Мы рассмотрим лишь некоторые из них.

Определение 3.1.1. *Решение* $x = \phi(t)$ *,* $(t \in [t_0, +\infty)$ *) дифференциального включения называется устойчивым, если для любого* $\epsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(t_0, x_0, \epsilon) > 0$ *, такое, что для каждого* x'_0 *, такого, что* $\|x'_0 - \phi(t_0)\| < \delta$ *любое решение* $x'(t)$ *с начальным условием* $x'(t_0) = x'_0$ *определено на промежутке* $[t_0, +\infty)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\|x'(t) - \phi(t)\| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Асимптотическая устойчивость означает, что решение устойчиво и дополнительно $x'(t) \to \phi(t)$ при $t \to +\infty$.

Но применительно к дифференциальным включениям может быть определен специфический вид устойчивости и асимптотической устойчивости. Для того, чтобы пояснить суть дела, рассмотрим управляему систему

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ u \in U. \tag{3.2}$$

Решением называется пара функций: абсолютно непрерывная функция $x(t)$ (траектория) и измеримая функция $u(t)$ (управление), почти всюду на рассматриваемом промежутке времени удовлетворяющие системе (3.2). Заменим эту систему дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{3.3}$$

где $F(t, x) = f(t, x, U)$. Тогда из устойчивости решения $x = \phi(t)$ включения (3.3) вытекает, что какое бы мы не взяли решение $(x'(t), u(t))$ системы (3.2) с условием $\|x'(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$, функция $x'(t)$ удовлетворяет неравенству (3.1) при всевозможных допустимых управлениях $u(t) \in U$.

Теперь поставим задачу о существовании решения системы (3.2), для которого из неравенства $\|x'(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$ вытекает неравенство (3.1) хотя бы при одном допустимом управлении. Это означает, что должно существовать решение включения (3.3), для которого выполняется (3.1).

Так мы приходим к следующему понятию.

Определение 3.1.2. *Решение $x = \phi(t)$, ($t \in [t_0, +\infty)$) дифференциального включения называется слабо устойчивым, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(t_0, x_0, \epsilon) > 0$, такое, что для любого x'_0, такого, что $\|x'_0 - \phi(t_0)\| < \delta$ существует решение $x'(t)$ с начальным условием $x'(t_0) = x'_0$ определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяет неравенсту*

$$\|x'(t) - \phi(t)\| < \epsilon \tag{3.4}$$

Слабая асимптотическая устойчивость означает, что решение слабо устойчиво и дополнительно $x'(t) \to \phi(t)$ при $t \to +\infty$.

Задача о существовании допустимого управления, сформулированная выше для системы (3.2), называется задачей стабилизации, а слабая асимптотическая устойчивость включения (3.3) означает что система (3.2) стабилизируема к решению $\phi(t)$ при достаточно малых начальных отклонениях.

Пусть $F : R^1 \times R^n \to R^n$ – многозначное отображение, которое предполагается полунепрерывным сверху по совокупности аргументов и с выпуклыми компактными значениями.

Используются следующие обозначения: $I = [t_0, +\infty)$, $D \subset R^n$ – некоторая область, содержащая нулевой вектор. Через $\omega_i(u) \geq 0$ обозначаются скалярные непрерывные неубывающие функции такие, что $\omega_i(0) = 0$ и $\omega_i(u) > 0$ при $u > 0$. Предполагается, что существует константа K такая, что $\|v\| \leq K$ для всех $v \in F(t,x)$ и $(t,x) \in I \times D$.

Рассматривается дифференциальное включение (3.5) при условии, что $0 \in F(t,0)$ для всех $t \geq t_0$.

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{3.5}$$

Определение 3.1.3. *Пусть $V : R^1 \times R^n \to R^1$ – непрерывная функция такая, что $V(t,0) = 0$.*

Верхняя $\dot{V}^*$ и нижняя $\dot{V}_*$ производные непрерывно-дифференцируемой функции $V(t,x)$ в силу дифференциального включения (3.5) определяются следующими равенствами:

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(t,x)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle \right)$$

,

$$\dot{V}_* = \inf_{y \in F(t,x)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle \right)$$

.

