На правах рукописи

ЛОМОВ АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ И ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Иркутск — 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Войтишек Антон Вацлавович

доктор физико-математических наук
Лакеев Анатолий Валентинович

доктор физико-математических наук, профессор
Орлов Юрий Феликсович

Ведущая организация: **Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН** (г. Москва)

Защита диссертации состоится **8 декабря 2011 г.** в **14:00** на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Институте динамики систем и теории управления СО РАН (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте `www.idstu.irk.ru` ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан **7 ноября 2011 г.**

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. А. А. Щеглова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуются задачи идентификации параметров линейных динамических систем по возмущенным наблюдениям конечных участков переходных процессов. Особенности и сложность этих задач обусловлены необходимостью совместного оценивания как параметров, так и процессов в идентифицируемой системе. Решение ищется с помощью нелинейных вариационных обобщений метода наименьших квадратов (МНК). На практике интерес к вариационным методам идентификации вызван потребностями теории управления: параметры уравнения, моделирующего управляемый объект, как правило, известны неточно; чем короче интервалы наблюдения, при которых оценки параметров остаются состоятельными, тем более эффективно управление; вариационные методы идентификации здесь оказываются наилучшими. В эконометрике большое распространение, начиная с работ Т. Купманса (1937), получили линейные модели, описываемые системами одновременных (simultaneous) уравнений, и орторегрессионные методы идентификации их коэффициентов, оптимальные в случае ошибок во всех наблюдаемых переменных (errors in variables); такие методы являются частными случаями вариационных. В медицинской диагностике существенной является конечность измеренных переходных процессов, описывающих адаптацию организма и реакции на лекарственные препараты, и здесь наиболее эффективными оказываются вариационные постановки задач идентификации. Вариационные методы активно используются при построении моделей генных систем регулирования в живых организмах, эта область приложений бурно развивается в последнее десятилетие. Вариационные оценки получают все большее распространение благодаря наличию эффективных вычислительных методов их поиска — в частности, итерационных процедур типа Егоршина–Осборна–Де Мура с хорошими свойствами сходимости. Последнее позволяет проводить состоятельную вариационную идентификацию параметров линейных динамических систем в реальном времени в темпе реального переходного процесса с гарантированным результатом.

В отличие от обычного МНК вариационные методы не дают ответа в виде явных формул, а предполагают поиск решения путем минимизации специальной целевой функции. Из вариационных методов наиболее известен метод ортогональной регрессии (ОР) (Р. Эдкок (1877), К. Куммель (1879), К. Пирсон (1901), У. Фуллер (1987)), который широко используется в эконометрике для оценки параметров линейных систем нулевого порядка (Т. Купманс (1937) и др.) с ошибками в наблюдаемых переменных (errors-in-variables) и для идентификации динамических систем (М. Левин (1964), М. Аоки, П. Ю (1970)). В последнем случае оценки ОР не являются оптимальными ввиду неучета ненулевого порядка системы. В 1971 г. А. О. Егоршин предложил эффективный вычислительный метод решения вариационных задач идентификации для линейных динамических систем порядка выше нуля (метод вариационной идентификации (ВИ)), основанный на устойчивых алгоритмах рекуррентного проецирования на подпространства с теплицевыми базисами и оригинальной итерационной процедуре нахождения параметров с хорошими свойствами сходимости. Близкая по идее итерационная процедура в вариационной задаче для параметров однородных систем была независимо предложена М. Осборном (1970). В 1988 г. А. О. Егоршин опубликовал алгоритмы метода ВИ для уравнений с матричными коэффициентами; автором диссертации были установлены хорошие свойства сходимости алгоритмов ВИ в многомерном случае [18,19]. Позже вариационные задачи идентификации рассматривали Б. Де Мур (1993) и Б. Роорда (1995); Б. Де Мур предложил новые варианты итерационных процедур для параметров (метод STLS, 1993). Г. Голуб и Ч. Ван-Лоан (1980) исследовали чувствительность оценок ОР к возмущениям (назвав их оценками TLS). Т. Абатзоглу и Дж. Мендель (1991) построили локальное линейное приближение зависимости вариационных оценок от наблюдений. В 1991 г. вышла монография С. Ван-Хуффель, Дж. Вандевалле по методу TLS и его приложениям. Автор диссертации в цикле работ (1992–2003) получил условия структурной идентифицируемости и состоятельности оценок для вариационной многомерной задачи идентификации.

В. И. Костин (1984) и В. Г. Демиденко (2007) описали сложный характер экстремумов вариационных целевых функций. В. Г. Демиденко (2008, 2010) исследовал локальную устойчивость вариационных оценок и локальные свойства итерационной процедуры Егоршина–Осборна в предположении постоянства наименьшего собственного числа матрицы ядра целевой функции ВИ; вычислительные аспекты вариационных методов исследовались в ряде статей 2005–2010 гг. такими авторами, как С. Ван Хуффель, И. Марковский, А. Кукуш, Р. Пинтелон, Д. Сима и др. Вопросы параметрической идентифицируемости изучали Т. В. Авдеенко (2001), Н. А. Бодунов (2006).

Несмотря на значительный интерес в литературе к вариационным задачам идентификации, актуальным остается получение теоретических результатов по устойчивости, локальным и глобальным свойствам единственности вариационных оценок, исследование условий оптимальности, обобщение вариационного подхода на новые классы задач идентификации, в частности, анализа временных рядов с трендами из заданных параметрических семейств.

Цель работы. Аналитические исследования вариационных методов идентификации затруднены тем, что получаемые оценки зависят от исходных данных как неявные функции, вычисляемые из условия равенства нулю градиента целевой функции. В диссертации разрабатывается аналитическая техника и впервые решается ряд принципиальных теоретических проблем, связанных с вариационными задачами идентификации, которые обобщают собой классические задачи ортогональной регрессии с системами нулевого порядка на динамические системы порядка выше нуля: исследуются вопросы единственности (идентифицируемости), состоятельности, асимптотической эффективности вариационных оценок параметров; сравниваются свойства разных вариантов многомерных вариационных методов, исследуются критические точки вариационных целевых функций; изучается устойчивость вариационных оценок к возмущениям при конечном числе наблюдений; на основе полученных констант устойчивости формулируются и исследуются новые априорные и апостериорные количественные показатели идентифицируемости параметров; исследуются теоретические аспекты вариационного подхода при анализе временных рядов с трендами и при идентификации суммарных динамических систем, при наличии детерминированных возмущений из заданных линейных многообразий.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с применением методов линейной алгебры, алгебры многочленных и рациональных матриц, методов теории вероятностей и математической статистики.

Научная новизна. В диссертации вариационные методы оценивания параметров объединяются в один класс с определяющим признаком наличия ядра целевой функции в виде суммы проекторов. Такой класс оценок вводится впервые. Он включает в себя все основные типы оторегрессионных оценок, встречающиеся в литературе, и ряд новых оценок, которые описаны и исследованы в диссертации. Впервые доказана состоятельность для всего класса вариационных оценок, изучены асимптотические свойства, условия асимптотической эффективности и локальной устойчивости. В частности, получены обобщения на случай $r > 1$ и конечных N результатов М. Аоки и П. Ю (1970) и на случай $p > 0$ результатов Л. Глэзера (1982) и У. Фуллера (1987) по асимптотическим свойствам и состоятельности орторегрессионных оценок; на случай $p > 0$, $r > 1$ результатов М. Аоки и П. Ю (1970) и на случай $p > 0$ результатов А. Б. Куржанского (1991) по устойчивости оценок параметров систем нулевого порядка; на случай $m > 0$ результатов М. Осборна и Г. Смита (1991, 1995) по информационной матрице вариационных оценок параметров; последнее позволило изучить в диссертации условия, при которых вариационные оценки являются асимптотически наилучшими. Для исследования условий идентифицируемости в диссертации применяется метод равносильных преобразований, получивший развитие в работах К. Гловера, Я. Виллемса (1974), Э. Уолтера (1982), С. Важды (1989), Т. В. Авдеенко (2001), изучавших системы уравнений 1-го порядка с переменными состояния. В диссертации этот метод распространен на системы произвольных конечных порядков без переменных состояния. Впервые получены необходимые и достаточные конструктивные условия идентифицируемости детерминированных и стохастических систем для широкого класса параметризаций. На основании анализа сложности полученных критериев идентифицируемости предложена новая классификация линейных стохастических систем, отличающаяся от известной классификации Л. Льюнга. В диссертации получены локально наилучшие константы устойчивости вариационных оценок (первые результаты в этом направлении были опубликованы М. Аоки, П. Ю (1970) ($r = 1$, $p = 0$) и Т. Абатзоглу, Дж. Менделем (1991) без оценки нормы остаточного члена; в 2008 г. В. Г. Демиденко получил более простые неоптимальные оценки устойчивости). Это позволило предложить новые способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем; в частности, в диссертации решена проблема К. Ланцоша (1956) анализа устойчивости в задаче идентификации показателей экспонент. Вариационный подход в диссертации впервые применен к задачам анализа временных рядов с трендами, в том числе для идентификации линейных систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий; получены условия идентифицируемости как слагаемых процессов, так и параметров их уравнений. Применение в диссертации новых способов доказательств, существенно использующих конечномерность исследуемых систем, позволило снять ограничения на устойчивость и управляемость.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации разработаны новые методы исследования дискретных стационарных систем с конечными траекториями, которые имеют значение для математической теории систем. Они находят применение при исследовании систем управления в технике, эконометрике, экологии, медицине при анализе временных рядов с трендами, в том числе в случаях, когда длины измеряемых отрезков рядов не превосходят времен переходных процессов в исследуемых системах. Результаты диссертации включены в программу специального курса “Теория оптимальных процессов”, читаемого автором на механико-математическом факультете НГУ.

Достоверность. Теоретические положения диссертации согласуются с известными теоретическими результатами, полученными ранее другими авторами для частных случаев. Утверждения теорем из разных глав диссертации согласуются между собой в предельных случаях малых возмущений и больших объемов статистических выборок наблюдений. Основные теоретические положения дисертации подтверждаются результатами вычислительных экспериментов [4, 11–13, 16–19] и сравнением с результатами вычислений, полученными другими авторами.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации разрабатываются теоретические основы и методы анализа и идентификации параметров многомерных систем управления, описываемых матричными линейными разностными уравнениями, на основе новых вариационных методов обработки измерительной информации, с целью повышения эффективности управления техническими системами, что соответствует паспорту специальности 05.13.01 “Системный анализ, управление и обработка информации”.

Апробация работы. Все основные результаты диссертации докладывались автором на научных конфренциях: 2-й Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2010), Международной конференции “Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии” (Улан-Удэ, 2009), Международных конференциях “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO (Москва, 2000, 2004, 2006, 2009), Конференции “Математика в современном мире” (Новосибирск, 2007), Международной конференции “А. Н. Тихонов и современная математика” (Москва, 2006), Международной конференции по проблемам управления МКПУ III (Москва, 2006), Международной конференция IASTED по автоматизации, управлению и информационным технологиям ACIT’02 (Новосибирск, 2002), Международной конференции “Математика в приложениях” (Новосибирск 1999), III Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) (Новосибирск, 1998), Сибирской конференции по прикладной и индустриальной математике памяти Л. В. Канторовича (Новосибирск, 1994), X Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Саратов, 1993), Международном семинаре IMACS/IFAC International Workshop on Methods and Software for Automatic Control Systems (Иркутск, 1991), 5-м Всесоюзном совещании "Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии" (Новосибирск, 1989), X Совещании по проблемам управления (Алма-Ата, 1986).

Результаты диссертации обсуждались на Семинаре лаборатории № 7 им. Я. З. Цыпкина "Адаптивные и робастные системы управления" Института проблем управления РАН (рук. д. т. н. Б. Т. Поляк) и на семинарах Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН: на Общеинститутском математическом семинаре (рук. акад. Ю. Г. Решетняк), на семинаре "Математика в приложениях" (рук. акад. С. К. Годунов), на семинаре "Избранные вопросы математического анализа" (рук. д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 01-01-00627, 06-01-00776, 10-01-00035), Сибирского отделения РАН (интеграционный проект СО РАН № 85 и проект СО РАН I.2.1.2 с номером государственной регистрации 01201051851) и Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 16.740.11.0127, номер государственной регистрации 01201065293).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации автором опубликовано 30 печатных работ, в том числе 13 статей [3–7, 9–16] в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав с приложениями, заключения и списка литературы, включающего 271 наименование. Объем диссертации составляет 356 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении дается исторический обзор и сравнительное описание сложившихся подходов к идентификации линейных динамических систем, формулируются задачи исследования.

В первой главе изучаются вопросы алгебры дискретных стационарных линейных систем с конечными траекториями. Устанавливается соответствие между группой S равносильных преобразований системы и группой левых умножений ассоциированных с системой многочленных матриц. Для описания группы S вводятся новые понятия расширенной клеточно-теплицевой матрицы системы и множества продолжимых траекторий. При условии продолжимости траекторий полученные в диссертации результаты для конечно-траекторных систем сопрягаются с известными в литературе результатами для систем с актуально бесконечными интервалами наблюдения.

Определяется исследуемый класс систем и связанные с ним векторно-матричные конструкции

$$\begin{aligned} \alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] &= \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \\ &\quad k \in \overline{1, N-p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $y[k] \in \mathbb{R}^r$, $u[k] \in \mathbb{R}^m$. Используется также равносильная форма записи

$$\begin{aligned} &\gamma_p z[k+p] + \ldots + \gamma_0 z[k] = 0, \qquad k = \overline{1, N-p}, \\ &\gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}, \qquad z[k] = (y[k]; u[k]). \end{aligned} \tag{2}$$

Вводится вектор *процесса* $z \doteq (z[1]; \ldots; z[N]) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ и уравнение

$$Gz = 0, \tag{3}$$

$$G \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix} \doteq \Big\backslash \gamma_0 \;\; \gamma_1 \;\; \dots \;\; \gamma_p \Big\backslash \, .$$

Определяется многочленная матрица $\gamma(s) \doteq \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_p s^p$. Описание (1), (2) предполагается неизбыточным: строки $\gamma(s)$ линейно независимы (каноническая форма не содержит нулевых строк), сумма степеней строк $\gamma(s)$ минимальна на множестве левоэквивалентных многочленных матриц, числовая матрица γ_0 имеет полный ранг. Ограничения на устойчивость и управляемость не накладываются.