Определение 3.1.4. *Функцию $V(t,x)$ будем называть определенно-положительной, если найдется такая функция ω_1, что справедливо неравенство $V(t,x) \geq \omega_1(\|x\|)$ для любых $t \geq t_0$ и $x \in D$.*

Определение 3.1.5. *Будем говорить, что функция $V(t,x)$ имеет бесконечно малый высший предел, если найдется такая функция ω_2, что справедливо неравенство $V(t,x) \leq \omega_2(\|x\|_C)$ для любых $t \geq t_0$ и $x \in D$.*

Так же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений задача об устойчивости произвольного решения дифференциального включения при помощи замены переменных сводится к устойчивости нулевого решения $\phi(t) \equiv 0$.

3.2 Устойчивость и слабая устойчивость

Для функции $v(t)$ через $D^*v(t)$ и $D_*v(t)$ будем обозначать верхнее правое и нижнее правое производные числа Дини, соответственно (см. [12, с. 10]).

Лемма 3.2.1. *Если функция V непрерывно дифференцируема, то для любого решения $x(t)$ включения (3.5) функция $v(t) = V(t, x(t), x_t(\cdot))$ удовлетворяет неравенству*

$$\dot{V}_*(t, x(t)) \leq D_*v(t) \leq D^*v(t) \leq \dot{V}^*(t, x(t)) \tag{3.6}$$

для любого $t \geq t_0$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение функционально-дифференциального включения (3.5). Так же, как и при доказательстве теоремы 1 из [14, с. 56] убеждаемся, что включение (3.5) равносильно утверждению

$$Cont\ x(t) \subset F(t, x) \tag{3.7}$$

для любых $t > t_0$, где $Cont\ x(t)$ – контингенция функции $x(t)$. Обозначим за $Dv(t)$ правое верхнее или правое нижнее производное число функции $v(t) = V(t, x(t))$ в точке t. Тогда существует последовательность $h_i \to +0$ такая, что

$$Dv(t) = \lim_{h_i \to +0} \frac{V(t + h_i, x(t + h_i)) - V(t, x(t))}{h_i}.$$

В силу леммы 2.2.3 о среднем значении функции заключаем, что

$$(x(t + h_i) - x(t_i))/h_i \in \overline{co}\ \{\dot{x}(s) : t \leq s \leq t + h_i\},$$

где $\overline{co}$, как и ранее, означает замыкание выпуклой оболочки множества. Тогда в силу локальной ограниченности многозначной функции $F(t,x)$ последовательность $(x(t+h_i)-x(t_i))/h_i$ является ограниченной и поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности рассуждений, будем полагать, что $(x(t+h_i)-x(t_i))/h_i \to a$. Очевидно, что $a \in Cont\, x(t)$. Так как $x(t+h_i) = x(t) + ah_i + o(h_i)$, где $o(h_i)/h_i \to 0$, то запишем цепочку равенств

$$Dv(t) = \lim_{h_i \to +0} \frac{V(t+h_i, x(t)+ah_i+o(h_i)) - V(t,x(t))}{h_i} =$$

$$= \lim_{h_i \to +0} \frac{1}{h_i}\Big(\frac{\partial V}{\partial t}h_i + \langle \nabla_x V, ah_i + o(h_i)\rangle + o(h_i)\Big) =$$

$$= \lim_{h_i \to +0} \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, a + \frac{o(h_i)}{h_i}\rangle + o(h_i)\cdot\frac{1}{h_i}\Big) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, a\rangle.$$