Определение 1. *Расширенной клеточно-теплицевой матрицей* называется матрица

$$G^+ = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \\ 0 & & & \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_p \end{pmatrix},$$

где расширение $\delta(s) = \delta_0 s^0 + \ldots + \delta_p s^p$ из l строк имеет вид

$$\delta(s) = \begin{pmatrix} \delta_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_r(s) \end{pmatrix} \cdot \gamma(s), \qquad \delta_i(s) \doteq \begin{pmatrix} s \\ \vdots \\ s^{p_r - p_i} \end{pmatrix}.$$

Здесь p_i, $i = \overline{1,r}$ — степени строк $\gamma(s)$, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_r = p$. Конструкция расширения $\delta(s)$ образована всеми возможными “сдвигами вправо” (умножениями на s^i) тех строк $\gamma_\theta(s)$, степени которых $< p$.

Устанавливается равносильность с точки зрения многообразия решений между системами уравнений с РКТ-матрицами и системами линейных разностных уравнений в нормальной форме 1-го порядка.

Теорема 1. *Система уравнений в нормальной форме 1-го порядка*

$$\begin{cases} y[k] = Cx[k] + Du[k], \\ x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \\ \hfill k = \overline{1,N}, \end{cases} \qquad z \doteq \begin{pmatrix} z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{pmatrix}, \quad z[k] \doteq \begin{pmatrix} y[k] \\ u[k] \end{pmatrix}, \quad (4)$$

равносильна системе с некоторой РКТ-*матрицей* $G^+ z = 0$. *И наоборот, для всякой* РКТ-*матрицы* G^+ *можно указать систему в нормальной форме 1-го порядка, множество решений которой*

$$\{z : \ x[1] \in \mathbb{R}^q, \ u[1], \ldots, u[N] \in \mathbb{R}^m\}$$

совпадает с правым нуль-пространством $\mathcal{N}(G^+)$.

Из РКТ-матрицы G^+ путем удвоения части строк получается клеточно-теплицевая матрица $G^\dagger = \diagdown \varepsilon_0 \ \ldots \ \varepsilon_p \diagdown \doteq \backslash \varepsilon \backslash, \ \varepsilon_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix}$. Исследуются классы равносильных преобразований РКТ-систем; устанавливается взаимно-однозначное соответствие между группой левых умножений РКТ-матрицы на невырожденные матрицы, сохраняющих РКТ-структуру, и группой левых умножений ассоциированной многочленной матрицы и малой матрицы ε.

Теорема 2. *Пусть* РКТ-*матрицы* G *и* G' *связаны равносильным преобразованием, т. е.* $\exists P : \ \det P \neq 0, \quad PG = G'$. *Тогда и только тогда существует многочленная матрица* $\rho(s)$ *такая, что*

$$\det \rho(s) = \mathrm{const} \neq 0, \qquad \rho(s)\gamma(s) = \gamma'(s),$$

и одновременно выполняются равенство $l = l'$ *и соотношение*

$$\exists \pi \in \mathbb{R}^{(r+l)\times(r+l)} : \quad \pi\varepsilon = \varepsilon'.$$

Этот результат является ключевым для получения новых конструктивных условий идентифицируемости во второй главе.

Вводятся понятия *продолжимых* стационарных решений и совпадения многообразий продолжимых решений, определяется *слабая равносильность* систем. Только продолжимые решения имеют физический смысл. С точки зрения слабой равносильности не различаются системы с расширенными клеточно-теплицевыми матрицами и системы с “обычными” клеточно-теплицевыми матрицами, которые повсеместно встречаются в литературе. Таким образом, установлено соответствие между развиваемой в диссертации техникой анализа конечно-траекторных систем и техникой анализа систем с актульно бесконечными интервалами наблюдения, широко представленной в современной литературе.

Результаты первой главы опубликованы в работах [2, 3, 6, 22].

Во второй главе исследуется идентифицируемость параметров многомерных линейных динамических систем без возмущений и со стохастическими возмущениями. Для матрицы $\gamma \doteq \begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p\end{pmatrix}$ определяется вектор $\operatorname{vect}\gamma$ последовательным выстраиванием транспонированных строк γ. Система уравнений (3) записывается в виде

$$Gz \equiv V \operatorname{vect}\gamma = 0,$$

где $V = V(z)$ — клеточно-ганкелевая матрица из элементов z. Предполагается, что матрица γ зависит от вектора параметров $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^v$: $\gamma = \gamma_\theta$. Вектор θ фиксирован и подлежит идентификации. Налагаются условия без ограничений на устойчивость и управляемость:

(i) параметризация $\theta \leftrightarrow \gamma_\theta$ взаимно однозначна в Θ и сильно дифференцируема в смысле Фреше; Θ — открытое подмножество;

(i′) (альтернативный вариант условия (i), используемый в ряде утверждений) $\operatorname{vect}\gamma_\theta = d + D\theta \doteq \widetilde{D}\varphi$, где $\widetilde{D} \doteq (d, D)$, $\varphi \doteq (1;\theta)$; матрица $\widetilde{D}$ задана, ее столбцы линейно независимы;

(ii) $\forall\, \theta \in \Theta$ в многочленной матрице $\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_{0,\theta} + \gamma_{1,\theta}s + \ldots + \gamma_{p,\theta}s^p$ **а)** каноническая форма не имеет тождественно нулевых строк; **б)** сумма степеней строк постоянна (степень многочленной строки есть наибольшая из степеней образующих эту строку многочленов); **в)** $\gamma_\theta(s)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $\gamma_\theta(s)$ матриц; **г)** младший матричный коэффициент $\gamma_{0,\theta}$ имеет линейно независимые строки.

Для идентифицируемости параметра θ необходимо, чтобы он был однозначно вычислим по множеству невозмущенных решений системы (1). Это свойство называется *различимостью*; оно зависит только от вида параметризации $\theta \mapsto \gamma_\theta$. Пусть $\mathcal{N}(G_\theta) \subset \mathbb{R}^{N(r+m)}$ — линейное многообразие всех решений системы (1), (2). Параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ *различима*, если отображение $\theta \mapsto \mathcal{N}(G_\theta)$ инъективно: $\theta_1 \neq \theta_2$ влечет $\mathcal{N}(G_{\theta_1}) \neq \mathcal{N}(G_{\theta_1})$.

Сначала изучаются системы порядка $p = 0$, используемые в эконометрике. Для них доказаны теоремы: 1) о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для сохранения максимального ранга матрицы системы на всем множестве значений параметров; 2) о минимальном количестве фиксированных элементов, необходимом для обеспечения различимости на всем множестве значений параметров.

Для динамических систем ($p > 0$) получены наиболее слабые из известных достаточные условия идентифицируемости в виде ограничений на ранги подматриц малой расширенной матрицы системы. Описан широкий класс *локально-свободных* параметризаций, для которых полученные в диссертации ранговые условия идентифицируемости становятся необходимыми и достаточными.

Определение 2. Два значения параметров θ, ξ называются неразличимыми, если $\mathcal{N}(G_\theta) = \mathcal{N}(G_\xi)$ (обозначается $\theta \sim \xi$). Система называется глобально различимой в точке θ, если $\xi \sim \theta$ при $\xi \in \Theta$ означает равенство $\xi = \theta$. Система называется локально различимой в точке θ, если в некоторой окрестности $V(\theta)$ $\xi \sim \theta$ при $\xi \in V(\theta)$ влечет $\xi = \theta$. Система называется структурно (глобально или локально) различимой в Θ, если она различима во всех точках $\theta \in \Theta$ за исключением, быть может, точек множества меры ноль.