Из (3.7) вытекает включение $a \in F(t,x)$. Тогда непосредственно из определений верхней и нижней производных в силу включения (3.5) вытекают неравенства

$$\inf_{y\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y\rangle\right) \le \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, a\rangle \le$$

$$\le \sup_{y\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y\rangle\right). \quad (3.8)$$

Из (3.8) и (3.8) получаем неравенство

$$\inf_{y\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y\rangle\right) \le Dv(t) \le \sup_{y\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla V \cdot y\rangle\right).$$

Взяв в неравенстве (3.9) в качестве $Dv(t)$ верхнее и нижнее правые производные числа и учитывая, что $D_*v(t) \le D^*v(t)$, получаем (3.6).
□

Теорема 3.2.1. *Пусть существует определенно-положительная, непрерывно дифференцируемая функция* $V(t,x)$ *такая, что* $\dot{V}^* \le 0$ *на множестве вида* $I \times D$. *Тогда тривиальное решение дифференциального включения (3.5) устойчиво.*

Доказательство. Если $\dot{V}^* \leq 0$, то по лемме 3.2.1 для любого решения $x(t)$ включения (3.5), определенного на некотором отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$, выполняется неравенство $D^*V(t, x(t)) \leq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ таковы, что выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\|_C < \delta} V(t_0, x)) \leq \omega_3(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Будем предполагать число δ настолько малым, что все векторы , удовлетворяющие неравенству $\|y\| < \delta$, принадлежат области D и многозначное отображение $F(t, y)$ ограничено при условии $\|y\| < \delta$ и $t \in I$. Так как $V(t, 0) = 0$ и функция $V(t, x)$ непрерывна, то такое δ существует для любого достаточно малого ε. Пусть $\|x(t_0)\| < \delta$. Поскольку $D^*V(t, x(t)) \leq 0$, то функция $V(t, x(t))$ не возрастает вдоль решений включения (3.5). Тогда из (3.9) вытекает, что

$$\omega_3(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) \leq \omega_3(\varepsilon)$$
$$\forall t \in [t_0 - \tau, t_1]. \tag{3.10}$$

Из условия ограниченности F вытекает, что решение $x(t)$ продолжимо на промежуток $[t_0 - \tau, +\infty)$. Из (3.10) в силу монотонности $\omega_3(u)$ следует неравенство $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ для $t \geq t_0$, т.е. решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво. □

Теорема 3.2.2. *Если выполнены условия теоремы 3.2.1, но с заменой* $\dot{V}^*$ *на* $\dot{V}_*$, *то тривиальное решение функционально-дифференциального включения (3.5) слабо устойчиво.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы об устойчивости дифференциальных включений из [14].

3.3 Асимптотическая устойчивость и слабая асимптотическая устойчивость

Теорема 3.3.1. *Пусть существует определенно-положительная непрерывно дифференцируемая функция* $V(t,x)$ *, имеющая бесконечно малый высший предел, такая, что*

$$\dot{V}^*(t,x) \leq -\omega_4(\|x\|) \tag{3.11}$$

на множестве $I \times D$ *. Тогда тривиальное решение функционально-дифференциального включения (3.5) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что тривиальное решение включения устойчиво. Поэтому выберем число $\epsilon > 0$ настолько малым, что для любого решения $x(t)$ с начальными условиями $\|x(t_0)\| < \delta < \epsilon$ выполняется включение $(t, x(t)) \in I \times D$ для всех $t \geq t_0$. Тогда из неравенства (3.17) и леммы 3.2.1 для функции $v(t) = V(t, x(t))$ будем иметь $D^*v(t) < 0$, и, следовательно, функция $v(t)$ монотонно убывает с возрастанием t. В силу того, что функционал V положительно определен, функция $v(t)$ ограничена снизу и поэтому имеет конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \inf_{t\geq t_0} v(t) = \alpha \geq 0.$$

Покажем, что число α не может быть больше нуля. Предположим противное: пусть выполняется неравенство $\alpha > 0$. Тогда решение $x(t)$ удовлетворяет условию $\|x(t)\| \geq \beta$ при $\nu_1 < t < \infty$, где β – некоторое достаточно малое положительное число, а $\nu_1 > t_0$ – большое положительное число. Следовательно, $\|x(t)\| \geq \beta$ для всех $t \geq \nu_1 + \tau = \nu_2$ и из неравенства (3.17) и леммы 3.2.1 вытекает, что $\sup\limits_{t\geq\nu_2} D^*v(t) = -l$, где $l > 0$.