Пусть $i \in \overline{1, r}$. В матрице $\varepsilon = \varepsilon_\theta$ выделим столбцы, имеющие на i-м месте элемент, не зависящий от θ (фиксированный элемент). Все такие столбцы образуют подматрицу, которую обозначим $\varepsilon_{i,\theta}$. По построению, вся i-я строка в $\varepsilon_{i,\theta}$ не зависит от θ.

Теорема 3. *Если для некоторого* θ *имеет место условие* $\forall\ i \in \overline{1,r}$ $\operatorname{rank} \varepsilon_{i,\theta} = r + l$, *то система* (2) *глобально различима в точке* θ.

Пусть τ — число зависящих от θ элементов матрицы γ_θ. Обозначим через $\eta_\theta \in \mathbb{R}^\tau$ вектор, составленный из этих элементов в определенном порядке. Обозначим $A = \|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|_{\tau\times v}$ матрицу Якоби вектор-функции $\theta \mapsto \eta_\theta$ в точке θ.

Определение 3. Если матрица Якоби $A = \|\partial\eta_\theta/\partial\theta\|$ квадратная и неособенная в точке θ, то параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ называется *локально-свободной в* θ.

Теорема 4. *Если параметризация* $\theta \mapsto \gamma_\theta$ *локально-свободная в* θ, *то условие теоремы 3 является необходимым для локальной различимости в точке* θ.

Теорема 5. *Для локально-свободных параметризаций* $\theta \mapsto \gamma_\theta$ *если система различима в некоторой точке* $\theta \in \Theta$, *то она различима почти всюду в* Θ, *т.е. структурно различима.*

Отдельно исследованы системы с так называемыми полином-операторными параметризациями — у которых вместо оператора сдвига s используется заданный многочлен $\varphi(s)$ от оператора сдвига. Это может быть многочлен любого из разностных аналогов оператора дифференцирования или их степеней, например, $\varphi(s) = [(s-1)/h]^p$. Показано, что для таких систем сохранят силу все результаты по идентифицируемости, полученные для случая $\varphi(s) \equiv s$. Благодаря применяемой технике доказательства все полученные в диссертации результаты по идентифицируемости без существенных изменений переносятся на системы с непрерывным временем, когда символ s понимается как оператор дифференцирования.

Другим объектом исследования являются стохастические системы

$$\begin{gathered}\gamma_{p,\theta} z[k+p] + \ldots + \gamma_{0,\theta} z[k] = \mu_{p,\theta}\varepsilon_1[k+p] + \ldots + \mu_{0,\theta}\varepsilon_1[k],\\ \check{z}[j] = z[j] + \varepsilon_2[j], \qquad j = \overline{1,N}, \qquad k = \overline{1,N-p}.\end{gathered} \tag{5}$$

Переменные $\check{z}[\cdot] \in \mathbb{R}^{r+m}$ измеряются напрямую, а случайные векторы $\varepsilon_1[\cdot] \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon_2[\cdot] \in \mathbb{R}^{r+m}$ играют роль возмущений. Вводится матрица

$$\varphi \doteq \begin{pmatrix} \varphi_{0,\theta} & \varphi_{1,\theta} & \dots & \varphi_{p,\theta} \end{pmatrix}, \qquad \varphi_{i,\theta} \doteq \begin{pmatrix} \gamma_{i,\theta} & -\mu_{i,\theta} \end{pmatrix}.$$

Налагаются ограничения:

(i.s) параметризация $\theta \leftrightarrow \varphi_\theta$ сильно дифференцируема в смысле Фреше и взаимно-однозначна в Θ; Θ — открытое подмножество $\mathbb{R}^v$;

(ii.s) для многочленной матрицы $\gamma_\theta(s)$ выполнены условия (ii), а)–г);

(iii.s) для всех значений параметра $\forall\, \theta \in \Theta$ многочленная матрица $\mu_\theta(s) \doteq \mu_{0,\theta} + \mu_{1,\theta}s + \dots\dots + \mu_{p,\theta}s^p$ имеет степени строк не больше степеней соответствующих строк матрицы $\gamma_\theta(s)$ (условие причинности);

(iv.s) случайные векторы $\varepsilon_1[\cdot]$, $\varepsilon_2[\cdot]$ взаимно независимы, имеют нулевое среднее и положительно определенную матрицу вторых моментов: $\mathbf{M}\,\varepsilon_i[\cdot] = 0$, $\mathbf{M}\,\varepsilon_i[t]\varepsilon_i[\tau]^{\mathrm{T}} = 0$, $t \neq \tau$, $\mathbf{M}\,\varepsilon_i[t]\varepsilon_i[t]^{\mathrm{T}} = \Sigma_i > 0$, $i = 1, 2$;

(v.s) входные переменные $u[\cdot]$ распределены независимо относительно возмущений $\varepsilon_1[\cdot]$, $\varepsilon_2[\cdot]$, имеют нулевое среднее и положительно определенную матрицу вторых моментов: $\mathbf{M}\,u[k]u[k]^{\mathrm{T}} = \Sigma_u > 0$, $\mathbf{M}\,u[k]u[l]^{\mathrm{T}} = 0$, $k \neq l$, $\mathbf{M}\,u[k] = 0$;

(vi-s) вектор начальных условий $w_0(y[1], \dots, y[p+1]) = x[1] \in \mathbb{R}^q$ в равносильной системе (4) детерминирован (имеет нулевую дисперсию) и имеет ненулевые проекции на все инвариантные подпространства матрицы $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

Системы (5) включают в себя как частные случаи известные в литературе классы FIR, AR, ARX, ARMA, AR(I)MAX, ARARX, ARARMAX, BJ, GMS, OE, EIV (Дж. Бокс, Г. Дженкинс (1974), Л. Льюнг (1987)). При $\varepsilon_1[\cdot] = 0$ уравнения (5) описывают системы с ошибками в наблюдаемых переменных (OE, EIV).

Для систем (5) получены необходимые и достаточные условия идентифицируемости параметра θ по распределению наблюдаемых переменных $\check{z}[\cdot]$. Исходя из сложности алгоритмической проверки условий идентифицируемости предложена новая классификация линейных стохастических систем известных в литературе классов, описанных в монографиях Дж. Бокса, Г. Дженкинса (1974) и Л. Льюнга (1987).

Определение 4. Пусть $\mathbf{P}_\theta$ — распределение наблюдаемых процессов $\check{z} \doteq (\check{z}[1]; \ldots; \check{z}[N])$. Система называется глобально идентифицируемой в точке θ, если из равенства $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ при $\xi \in \Theta$ следует $\xi = \theta$. Система называется локально идентифицируемой в точке θ, если существует окрестность $V(\theta) \subset \Theta$ такая, что из равенства $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\xi$ при $\xi \in V(\theta)$ следует $\xi = \theta$.

Теорема 6. *При условиях* (i.s)–(vi.s) *система* (5) *глобально идентифицируема в точке* θ, *если уравнение*

$$\rho(s)\begin{pmatrix}\gamma_\theta(s) & \mu_\theta(s)R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_\xi(s) & \mu_\xi(s)\end{pmatrix},$$

рассматриваемое как условие на унимодулярную матрицу $\rho(s) \in \mathbb{R}^{r\times r}[s]$ *и числовую матрицу* $R = \Sigma_1^{\frac{1}{2}} Q \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$ (Q *ортогональная*), *при* $\xi \in \Theta$ *влечет равенства* $\rho(s) \equiv I$, $Q = I$, $\xi = \theta$. *Система локально идентифицируема в точке* $\theta \in \Theta$, *если указанная импликация имеет место для точек* $\xi \in V(\theta) \subset \Theta$ *в некоторой окрестности* $V(\theta)$. *При дополнительном предположении о нормальности распределений величин* y_0, $u[\cdot]$, $\varepsilon_1[\cdot]$, *вышеназванные условия идентифицируемости становятся необходимыми и достаточными.*

Для установления классификации вводятся стохастические системы с матрицей наблюдения M

$$\begin{gathered}\gamma_{p,\theta} z[k+p] + \ldots + \gamma_{0,\theta} z[k] = \mu_{p,\theta}\varepsilon_1[k+p] + \ldots + \mu_{0,\theta}\varepsilon_1[k],\\ \check{z}[j] = M\begin{pmatrix} z[j] \\ \varepsilon_1[j]\end{pmatrix} + \varepsilon_2[j], \qquad j = \overline{1,N}, \qquad k = \overline{1, N-p}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\check{z}[\cdot] \in \mathbb{R}^{r'+m'+l'}$, $M \in \mathbb{R}^{(r'+m'+l')\times(r+m+l)}$, $r' \leqslant r$, $m' \leqslant m$, $l' \leqslant l$, $\varepsilon_1[\cdot] \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon_2[\cdot] \in \mathbb{R}^{r'+m'+l'}$. Исходя из алгоритмической сложности условий идентифицируемости, на основе теоремы 6 определяются три типа систем.

1. Системы с неособенными матрицами наблюдения $\det M \neq 0$ (все переменные измеряются напрямую).

2. Системы, в которых часть *входных* переменных не измеряется напрямую: $r' = r$, $m' + l' < m + l$,

$$M \sim \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right), \qquad M_1 \in \mathbb{R}^{r+m}, \qquad \det M_1 \neq 0.$$

3. Системы, в которых часть переменных *выхода* не измеряются напрямую:

$$M \sim \left(\begin{array}{c|cc} M_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \end{array}\right), \qquad M_1 \in \mathbb{R}^{r' \times r}, \qquad r' < r.$$

В классификации Льюнга (1987) за основу принимается символическая запись

$$A(s)\check{y}[k] = \frac{B(s)}{F(s)}\check{u}[k] + \frac{C(s)}{D(s)}e[k]. \tag{7}$$

Здесь s — оператор сдвига, $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ — многочлены. Сигналы $\check{y}[k]$, $\check{u}[k]$ измеряются напрямую, а $e[k]$ — гауссовый белый шум: $\mathbf{M}\, e[k] = 0$, $\mathbf{M}\, e[k]e[l] = \delta_{kl}$. Введением переменных z осуществляется переход к системе (6).

Многочлены в формуле (7)	Наименование модели	Тип системы
B	FIR	1
AB	ARX	1
ABC	ARMAX	2
AC	ARMA	2
ABD	ARARX	3
$ABCD$	ARARMAX	3
BF	OE, EIV	1
$BFCD$	BJ	3
$ABFCD$	GMS	3

Здесь многочлены, отсутствующие в левой позиции, полагаются равными единице. Исходя из структуры матрицы наблюдения M, определяется тип системы по сложности уравнений идентифицируемости (последний столбец таблицы).

Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 2, 5–7, 21–26].

В третьей главе рассматривается задача идентификации параметра θ_* по наблюдениям $\left\{\check{z}_{(1)}, \ldots, \check{z}_{(L)}\right\}$, $\check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{(i)}$, $z_{*(i)} \in \mathcal{N}\left(G_{\theta_*}\right)$, $\eta_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$. Обобщение на случай $\eta_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \Sigma\Sigma^{\text{т}})$ вынесено в приложение. Параметризация $\theta \mapsto \gamma_\theta$ предполагается различимой.

Определение 5. Множество наблюдений $\left\{\check{z}_{(i)} = z_{*(i)} + \eta_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ называется *полным*, если имеет место соотношение

$$Q_\infty \doteq \lim_{L\to\infty} L^{-1} \sum_{i=1}^{L} D^{\text{т}} V(z_{*(i)})^{\text{т}} V(z_{*(i)}) D > 0.$$

Последнее неравенство является обощением известного в литературе условия “постоянного возбуждения” (К. Острем, Т. Болин (1969), Л. Льюнг (1987)) на системы без ограничений на управляемость. Далее предполагается, что множество наблюдений полно.

Вводится новый класс *вариационных* оценок

$$\theta_L \;=\; \arg\min_\theta L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \left[\check{z}_{(i)}^{\text{т}} \left(\Pi_{1,\theta} + \ldots + \Pi_{M,\theta}\right) \check{z}_{(i)}\right], \qquad (8)$$

где все матрицы $\Pi_j = \Pi_{j,\theta} \geqslant 0$ являются неотрицательно определенными, проективными ($\Pi_j^2 = \Pi_j$), при этом $\Pi_j^{\text{т}} = \Pi_j$, $\Pi_{j,\theta_*} z_* = 0$.

Показано, что частными случаями вариационных оценок при разных структурах матриц $\Pi_{j,\theta}$ являются:

$*$ оценки ортогональной регрессии (ОР) (Р. Эдкок (1877), К. Пирсон (1901), Т. Купманс (1937), Г. Крамер (1946), М. Левин(1964));

$*$ модифицированные оценки ортогональной регрессии (М. Аоки, П. Ю (1970));

$*$ оценки вариационного метода идентификации (ВИ, ВМ) (А. О. Егоршин (1971, 1988)):

$$\begin{aligned} \theta_L \;&=\; \arg\min_\theta \min_{z_{(i)}:\, G_\theta z_{(i)}=0} L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \left\|\check{z}_{(i)} - z_{(i)}\right\|^2 = \\ &=\; \arg\min_\theta L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \left[\check{z}_{(i)}^{\text{т}} G_\theta^{\text{т}} \left(G_\theta G_\theta^{\text{т}}\right)^{-1} G_\theta \check{z}_{(i)}\right]; \qquad (9)\end{aligned}$$

∗ оценки нелинейного метода наименьших квадратов по всем переменным (TLS) (Г. Голуб, Ч. Ван-Лоан (1980), С. Ван-Хуффель, Дж. Вандевалле (1991));

∗ оценки нелинейного метода наименьших квадратов по всем переменным с ограничениями (CTLS) (Т. Абатзоглу, Дж. Мендель (1987));

∗ оценки метода наименьших квадратов с учетом структуры матриц (STLS) (Б. Де Мур (1993));

∗ оценки метода наименьших квадратов по всем переменным и траектории (GTLS) (Б. Роорда (1995));

∗ многомерные варианты оценок ортогональной регрессии и модифицированных оценок М. Аоки (ОР, ОРС, ОРМ) с аффинными параметризациями уравнений (впервые определены в 3-й главе).

Наиболее общей постановкой отличаются вариационный метод идентификации А. О. Егоршина (1971, 1988) (9) и метод STLS (Б. Де Мур (1993)). Предложено называть весь класс оценок (8) вариационными.

Теорема 7. *При ограничениях* (i′), (ii) *и полном множестве наблюдений* $\left\{\check{z}_{(i)},\, i \geqslant 1\right\}$ *вариационные оценки* θ_L (8) *сильно состоятельны*: $\lim_{L\to\infty} \theta_L = \theta_*$ *(п. н.)*.