Рассмотрим функцию $\phi(t) = v(t) + lt$. Тогда $D^*\phi(t) \leq 0$ для всех $t \geq \nu_2$. Следовательно, функция $\phi(t)$ не возрастает для $t \geq \nu_2$. Тогда

$\phi(t) - \phi(t_1) \leq 0$ для всех $t \geq t_1 \geq \nu_2$, откуда получаем неравенство $v(t) - v(t_1) \leq -l(t - t_1)$.

Таким образом, при достаточно большом t функция $v(t)$ принимает отрицательные значения, что противоречит условию теоремы. Поэтому $\alpha = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. В силу положительной определенности функции $v(t)$ это означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. □

Теорема 3.3.2. *Если выполнены условия теоремы 3.3.1, но с заменой* $\dot{V}^*$ *на* $\dot{V}_*$, *то тривиальное решение функционально-дифференциального включения (3.5) слабо асимптотически устойчиво.*

Доказательство этой теоремы проводится так же как и для теоремы 3.2.2, по схеме, изложенной в [14, с. 116] для дифференциальных включений.

3.4 Принцип инвариантности

Будем рассматривать автономное дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3.12}$$

где $F : R^n \to R^n$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Через $\Omega(x(\cdot))$ для каждого решения $x(t)$ включения (3.12), заданного на промежутке $[0, +\infty)$, определим ω-предельное множествокак множество всех точек $a \in R^n$, для которых существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x(t_n) \to \psi(\cdot)$. Легко видеть, что

$$\Omega(x(\cdot)) = \bigcap_{\tau' \geq 0} \overline{(\bigcup_{t \geq \tau'} (x(t))}. \tag{3.13}$$

Назовем множество $M \subset C_\tau$ полуинвариантным (см. [11, с. 297]), если для любого $y_0 \in M$ существует решение $y(t)$ включения (3.12) такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in M$ для всех $t \geq 0$.

Лемма 3.4.1. *Пусть для включения (3.12) многозначное отображение* F *ограничено в* D. *Тогда для любого решения* $x(t)$ *такого, что* $x_t(\cdot) \in D$ *для всех* $t \geq 0$ *множество* $\Omega(x(\cdot))$ *непусто, компактно, полуинвариантно и* $d(x(t), \Omega(x(\cdot))) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *где* d *означает расстояние от точки до множества в пространстве* R^n.

Обозначим

$$E(\omega = 0) = \{x \in R^n : \omega(\|x\|) = 0)\}.$$

Теорема 3.4.1. *Пусть* $F(x)$ *— ограниченное полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями и существует непрерывно дифференцируемая функция* $V(x)$ *такая, что*

$$\dot{V}^*(x) \leq -\omega(\|x\|), \tag{3.14}$$

где $\omega(u) \geq 0$ *– некоторая функция. Тогда для любого ограниченного решения* $x(t)$ *выполняется.*

$$\Omega(x(\cdot)) \subset E(\omega = 0). \tag{3.15}$$

Доказательство. Так как множество $E = \{\overline{\cup x(t)} : t \geq 0\} \subset C_\tau$ компактно, то непрерывная функция $V(x)$ ограничена на E. Из условия (3.14) следует, что функция $t \to V(x(t))$ монотонно не возрастает. Так как она ограничена снизу, то существует $\lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t)) = c$ и, следовательно, $\Omega(x(\cdot)) \subset \{x : V(x) = c\}$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in \Omega(x(\cdot))$. Тогда в силу полуинвариантности множества $\Omega(x(\cdot))$ существует решение $y(t)$ включения (3.12), определенное на отрезке $[0, t_1]$ и такое, что $y(0) = y_0$, $y(t) \in \Omega(x(\cdot))$. Следовательно, $V(y(t)) = c$ для всех $t \in [0, t_1]$. Поэтому $D^*V(y(t)) = 0$ всюду на $[0, t_1]$. Из условия (3.14) вытекает, что $\omega(y(t)) = 0$ и, следовательно, $\omega(y_0) = 0$. $\Box$

Пусть $M \subset C_\tau$ – наибольшее полуинвариантное множество, лежащее в $E(\omega = 0)$. Непосредственно из теоремы 3.4.1 вытекает

Следствие 3.4.1. *Пусть выполняются все предположения теоремы 3.4.1. Тогда* $\Omega(x(\cdot)) \subset M$.

Применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям теорема 3.4.1 известна как принцип инвариантности Ла-Салля. Она имеет многочисленные приложения в задачах устойчивости и притяжения. В частности, эта теорема утверждает, что ω-предельное множество содержится в наибольшем полуинвариантном множестве множества нулей производной функции $V(x)$ при максимально ослабленном в прямом методе Ляпунова предположении на эту производную: она должна быть неположительной. Теперь, если предположить или установить, что в множестве $E(\omega = 0)$ нет других полуинвариантных множеств, кроме начала координат, то принцип инвариантности дает условие асимптотической устойчивости нулевого вектора для автономных уравнений. Этот результат первоначально был установлен хорошо известной тоеремой Барбашина-Красовского.

3.5 Устойчивость дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.16}$$

с кусочно непрерывной правой частью. Под его решением в смысле Филиппова понимается решение дифференциального включения $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$. Тогда при исследовании вопросов устойчивости уравнения (3.16) можно опираться на соответствующие выше приведенные теоремы для дифференциальных включений. При предположении, что частные производные $\partial V/\partial t$, $\nabla_x V$ функции Ляпунова $V(t, x)$ непрерывны, в этих теоремах при проверке условий на верхнюю производную $\dot{V}^*$ достаточно убедиться, что они верны для

$$\dot{V} = \partial V/\partial t + \langle \nabla_x V, f \rangle$$

в точках непрерывности функции f.

В самом деле, в области непрерывности функции f выполняется равенство

$$F(t, x) = f(t, x),$$

а в точках, где функция f разрывна, значения $F(t, x)$ определяются с помощью предельных переходов и овыпукления множества предельных значений функции f. Эти операции сохраняют неравенства, справедливые для $\dot{V}$ (см. [14, с. 117]).

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.5.1. *Пусть существует определенно-положительная, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ такая, что и $\dot{V} \leq 0$ в точках непрерывности функции f из множества вида $I \times D$. Тогда тривиальное решение дифференциального уравнения (3.16) устойчиво.*

Теорема 3.5.2. *Пусть существует определенно-положительная непрерывно дифференцируемая функция* $V(t, x, \psi(\cdot))$ *, имеющая бесконечно малый высший предел, такая, что выполнено неравенство*

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega_4(\|x\|) \tag{3.17}$$

в точках непрерывности функции f *из множества вида* $I \times D$ *. Тогда тривиальное решение дифференциального уравнения (3.16) асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.5.3. *Пусть уравнение автономно и существует непрерывно дифференцируемая функция* $V(x)$ *такая, что и* $\dot{V} \leq 0$ *в точках непрерывности функции* $f(x)$ *из пространства* R^n *. Тогда* ω *-предельное множество* $\Omega(x(\cdot))$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству из замыкания множества точек непрерывности функции* f *, удовлетворяющих условию* $\dot{V}(x) = 0$ *.*

3.6 Задача стабилизации

Рассматривается управляемая система в форме дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{3.18}$$

где $u = (u_1, \dots u_m)$ – вектор управления с ограничением $u \in U$ и $U \subset R^m$ – компактное множество, $f : R \times R^n \times U \to R^n$ – непрерывная функция.