Путем анализа линейных приближений показано, что оценки ВМ в случае малых амплитуд возмущений для широкого класса систем имеют меньшую дисперсию, чем оценки ОР и ОРМ, за счет более полного использования информации о линейных связях между наблюдаемыми переменными.

На основе вариационного подхода в диссертации предложено решение проблемы большого числа локальных экстремумов, поставленной И. И. Перельманом (1981): суть проблемы в том, что при идентификации параметров системы рекуррентными вариантами МНК число локальных экстремумов целевой функции растет вместе с длиной выборки N. В диссертации показано, что всегда существуют равносильные по состоятельности вариационные постановки задач идентификации, при которых число локальных экстремумов целевых функций не превосходит

$r(p+1)(r+m)$.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [4, 8–10, 13, 20, 27].

В четвертой главе исследованы асимптотические по $L \to \infty$ свойства вариационных оценок. Получены выражения для асимптотических дисперсий многомерных оценок ВМ, ОР, ОРМ параметров динамических систем порядка p выше нуля.

Сформулируем результат для оценок ВМ. Символом $*$ обозначается покомпонентное произведение матриц, $\operatorname{Sp} A * B = \sum A_{ii} B_{ii}$.

Теорема 8. *Пусть выполнены все условия теоремы 7. Дополнительно предположим, что компоненты каждого из векторов возмущений $\eta_{*(i)}$ есть независимые одинаково распределенные на $\mathbb{R}$ случайные величины с распределением из класса $\mathbf{M}_4(0, \sigma^2, 0, \omega^4)$, т. е. имеют нулевые 1-й и 3-й моменты, 2-й момент σ^2 и 4-й момент ω^4. Тогда вариационная оценка θ_L (9) асимптотически по $L \to \infty$ нормальна с дисперсией, определяемой выражениями*

$$\operatorname{cov} L^{\frac{1}{2}} (\theta_L - \theta_*) \quad \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} \quad (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1} (\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}}) (\mathbf{M}\, J_1'')^{-1},$$

$$\mathbf{M}\, J_1' J_1'^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \mathbf{M}\, J_1'' + \sigma^4 D^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X D + (\omega^4 - 3\sigma^4) D^{\mathrm{T}} Y^{\mathrm{T}} Y D, \tag{10}$$

$$\mathbf{M}\, J_1'' = \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D,$$

$$D^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X D \doteq \tfrac{1}{\sigma^2} \mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} \left(\widehat{V} - V_*\right)^{\mathrm{T}} C \left(\widehat{V} - V_*\right) D =$$

$$= D^{\mathrm{T}} \left\| \operatorname{Sp} \Pi E_q^{\mathrm{T}} C E_l \Pi \right\|_l^q D \doteq D^{\mathrm{T}} \left\| x_{kl} \right\|_l^q D,$$

$$Y^{\mathrm{T}} Y \doteq \left\| y_{kl} \right\|_l^q = \left\| \operatorname{Sp} \left(W_q^{\mathrm{T}} * W_l \right) \right\|_l^q, \qquad W_l \doteq G^{\mathrm{T}} C E_l \Pi,$$

$$y_{ql}^2 \leqslant x_{qq} x_{ll},$$

$$\widehat{V} \doteq V(\widehat{z}), \qquad V_* \doteq V(z_*).$$

В случае нормального распределения $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(o, \sigma^2)$ имеет место равенство $\omega^4 = 3\sigma^4$, вследствие чего третье слагаемое в формуле (10) обращается в ноль. Показано, что ряд результатов из монографии У. Фуллера

(1987) получаются как следствия этой теоремы. Для оценок ОР соответствующие утверждения получаются заменой матриц.

Далее вычисляется информационная матрица для параметров и процессов в задаче вариационной идентификации и исследуется асимптотическая оптимальность оценок (9).

Теорема 9. *Пусть* $L = 1$, $z_{*(1)} = z_*$ *и* $\eta_{*(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$. *Тогда при условии полноты наблюдений нижняя граница Крамера–Рао для асимптотической дисперсии оценок параметра* θ_* *имеет вид*

$$\lim_{L\to\infty} \operatorname{cov} L^{\frac{1}{2}} (\theta_L - \theta_*) \geqslant \sigma^2 \left(D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D\right)^{-1}.$$

На основании этой теоремы в диссертации показано, что вариационные оценки (9) являются асимптотически наилучшими в предельном случае $(\varrho/\sigma)^2 \to \infty$, где $(\varrho/\sigma)^2$ — отношение дисперсии распределения истинных процессов системы к дисперсии шумов наблюдений. Пусть $H(\theta_*)$ — базис из марковских параметров для многообразия $\mathcal{N}\left(G_{\theta_*}\right)$. Всякий процесс z_* : $G_{\theta_*} z_* = 0$ может быть представлен как произведение $z_* = H(\theta_*) w$, где вектор w составлен из начальных условий и переменных правой части уравнения (1).

Теорема 10. *Пусть дано множество наблюдений*

$$\left\{\check{z}_{(i)} = H(\theta_*) w_{(i)} + \eta_{*(i)},\ i \geqslant 1\right\}, \qquad \eta_{*(i)} \in \mathbf{N}\left(0, \sigma^2 I\right),$$

где величины $w_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_w}$ *являются независимыми одинаково распределенными случайными векторами с распределением одного из двух видов*: (а) *нормальное* $w_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \varrho^2 I)$ *или* (б) *равномерное на шаре* B_ϱ *радиуса* ϱ *с центром в нуле,* $w_{(i)} \in \mathbf{U}(0, B_\varrho)$. *Тогда в пределе* $\varrho/\sigma \to \infty$ *вариационная оценка* θ_L (9) *параметра* θ_* *является асимптотически эффективной по* $L \to \infty$ *и имеет дисперсию* $\operatorname{cov} L^{\frac{1}{2}} (\theta_L - \theta_*) \underset{L\to\infty,\, \frac{\varrho}{\sigma}\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \left(\mathbf{M}\, D^{\mathrm{T}} V_*^{\mathrm{T}} C V_* D\right)^{-1}$.

При $\varrho/\sigma \to \infty$ выражение в правой части стремится к нулю ввиду соотношения $V_*^{\mathrm{T}} C V_* \sim O(\varrho^2)$.

Из теоремы 10 следует, что вариационные оценки (9) асимптотически оптимальны в условиях наибольшей априорной неопределенности истинных процессов идентифицируемой системы. Этот результат позволяет по-новому, с точки зрения математической статистики, осмыслить идеи, лежащие в основе вариационных методов оценивания.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [8, 10, 13, 20, 27].

Пятая глава содержит результаты по исследованию чувствительности вариационных оценок (9) к малым возмущениям в наблюдениях $\check{z}$ при $L = 1$. Оценка $\hat{\theta} \doteq \theta(x)$ есть неявная функция наблюдений $x \doteq \check{z}$, определяемая из условия равенства нулю градиента целевой функции. В диссертации вычислены производные функций оценок ОР, ОРМ и ВМ и построены матрицы чувствительности, которые описывают эллипсоиды разброса $\Delta\theta$ оценок при малых возмущениях $\|\Delta x\| \leqslant \epsilon$. Обозначим ρ^2 значение целевой функции метода ВМ (9) в оптимальной точке $\hat{\theta}(x)$. Величина $\rho(\epsilon) \geqslant 0$ играет роль ошибки аппроксимации наблюдения x решениями наиболее подходящей системы вида (1). Матрицы $R_0 \doteq D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}C\widehat{V}D$, $R_0^{\frac{1}{2}} \doteq D^{\mathrm{T}}\widehat{V}^{\mathrm{T}}CG$, $C \doteq (GG^{\mathrm{T}})^{-1}$, $R_0^{\frac{1}{2}}R_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} = R_0$ описывают линейное приближение зависимости $\theta(x)$: $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -R_0^{-1}R_0^{\frac{1}{2}} + O(\rho)$.

Теорема 11. *Пусть* $R^* \doteq \|D\|^2 \cdot c_{00}\mathrm{Sp}\, C \cdot \|x\|^2$, $b_0 \doteq \dfrac{2\sqrt{n}}{\lambda_{\min}(R_0)}$,
$c_{00} \doteq r(p{+}1)(m{+}r)$, $c_{22} \doteq \dfrac{\sqrt{2n}\, b_0\sqrt{R^*}}{\|x\|}\left\{36\, b_0R^*\left(\sqrt{n}\,\left[31\, b_0R^* + 1\right] + 1\right) + 1\right\}$,
и выполнены неравенства $\rho + \epsilon \leqslant \dfrac{\|x\|}{12\, b_0R^*}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}} + \frac{21\sqrt{n}\, b_0\sqrt{R^*}}{24}\right)\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\sqrt{6} - 2)}{(N-p)\left[(N-p)^{3/2} + 1\right] \cdot \mathrm{Sp}\, C \cdot \|D\| \cdot \|\gamma\|},$$

которые рассматриваются как условия на ρ *и* ϵ. *Тогда*

$$\|\Delta\theta\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(R_0)}}\,\epsilon + \frac{21\sqrt{n}\,b_0^2\,(R^*)^{\frac{3}{2}}}{2\|x\|}\,\rho\epsilon + c_{22}\,\epsilon^2.$$

Как следствие теоремы получены оценки устойчивости в обратной задаче восстановления параметров уравнения (1) по наблюдению $x = z + \epsilon$ решения z.

Были вычислены значения матриц дисперсий оценок ВМ, ОР, ОРМ в пределе малых возмущений. Показано, что они являются матрицами типа R_0. На этом основании предложены новые способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров матричных линейных разностных уравнений. Эффективность новых показателей проверена численными экспериментами.

Результаты 5-й главы опубликованы работах [8, 15, 16, 29, 30].

В шестой главе исследуются суммарные (дизъюнктивные) линейные системы. Система с матрицей P называется дизъюнкцией (или суммой) систем G и F и обозначается $P = G \vee F$, если $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$. Показано, что суммарные системы естественным образом возникают при вариационной постановке задач анализа временных рядов с трендами, а также при идентификации линейных систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий. Такими детерминированными составляющими могут быть решения другой линейной системы, как с известными параметрами, так и с параметрами, подлежащими идентификации наряду с параметрами основной системы. Следующая теорема дает способ построения суммарных систем.

Теорема 12. *Для клеточно-теплицевых матриц* $G \backsim \gamma(s)$, $F \backsim \varphi(s)$ *с одинаковыми числами столбцов и клеточных столбцов всегда существует клеточно-теплицевая матрица* $P \backsim \pi(s)$ *такая, что* $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(G) + \mathcal{N}(F)$ *и многочленная матрица* $\pi(s)$ *удовлетворяет условиям* (ii). *Последнее равенство равносильно равенству* $\mathcal{P}\left(\pi(s)\right) = \mathcal{P}\left(\gamma(s)\right) \cap \mathcal{P}\left(\varphi(s)\right)$, *где* $\mathcal{P}\left(\varphi(s)\right)$ *обозначает модуль (линейную оболочку над коль-*

цом многочленов) многочленных строк матрицы $\varphi(s)$.

Получены условия нулевого пересечения $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$; по сути это условия идентифицируемости слагаемых процессов по наблюдениям сумм.

Теорема 13. *Условие* $\mathcal{N}(G) \cap \mathcal{N}(F) = \{0\}$ *равносильно любому из следующих трех утверждений*:

(1) *многочленная матрица* $\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix}$ *для всех* s *имеет линейно независимые столбцы*: $\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \{0\}$;

(2) *каноническая форма* $\mathrm{Sm}\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix}$ *для всех* s *имеет линейно независимые столбцы*: $\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \mathcal{N}\left(\mathrm{Sm}\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix}\right) = \{0\}$;

(3) *матрица* $\mathrm{Sm}\begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix}$ *является "вертикальной" (число строк* $\geqslant$ *числа столбцов), не имеет нулевых столбцов и состоит только из нулей и единиц.*

Пусть на временном интервале $\overline{1, N}$ дано наблюдение $\check{z} \in \mathbb{R}^{nN}$ суммарного процесса "ряд плюс тренд" $z^* = z^*_{\mathcal{B}} + z^*_{\mathcal{C}}$ с возмущениями: $\check{z} = z^* + e$. Пусть $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{nN}$ — подпространства сеточных функций, порождаемые известными уравнениями ряда и тренда, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$. Вариационные оценки ряда и тренда получаются через наилучшее приближение вектора $\check{z}$ суммой векторов $\hat{z}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ и $\hat{z}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$:

$$\|\check{z} - \hat{z}\|^2 = \|\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{B}} - \hat{z}_{\mathcal{C}}\|^2 = \min_{z_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B},\, z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}} \|\check{z} - z_{\mathcal{B}} - z_{\mathcal{C}}\|^2. \tag{11}$$

В диссертации получены формулы идентификации слагаемых процессов $z_{\mathcal{B}}$, $z_{\mathcal{C}}$ по измерениям суммарного процесса $\check{z}$ с аддитивными возмущениями. Пусть $\mathcal{B} = \operatorname{im} B$, $\mathcal{C} = \operatorname{im} C$. Обозначим $\overline{B}$ матрицу, столбцы которой образуют базис ортогонального дополнения $\mathcal{B}$ до $\mathbb{R}^{nN}$, т. е. составная матрица $\left(\overline{B}, B\right)$ неособенная и $\overline{B}^{\mathrm{T}} B = 0$; тогда $\overline{B}^{\mathrm{T}} = G$, $\overline{C}^{\mathrm{T}} = F$.

Теорема 14. *Если* $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$, *то решение задачи* (11) *единственно и имеет вид*

$$\begin{cases} \hat{z}_{\mathcal{B}} = B\left(\overline{C}_2^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} \overline{C}_2^{\mathrm{T}} \check{z}, \qquad \overline{C}_2^{\mathrm{T}} \doteq \overline{C}\left(\overline{C}^{\mathrm{T}}\overline{C}\right)^{-1} \overline{C}^{\mathrm{T}} B, \\ \hat{z}_{\mathcal{C}} = C\left(\overline{B}_2^{\mathrm{T}} C\right)^{-1} \overline{B}_2^{\mathrm{T}} \check{z}, \qquad \overline{B}_2^{\mathrm{T}} \doteq \overline{B}\left(\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} C. \end{cases}$$

Следствие. *При* $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{0\}$ *задача* (11) *имеет единственное решение*

$$\begin{cases} \hat{z}_{\mathcal{B}} = \left[I - \overline{B}\left(\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}}\right](\check{z} - \hat{z}_{\mathcal{C}}), \\ \hat{z}_{\mathcal{C}} = C\left(\overline{B}_2^{\mathrm{T}} C\right)^{-1} \overline{B}_2^{\mathrm{T}} \check{z}, \qquad \overline{B}_2^{\mathrm{T}} \doteq \overline{B}\left(\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{B}\right)^{-1} \overline{B}^{\mathrm{T}} C. \end{cases} \tag{12}$$

Эффективность полученных формул проверяется расчетами. Далее проводится обобщение критериев параметрической идентифицируемости из главы 2 на суммарные системы и дается критерий управляемости суммарных систем. Показано, что в большинстве практических случаев суммарные системы неуправляемы. Это накладывает ограничение на классы методов, которые применимы для идентификации параметров суммарных систем; вариационные методы не требуют условия управляемости и поэтому могут быть применены.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [8, 11–14, 28].