Исследование задачи стабилизации основывается на понятии управления оптимального по отношению к демпфированию некоторой функции $V(t, x)$, которая определяет в каком-то смысле расстояние от начального до желаемого состояния. Под оптимальным управлением относительно демпфирования некоторой функции понимается такое допустимое управление, что эта функция убывает наибольшим образом вдоль траектории, соответствующей этому управлению. Здесь мы будем опираться на условия асимптотической устойчивости тривиального решения дифференциального включения. Как правило, решение задачи синтеза нужного управления приводит к разрывным управляемым системам. Перейдем к точным формулировкам.

Определение 3.6.1. *Пусть* $0 \in U$ *и* $0 = f(t, 0, 0)$ *для всех* t. *Управление* $u(t, x)$ *стабилизирует систему (3.18), если при подстановке в нее* $u = u(t, x)$ *тривиальное решение этой системы асимптотически устойчиво.*

Определение 3.6.2. *Управление* $u(t, x) = (u_1, \dots, u_m)$ *называется оптимальным по отношению к демпфированию функции* $V(t, x)$, *если эта функция убывает вдоль решения* $x = x(t, u)$, *соответствующего этому управлению, наибольшим образом, т.е. полная производная функции* $V(t,)$ *в силу системы (3.18):*

$$dotV = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, f(t, x, u) \rangle$$

при каждых фиксированных (t, x) *достигает своего минимума на множестве* U.

Теорема 3.6.1. *Пусть* $f(t, 0, 0) = 0$, $0 \in U$ *и существует положительно определенная, имеющая бесконечно малый высший предел, непрерывно дифференцируемыя функция* $V(t, x)$ *такая, что для всех* t *выполняется неравенство* $\partial V(t, 0)/\partial t \leq 0$ *и для любых* (t, x) $(\|x\| < \delta)$ *существует* $u \in U$, *такое что*

$$\dot{V}(t, x, u) \leq -\omega(\|x\|). \tag{3.19}$$

Тогда любое управление $u(t, x)$ *со свойством* $u(t, 0) = 0$, *оптимальное по отношению к демпфированию функции* $V(t, x)$, *стабилизирует систему (3.18).*

Доказательство. Пусть $U(t, x)$ – множество всех $u \in U$, для которых выполняется неравенство (3.19). Очевидно, что $U(t, x)$ содержит все управления $u(t, x)$ оптимальные по отношению к демпфированию функции $V(t, x)$.

Многозначное отображение $(t, x) \to U(t, x)$ имеет замкнутый график. В самом деле, это должно означать, что из условий $(t_n, x_n) \to (t, x)$, $u_n \to u, u_n \in U(t_n, x_n)$ следует, что $u \in U(t, x)$, т.е. для $(t, \psi(\cdot))$ и u должно выполняться неравенство (3.19). Функция $\dot{V}$ непрерывна, поэтому неравенство (3.19) сохраняется при предельном переходе и, значит, отображение $(t, \psi(\cdot)) \to U(t, \psi(\cdot))$ имеет замкнутый график. Следовательно, оно полунепрерывно сверху как замкнутое многозначное отображение в компактное множество. Тогда многозначное отображение $(t, \psi(\cdot)) \to f(t, \psi(\cdot), U(t, \psi(\cdot))$ полунепрерывно сверху как суперпозиция непрерывной и полунепрерывной сверху функций. Следовательно, многозначное отображение $F_1(t, x) = cof(t, x, U(t, x))$ также полунепрерывно сверху.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F_1(t, x). \tag{3.20}$$

Так как по условию теоремы $\partial V(t,0)/\partial t \le 0$, то $0 \in U(t,0)$ и, очевидно, $0 \in F_1(t,0)$. В силу неравенства (3.19) для включения (3.20) выполняется условие $\dot{V}^* \le -\omega(\|x\|)$ и в соответствии с теоремой 3.3.1 решение $x(t) \equiv 0$ включения (3.20) асимптотически устойчиво.

Возьмем произвольное управление $u(t,x) \in U(t,x)$, оптимальное по отношению к демпфированию функции $V(t,x)$ такое, что $u(t,0) = 0$. Отметим, что в общем случае из условий теоремы о свойствах функции ничего неизвестно. Утверждение теоремы будет верным, если решение задачи

$$\dot{x} = f(t,x,u(t,x)) \tag{3.21}$$

понимать как в смысле Филиппова, так и в смысле Айзермана-Пятницкого, а именно.

1. Пусть многозначное отображение $F_2(t,x)$ является результатом замыкания графика отображения $f(t,x,u(t,x))$ и овыпукливания значений полученного при этом многозначного отображения (доопределение в смысле Филиппова). Под решением (3.21) понимаем решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_2(t,x). \tag{3.22}$$

2. Пусть многозначное отображение $F_3(t,x)$ получено овыпукливанием значений многозначного отображения $f(t,x,\tilde{U}_1(t,x),\ldots,\tilde{U}_m(t,x))$, где $\tilde{U}_i(t,x)$ для каждого $i = 1,\ldots,m$ – отрезок числовой прямой, содержащий все предельные значения функции $u_i(t',x)$ в точке (t,x), включая и ее значение в этой точке (доопределение в смысле Айзермана–Пятницкого). Под решением задачи (3.21) понимаем решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_3(t,x). \tag{3.23}$$

Тогда решения включений (3.22) и (3.23) существуют и являются, соответственно, решениями уравнения (3.21) в смысле Филиппова и

Айзермана-Пятницкого. Поэтому любое управление $u(t,x) \in U(t,x)$ со свойством $u(t,0)=0$, оптимальное по отношению к демпфированию функции $V(t,x)$ стабилизирует систему (3.21). $\square$

Литература

[1] *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. - I, II. // Автоматика и телемех. 1974. №7. С. 33-47; №8. С. 39-61.

[2] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. - М.: Физматлит, 1981.

[3] *Барбашин Е.А., Алимов Ю.И.* К теории релейных дифференциальных уравнений. // Изв. ВУЗов, сер. математика. 1962. №1. С. 3-13.

[4] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. - М.: КомКнига, 2005.

[5] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Многозначные отображения. // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. 1981. Т. 19. С. 127-231.

[6] *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. - М.: Физматлит, 1976.

[7] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука. Физматлит, 1978.

[8] Дискуссия по докладу А.Ф. Филиппова / Труды I Международного конгресса ИФАК. Т.1. - М.: Изд-во АН СССР, 1961

[9] *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[10] *Матросов В .М.* Метод векторых функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. - М.: Физматлит, 2001.

[11] *Руш М., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. - М.: Мир, 1980.

[12] *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. - Минск: Наука и Техника, 1986.

[13] *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. - М: Наука, 1981.

[14] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, 1985.

[15] *Финогенко И.А.* Об условии правой липшицевости для дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями. // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 38. № 8. С. 1068-1075.

[16] *Финогенко И.А.* О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно непрерывной правой частью. // Дифференциальные. уравнения. 2005. Т.41. №5. С.647-655.

[17] *Финогенко И.А.* Неявные формы записи разрывных систем // Известия РАЕН. Сер. МММИУ. 2003. Т. 7. № 3-4. С. 5-24.

[18] *Финогенко* Задачи на доказательство из теории метрических пространств и общей топологии. Учебное пособие - Иркутск: ИГУ, 2002.

[19] Painleve P. Lecons sur le frottement. - Pariis: Hermann, 1895. Русс. яз.: Пэнлеве П. Лекции о трении. - М.: Гостехиздат, 1954.