В приложениях к главам приведены вспомогательные утверждения, доказательства теорем и примеры расчетов, подтверждающих теоретические результаты диссертации. Приводятся также тексты программ на языке открытой вычислительной среды Scilab.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получены не зависящие от метода идентификации конструктивные условия идентифицируемости параметров многомерных стационарных линейных динамических детерминированных и стохастических систем, которые являются необходимыми и достаточными для широкого класса

параметризаций; на основе анализа сложности условий идентифицируемости предложена новая классификация стохастических систем, отличающаяся от известной классификации Л. Льюнга.

2. Описан новый класс многомерных вариационных оценок параметров дискретных стационарных линейных динамических систем, включающий в себя основные типы орторегрессионных оценок, встречающиеся в литературе. Доказана состоятельность и исследованы асимптотические свойства оценок этого класса; вычислены информационные матрицы и описаны распределения наблюдений, для которых вариационные оценки являются асимптотически наилучшими.

3. Получены константы устойчивости вариационных оценок, наилучшие в пределе малых возмущений; установлена их связь с информационными матрицами; на этой основе предложены способы вычисления априорных и апостериорных количественных показателей идентифицируемости параметров линейных динамических систем, в частности, решена проблема К. Ланцоша (1956) анализа устойчивости в задаче идентификации показателей экспонент.

4. В задачах анализа временных рядов с трендами, формулируемых в диссертации как задачи вариационной идентификации дискретных стационарных линейных динамических систем при наличии в измерениях неопределенных детерминированных составляющих из заданных линейных многообразий, получены условия идентифицируемости как процессов ряда и тренда, так и параметров уравнений, описывающих ряд и тренд.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Lomov A. A.* Correct Parametrizations of Linear Models // Siberian Advances in Mathematics. 1994. V. 4. P. 95–113.

[2] *Ломов А. А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994. Т. 28: Модели и методы оптимизации. С. 91–117.

[3] *Ломов А. А.* О предельном значении передаточной функции матричного линейного дифференциального уравнения на бесконечности // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 25–30.

[4] *Ломов А. А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН. ТиСУ. 1997. № 3. С. 20–26.

[5] *Ломов А. А.* Параметрическая идентифицируемость линейных стохастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Известия РАН. ТиСУ. 2002. № 2. С. 53–58.

[6] *Ломов А. А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 261–266.

[7] *Ломов А. А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 4(16). С. 60–66.

[8] *Ломов А. А.* Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // [Электронный ресурс]: Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 1–86. URL: `http://www.math.spbu.ru/diffjournal/j/pdf/lomov.pdf`.

[9] *Ломов А. А.* Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 39–47.

[10] *Ломов А. А.* Орторегрессионные оценки параметров систем линейных разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 3(23). С. 102–119.

[11] *Ломов А. А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами (I) // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 29–36.

[12] *Ломов А. А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами (II) // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 82–93.

[13] *Ломов А. А.* Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // Известия РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 25–37.

[14] *Ломов А. А.* Управляемость суммарных линейных систем // Си-

бирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII, № 2(42). С. 79–84.

[15] *Ломов А.А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81–103.

[16] *Ломов А.А.* О количественных априорных показателях идентифицируемости коэффициентов линейных динамических систем // Известия РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 3–15.

[17] *Egorshin A.O., Lomov A.A.* Variational identification and filtration via fast algorithms // Proc. 8-th IFAC/ IFORS Symp. on Identification and System Parameter Estimation. Beijing (China): Pergamon Press, 1988. V. 2. P. 665–671.

[18] *Касьянова С.Н., Ломов А.А.* Программный комплекс моделирования и идентификации линейных динамических систем на основе вариационного метода // Динамика управляемых космических объектов. Красноярск: Вычислительный центр, 1990. С. 113–121.

[19] *Ломов А.А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Сб. тр. Всерос. науч. школы "Компьютерная логика, алгебра и интеллектное управление". Т. 3. Иркутск, 1994. С. 19–35.

[20] *Ломов А.А.* Статистические свойства орторегрессионных методов оценивания параметров и решений систем линейных разностных уравнений // Оптимизация. Управление. Интеллект: Тр. Российской ассоциации математического программирования. Иркутск, 1997. № 2. С. 40–51.

[21] *Ломов А.А.* Ранговые условия идентифицируемости стохастических линейных систем // 11-я Байкальская Междунар. школа-семинар "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, 1998. Сб. тр. Т. 3. С. 112–115.

[22] *Lomov A.A.* Identifiability of ARMAX systems with short operating records // Proc. II Symp. Automat. Control (CIMAF'99). La Habana, 1999. P. 207–221.

[23] *Ломов А.А.* Параметрическая идентифицируемость линейных сто-

хастических систем по наблюдениям коротких отрезков траекторий // Тр. Междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’2000. М.: ИПУ РАН, 2000. С. 1244–1251.

[24] *Ломов А.А.* Об априорном анализе сложности алгоритмов идентификации линейных систем // Методы оптимизации и их приложения: Тр. 12-й Байкальской междунар. конф. Иркутск, 2001. Т. 5. С. 101–106.

[25] *Lomov A.A.* Stochastic Linear Systems Classification Based on Complexity of Identifiability Conditions // La Habana, III Symposio de Control Automatico, 2001. P. 257–265.

[26] *Lomov A.A.* Identifiability of Time-Invariant Linear Models by Transient Signal Observations // Proc. of the IASTED Intern. Conf. on Automation, Control, and Information Technology. Anaheim, Calgary, Zurich. Acta Press, 2002. P. 507–512.

[27] *Ломов А.А.* О статистических свойствах оценок параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Тр. III Междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’04. М.: ИПУ РАН, 2004. С. 209–224.

[28] *Ломов А.А.* Задача отделения трендов в линейных системах // Тр. V Междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’06. М.: ИПУ РАН, 2006. С. 1980–2009.

[29] *Ломов А. А.* О количественном априорном показателе идентифицируемости параметров линейной системы // Тр. VIII Междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’09. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 479–491.

[30] *Ломов А. А.* Априорные оценки погрешности идентификации коэффициентов линейных ОРУ // Материалы Междунар. конф. “Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии”. Улан-Удэ, 24–28 августа 2009 г. С. 236–242.

Редакционно-издательский отдел
Учреждения Российской академии наук
Института динамики систем и теории управления
Сибирского отделения РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
E-mail: `rio@icc.ru`

Подписано к печати 02.08.2011 г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 2,0 п.л.
Заказ 29. Тираж 120 экз.